ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Géométrie de situation. Recherches sur quelques lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 214-252
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__214_0>

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Recherches sur quelques lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres ;

Par M. GERGONNE.

> En observant ce que les résultats particuliers avaient de commun entre eux, on est successivement parvenu à des résultats fort étendus, et les sciences mathématiques sont à la fois devenues plus générales et plus simples.
>
> (LAPLACE ; *Leçons à l'Ecole normale*).

NOUS observions, il n'y a pas long-temps (*), qu'au point où les sciences mathématiques sont aujourd'hui parvenues, et encombrés comme nous le sommes de théorèmes, dont la mémoire la plus intrépide ne saurait même se flatter de conserver les énoncés, on servait peut-être moins utilement la science en cherchant des vérités nouvelles qu'en s'efforçant de ramener à un petit nombre de chefs principaux les vérités déjà découvertes. Une science d'ailleurs se recommande peut-être moins encore par la multitude des pro-

(*) Voy. la pag. 314 du précédent volume.

positions dont se compose son domaine que par la manière dont ces propositions sont liées et enchaînées les unes aux autres. Or, il est dans chaque science certains points de vue élevés où il suffit de se placer pour embrasser d'un même coup-d'œil un grand nombre de vérités que, dans une position moins favorable, on aurait pu croire indépendantes les unes des autres, et que l'on reconnaît dès lors dériver toutes d'un principe commun, souvent même incomparablement plus facile à établir que les vérités particulières dont il est l'expression abrégée.

C'est dans la vue de confirmer ces considérations par quelques exemples assez remarquables que nous nous proposons ici d'établir, sur les points communs et tangentes communes aux courbes planes, situées dans un même plan, sur les lignes communes et points communs aux surfaces courbes, sur les surfaces développables qui leur sont circonscrites et sur leurs plans tangens communs, un petit nombre de théorèmes généraux, offrant une infinité de corollaires, parmi lesquels nous nous bornerons à signaler les plus simples ou les plus dignes de remarque. Plusieurs de ces corollaires sont connus depuis long-temps ; mais nous ne pensons pas qu'on en rencontre autre part des démonstrations aussi simples et aussi brièves, et qui exigent aussi peu de contention d'esprit, que celles qu'on trouvera ici des théorèmes généraux qui les renferment tous.

Comme il ne s'agira aucunement ici des relations métriques, tous nos théorèmes seront doubles. Pour en faire mieux saisir la correspondance, nous placerons dans deux colonnes, en regard les unes des autres, les théorèmes qui devront se correspondre, ainsi que nous l'avons déjà pratiqué plusieurs fois.

SECTION PREMIÈRE.

Propriétés des courbes algébriques, situées dans un même plan.

Soit une figure plane, composée de tant de points et de lignes droites et courbes qu'on voudra. Concevons qu'ayant tracé arbitrairement, sur le plan de cette figure, une ligne quelconque du second ordre, on construise, sur le même plan, une autre figure dont tous les points et toutes les droites soient les pôles et polaires de toutes les droites et de tous les points de la première, par rapport à cette ligne du second ordre, considérée comme *directrice*; les deux figures ainsi tracées seront dites *polaires réciproques* l'une de l'autre, attendu que la première pourra être déduite de la seconde comme celle-ci est supposée l'être de l'autre. Or, en conséquence des propriétés, bien connues aujourd'hui, des pôles et polaires, voici les relations principales qui se trouveront exister entre ces deux figures.

1.° Autant il y aura dans l'un de systèmes de points situés en ligne droite, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de droites concourant en un même point.	1.° Autant il y aura dans l'un de systèmes de droites concourant en un même point, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de points situés en ligne droite.
2.° Autant il y aura dans l'un de systèmes de points situés sur une même courbe, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de tangentes à une courbe de même ordre.	2.° Autant il y aura dans l'un de systèmes de tangentes à une même courbe, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de points situés sur une courbe de même ordre.
3.° Autant il y aura dans l'un de systèmes de points d'une même courbe, situés sur une même droite, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de tangentes à une courbe de même ordre, issues d'un même point.	3.° Autant il y aura dans l'un de systèmes de tangentes à une même courbe, issues d'un même point, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de points d'une courbe de même ordre, situés sur une même droite.
4.° Enfin, autant il y aura	4.° Enfin, autant il y aura

dans l'une des figures de systèmes de points communs à deux ou à un plus grand nombre de courbes, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de tangentes communes à deux ou à un plus grand nombre de courbes de même ordre.

dans l'une des figures de systèmes de tangentes communes à deux ou à un plus grand nombre de courbes, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de points communs à deux ou à un plus grand nombre de courbes de même ordre.

Il importe beaucoup de se rendre toutes ces diverses relations bien familières, de s'en imprégner, s'il est permis de s'exprimer ainsi; parce qu'en même temps qu'elles peuvent faire découvrir un grand nombre de théorèmes, elles en rendent toute démonstration superflue. C'est ainsi que nous allons en user nous-même; et lorsque, par quelque moyen que ce soit, nous serons parvenus à établir un théorème, susceptible de l'espèce de traduction dont il est question ici, nous écrirons à sa droite celui qui lui correspond, sans nous mettre aucunement en peine de le démontrer; bien certain que, si l'un est vrai, l'autre doit l'être également.

Dans tout ce qui va suivre, nous réputerons également comme ligne d'un certain ordre, soit une ligne effective de cet ordre, soit un système équivalent de lignes d'ordres inférieurs, c'est-à-dire, un système de lignes données par une équation unique, d'un degré égal à l'ordre dont il s'agit. Ainsi, par exemple, un système de deux lignes des p^{ieme} et q^{ieme} ordre sera réputé une ligne unique du $(p+q)^{ieme}$ ordre. Pareillement, le système de m droites sera réputé une ligne unique de m^{ieme} ordre.

Nous convenons aussi de comprendre, parmi les intersections de deux courbes, leurs intersections *idéales* aussi bien que leurs intersections *réelles*, leurs intersections *infiniment distantes* aussi bien que leurs intersections *acces-*

Nous convenons aussi de comprendre, parmi les tangentes communes à deux courbes, leurs tangentes communes *idéales* aussi bien que leurs tangentes communes *réelles*, leurs tangentes communes *infiniment distantes* aussi *sibles*; de sorte que, dans notre langage, le nombre des intersections de deux courbes sera constamment égal au produit des degrés de leurs équations.

bien que leurs tangentes communes *accessibles*; de sorte que, dans notre langage, le nombre des tangentes communes à deux courbes sera constamment égal au produit des degrés de leurs équations.

Ces conventions sont nécessaires pour que nos théorèmes puissent avoir lieu sans aucune restriction.

§. I.

Ces choses ainsi entendues, considérons deux lignes du m^{ieme} ordre, situées dans un même plan, rapportées aux mêmes axes quelconques, et ayant respectivement pour équations *rationnelles*, en x et y,

$$M=0\ ,\quad (1)\qquad\qquad M'=0\ ;\quad (2)$$

elles se couperont en m^2 points qui, dès que m sera plus grand que *trois*, ne pourront être supposés quelconques, puisqu'alors m^2 se trouvera surpasser le nombre des points qu'il est permis de prendre au hasard sur un plan, pour déterminer complètement une ligne *unique* du m^{ieme} ordre. Dans tous les cas, on obtiendra les coordonnées de ces différens points en considérant x et y, dans les équations (1) et (2), comme les deux inconnues d'un même problème déterminé.

Soit représentée par λ une constante indéterminée, et soit posée l'équation

$$\lambda M+M'=0\ ;\ (*)\qquad\qquad (3)$$

chacune de nos trois équations sera évidemment comportée par les deux autres, quel que soit λ; de sorte que, de quelque manière qu'on les combine deux à deux, elles donneront exactement les

(*) On ne gagnerait évidemment rien à poser $\lambda M+\lambda' M'=0$, puisque l'autre équation rentre dans celle-ci en y changeant λ, qui est quelconque, en $\frac{\lambda}{\lambda'}$.

mêmes systèmes de valeurs pour x et y ; mais, à cause de l'indétermination de λ, la dernière appartient à une infinité de lignes du $m.^{\text{ième}}$ ordre ; ces lignes ont donc la propriété commune de couper l'une quelconque des deux proposées précisément en tous les points et aux seuls points où elle est coupée par l'autre.

Réciproquement, toute ligne qui coupera une quelconque des deux proposées précisément en tous les points et aux seuls points où elle est coupée par l'autre, ne pourra être qu'une ligne du $m.^{\text{ème}}$ ordre dont l'équation soit comportée par les équations (1) et (2) ; cette équation devra donc être un cas particulier de l'équation (3), et de nature à pouvoir en être déduite par une détermination convenable de la constante arbitraire λ (*).

Soit $m=p+q$, p et q étant deux nombres entiers positifs, et supposons que, pour une certaine valeur de la constante λ, l'équation (3) prenne la forme

$$PQ=0\;, \qquad (4)$$

P et Q étant des facteurs *rationnels* des $p^{\text{ièmes}}$ et $q^{\text{ièmes}}$ degré, respectivement ; il s'ensuivra que, pour cette valeur de λ, l'équation (3) n'exprime plus une courbe unique, mais le système de deux lignes des $p^{\text{ième}}$ et $q^{\text{ième}}$ ordre, sur lesquelles conséquemment devront

(*) On pourrait objecter ici que si, par exemple, les deux proposées sont

$$x^2+y^2+ax+by+c=0\;, \qquad x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0\;,$$

en supposant $\lambda=-1$, l'equation (3) sera

$$(a'-a)x+(b'-b)y+(c'-e)=0\;,$$

qui n'est plus alors que du premier degré ; mais on doit observer que, dans ce cas, la veritable équation (3) est proprement

$$0x^2+0y^2+(a'-a)x+(b'-b)y+(c'-c)=0\;,$$

qui continue d'être du second degré, lorsque x et y sont supposés infinis. Cela revient à dire, comme l'a déjà remarqué M. Poncelet (*Propriétés projectives*, pag. 49, n.° 95), qu'indépendamment des deux points d'intersection *accessibles*, réels ou imaginaires, deux cercles tracés sur un même plan en ont encore deux autres, toujours imaginaires, qui en sont *infiniment distans*.

être distribués les m^2 ou $(p+q)^2$ points d'intersection des deux proposées ; savoir, $p(p+q)$ sur la première et $q(p+q)$ sur l'autre.

Réciproquement, si la nature et la situation respective des deux proposées sont telles que, parmi leurs $(p+q)^2$ points d'intersection, il s'en trouve $p(p+q)$ qui appartiennent à une seule et même ligne du $p^{ième}$ ordre ; ces points seront de nature à être obtenus par la combinaison de l'une quelconque des équations (1) et (2) avec une équation *rationnelle* du $p^{ième}$ degré ; puis donc que *tous* les points d'intersection s'obtiennent par la combinaison de la même équation avec l'équation (3), il faudra que, par une détermination convenable de la constante arbitraire λ, le premier membre de cette dernière acquiert un facteur *rationnel* P du $p^{ième}$ degré : ce premier membre devra donc, pour cette même valeur, avoir un autre facteur *rationnel* Q du q^{ieme} degré ; cette équation sera donc alors de la forme de l'équation (4) ; d'où il suit que les $q(p+q)$ points d'intersection restants se trouveront tous appartenir à une seule et même ligne du q^{ieme} ordre. On a donc ce théorème général :

THÉORÈME I. Si, parmi les $(p+q)^2$ *points d'intersection de deux lignes du* $(p+q)^{ieme}$ *ordre, situées dans un même plan, il s'en trouve* $p(p+q)$ *appartenant tous à une seule et même ligne du* p^{ieme} *ordre ; les* $q(p+q)$ *points d'intersection restans appartiendront tous à une seule et même ligne du* q^{ieme} *ordre* (*).

THÉORÈME I. Si parmi les $(p+q)^2$ *tangentes communes à deux lignes du* $(p+q)^{ieme}$ *ordre, situées dans un même plan, il s'en trouve* $p(p+q)$ *touchant toutes une seule et même ligne du* p^{ieme} *ordre ; les* $q(p+q)$ *tangentes communes restantes toucheront toutes une seule et même ligne du* q^{ieme} *ordre.*

(*) Si l'on suppose que la ligne du p^{ieme} ordre se réduit au système de p droites, dont chacune contient $p+q$ intersection, on obtiendra le premier des théorèmes dont la démonstration a été demandée à la page 35 du présent volume ; et qui n'est, comme l'on voit, qu'un cas très-particulier de celui-ci.

Remarque. Dans l'application de ce théorème, il ne faudra pas perdre de vue que chaque contact du $(n-1)^{ieme}$ ordre ou de n points, entre deux courbes, doit compter pour n points communs, tous situés sur la tangente commune en ce point.

Remarque. Dans l'application de ce théorème, il ne faudra pas perdre de vue que chaque tangente commune à deux courbes en un même point où elles ont entre elles un contact du $(n-1)^{ieme}$ ordre ou de n points, doit compter pour n tangentes communes, passant toutes par ce point.

La vérité de ce théorème dépendant uniquement du degré commun des deux équations, et non du nombre et de la nature des lignes que chacune d'elles exprime, il ne cessera pas d'être vrai lorsqu'elles exprimeront, l'une et l'autre des systèmes de $p+q$ droites. On a donc ce premier corollaire :

Corollaire I. Deux systèmes de $p+q$ droites existant dans un même plan ; si, parmi les $(p+q)^2$ points d'intersection des droites de l'un des systèmes avec celles de l'autre système, il s'en trouve $p(p+q)$ qui appartiennent toutes à une seule et même ligne du p^{ieme} ordre ; les $q(p+q)$ points d'intersection restans appartiendront tous à une seule et même ligne du q^{ieme} ordre.

Corollaire I. Deux systèmes de $p+q$ points existans dans un même plan ; si, parmi les $(p+q)^2$ droites qui joignent les points de l'un des systèmes à ceux de l'autre système, il s'en trouve $p(p+q)$ qui touchent toutes une seule et même ligne du p^{ieme} ordre ; les $q(p+q)$ droites restantes toucheront toutes une seule et même ligne du q^{ieme} ordre.

En supposant $p+q=m$, et prenant tour-à-tour p et q égaux à deux, ce corollaire prendra cette autre forme :

Corollaire II. Deux systèmes de m droites existant dans un même plan ; si, parmi les m^2 points d'intersection des droites de l'un des systèmes avec celles

Corollaire II. Deux systèmes de m points existant dans un même plan ; si parmi les m^2 droites qui joignent les points de l'un des systèmes à ceux de l'autre de l'autre système, il s'en trouve $2m$ qui appartiennent tous à une seule et même ligne du second ordre ; les $m(m-2)$ points d'intersection restans appartiendront tous à une seule et même ligne du $(m-2)^{ieme}$ ordre et réciproquement.

système, il s'en trouve $2m$ qui touchent toutes une seule et même ligne du second ordre ; les $m(m-2)$ droites restantes toucheront toutes une seule et même ligne du $(m-2)^{ieme}$ ordre et réciproquement.

Soit un polygone de $2m$ côtés inscriptible à une ligne quelconque du second ordre ; nous pourrons considérer ses côtés de rangs pairs et ceux de rangs impairs comme deux systèmes de m droites ayant $2m$ points d'intersection sur une seule et même ligne du second ordre. Le dernier corollaire donnera donc celui-ci :

Corollaire III. Dans tout polygone de $2m$ côtés inscriptible à une ligne du second ordre, les $m(m-2)$ points d'intersection des directions des côtés de rangs pairs avec les directions des côtés de rangs impairs non consécutifs appartiennent toutes à une seule et même ligne du $(m-2)^{ieme}$ ordre et réciproquement.

Corollaire III. Dans tout polygone de $2m$ sommets circonscriptible à une ligne du second ordre, les $m(m-2)$ droites qui joignent les sommets de rangs pairs avec les sommets de rangs impairs qui ne leur sont pas consécutifs touchent toutes une seule et même ligne du $(m-2)^{ieme}$ ordre et réciproquement.

Dans le cas particulier où l'on supposera $m=3$, ce corollaire se changera dans le suivant :

Corollaire IV. Dans tout hexagone inscriptible à une ligne du second ordre, les points de concours des directions des côtés opposés appartiennent tous trois à une même droite et réciproquement.

Corollaire IV. Dans tout hexagone circonscriptible à une ligne du second ordre, les droites qui joignent les sommets opposés concourent toutes trois en un même point et réciproquement.

Voilà donc les deux théorèmes de Pascal (*) et de Brianchon,

(*) C'est pour nous conformer à l'opinion la plus répandue que nous atsi féconds en belles et importantes conséquences (*), qui se trouvent ainsi établis sans aucune construction ni calcul, et déduits de considérations analytiques d'une extrême simplicité ; car remarquons bien qu'ils découlent, sans aucun intermédiaire, de notre théorème fondamental (**).

---

tribuons ici à Pascal le premier de ces deux theorèmes. Tout ce qu'on sait de bien positif sur ce point, et c'est le P. Mersenne qui nous l'apprend dans son *Harmonie universelle*, c'est que Pascal en avait déduit 400 corollaires, formant un traité de sections coniques plus complet que celui d'Appollonius; traité que Descartes a eu entre les mains, mais qui n'a jamais été rendu public.

Dans son *Histoire des mathématiques*, Montucla reproche assez durement à Descartes d'avoir mieux aimé attribuer ce traité à Pascal pere ou à Desargues que de le croire d'un jeune homme de seize ans. Mais voici comment s'exprime Descartes, dans l'une de ses nombreuses lettres au P. Mersenne : « J'ai aussi reçu, dit-il, l'essai touchant les coniques du fil de M. Pascal; et, avant d'en avoir lu la moitié, j'ai jugé qu'il avait appris de » M. Desargues ; ce qui m'a été confirmé incontinent après, par la confession qu'il en fait lui-même ». Ne serait-il donc pas possible que le théorème fût véritablement de Desargues qui aurait proposé à son élève d'en déduire, par manière d'exercice, un traité de sections coniques, dont il lui aurait même jalonné les principales divisions, et que le jeune homme aurait écrit ensuite sous les yeux et avec l'assistance de son père? Ce qui semblerait donner quelque poids à cette conjecture, c'est que, comme l'a fait voir dernièrement M. Sturm (pag. 188), le théorème relatif à l'hexagone inscrit se déduit presque immédiatement d'un autre théorème que personne n'a jamais songé à contester à Desargues. A la vérité, le fait ainsi envisagé perdrait un peu de son merveilleux ; mais il n'en deviendrait par là même que plus vraisemblable.

(*) On peut consulter, sur les conséquences les plus immédiates de ces deux théorèmes, la page 39 de notre XIV.e volume et la page 37 de celui-ci.

(**) Si, dans la crainte de rendre les élémens moins *euclidiens*, on persistait à en repousser la démonstration de ces deux théorèmes que nous avons indiquée dernièrement (pag. 143) ; ne pourrait-on pas du moins introduire celle-ci dans les élémens de *Géométrie analytique*, dont les anciens ne nous ont pas laissé de modèle ?

Si, dans le même *corollaire III*, on suppose $m=4$, on en déduira celui-ci :

Corollaire V. Dans tout octogone inscriptible à une ligne du second ordre, les huit points où les côtés de rangs pairs concourent avec les côtés de rangs impairs qui ne leur sont pas consécutifs appartiennent tous à une autre ligne du second ordre et réciproquement.

Corollaire V. Dans tout octogone circonscriptible à une ligne du second ordre, les huit droites qui joignent les sommets de rangs pairs avec les sommets de rangs impairs qui ne leur sont pas consécutifs touchent toutes une autre ligne du second ordre et réciproquement.

En d'autres termes :

Corollaire VI. Si un octogone étoilé, non régulier, est inscriptible à une ligne du second ordre, l'octogone non étoilé qui aura les mêmes côtés sera aussi inscriptible à une ligne du second ordre et réciproquement.

Corollaire VI. Si un octogone étoilé, non régulier, est circonscriptible à une ligne du second ordre, l'octogone non étoilé qui aura les mêmes sommets sera aussi circonscriptible à une ligne du second ordre et réciproquement.

Si, dans le théorème général, on remplace $p+q$ par m et qu'on fasse tour-à-tour p et q égaux à deux, on en déduira ce corollaire :

Corollaire VII. Si, parmi les m^2 intersections de deux lignes du m^{ieme} ordre, situées dans un même plan, il s'en trouve $2m$ qui appartiennent à une ligne du deuxième ordre, les $m(m-2)$ intersections restantes appartiendront toutes à une seule et même ligne du $(m-2)^{ieme}$ ordre et réciproquement.

Corollaire VII. Si, parmi les m^2 tangentes communes à deux lignes du m^{ieme} ordre, situées dans un même plan, il s'en trouve $2m$ qui touchent une ligne du deuxième ordre, les $m(m-2)$ tangentes communes restantes toucheront toutes une seule et même ligne du $(m-2)^{ieme}$ ordre et réciproquement.

Soit menée à une ligne du m^{ieme} ordre une sécante arbitraire, puis des tangentes par les m points où cette sécante la coupera ;

nous pourrons considérer l'ensemble de ces tangentes comme une ligne unique du m^{ieme} ordre ayant avec la première $2m$ points d'intersection se confondant deux à deux dans les m points de contact, et situées conséquemment sur deux droites qui se confondent. Mais deux droites qui se confondent forment un système du second ordre; et par conséquent le précédent corollaire donne celui-ci :

Corollaire VIII. Les m tangentes menées à une ligne du m^{ieme} ordre, par ses points d'intersection avec une transversale rectiligne quelconque, coupe de nouveau la courbe en $m(m-2)$ points seulement, lesquels appartiennent tous à une seule et même ligne du $(m-2)^{ieme}$ ordre (*).

Corollaire VIII. Par les m points ou des tangentes issues d'un même point touchent une ligne du m^{ieme} ordre, on ne peut lui mener que $m(m-2)$ nouvelles tangentes seulement, lesquelles touchent toutes une seule et même ligne du $(m-2)^{ieme}$ ordre (*).

§. II.

Considérons présentement trois lignes du m^{ieme} ordre, données sur un même plan, par les équations *rationnelles* en x et y

$$M=0\,, \quad (1) \qquad M'=0\,, \quad (2) \qquad M''=0\,; \quad (3)$$

elles auront, deux à deux, m^2 points d'intersection. Soit encore, comme ci-dessus, $m=p+q$, et supposons que ces courbes passent toutes trois par les mêmes $p(p+q)$ points, appartenant tous à une seule et même ligne du p^{ieme} ordre, donnée par l'équation *rationnelle*, en x et y,

$$P=0\,;$$

(*) A la page 315 du précédent volume, M. Vallès a démontré que *les points de contact de toutes les tangentes menées à une ligne du* m^{ieme} *ordre, par un même point de son plan, appartiennent tous à une seule et même ligne du* $(m-1)^{ieme}$ *ordre.* Il en résulte que *les tangentes menées à une ligne du* m^{ieme} *ordre, par les points où elle est coupée par une transversale rectiligne, touchent toutes une seule et même ligne du* $(m-1)^{ieme}$ *ordre.*

d'après ce qui précède (*théorème I*), les points d'intersection restans de ces courbes, deux à deux, au nombre de $q(p+q)$, pour chaque système de deux courbes, seront sur trois lignes du q^{ieme} ordre dont nous supposons les équations

$$Q=0\ ,\quad (4)\qquad Q'=0\ ,\quad (5)\qquad Q''=2\ ;\quad (6)$$

chacune de ces dernières se rapportant aux deux qui ne lui correspondent pas dans la première série. On devra donc avoir par une détermination convenable de λ et λ'

$$\lambda M+M''=PQ'\ ,\qquad \lambda' M'+M''=PQ\ ;$$

d'où

$$\lambda M-\lambda' M'=P(Q'-Q)$$

ou bien

$$-\frac{\lambda}{\lambda'}M+M'=P\,\frac{Q-Q'}{\lambda'}\ ,$$

mais, d'après ce qui a été démontré (§. I), pour une détermination convenable de μ, on doit avoir

$$\mu M+M'=PQ''\ ;$$

puis donc qu'en prenant $\mu=-\dfrac{\lambda}{\lambda'}$, on a

$$\mu M+M'=P\,\frac{Q-Q'}{\lambda'}\ ,$$

il s'en suit qu'on doit avoir

$$\frac{Q-Q'}{\lambda'}=Q''\ ,$$

c'est-à-dire

$$\lambda' Q''+Q'=Q\ ;$$

ce qui prouve que chacune des équations (4), (5), (6) est comportée par les deux autres, et que conséquemment les trois courbes qu'elles expriment se coupent exactement aux mêmes q^2 points. On a donc ce théorème général :

THÉORÈME II. Si trois lignes du $(p+q)^{\text{ieme}}$ *ordre, tracées sur un même plan, passent par* $p(p+q)$ *points appartenant tous à une seule et même ligne du* p^{ieme} *ordre; les* $q(p+q)$ *points d'intersection restans de ces courbes, prises deux à deux, seront sur trois lignes du* q^{ieme} *ordre, se coupant tous aux mêmes* q^2 *points* (*).

THÉORÈME II. Si trois lignes du $(p+q)^{\text{ieme}}$ *ordre, tracées sur un même plan, ont* $p(p+q)$ *tangentes communes, touchant toutes une seule et même ligne du* p^{ieme} *ordre; les* $q(p+q)$ *tangentes communes restantes de ces courbes, prises deux à deux, toucheront trois lignes du* q^{ieme} *ordre, ayant toutes les mêmes* q^2 *tangentes communes.*

Parmi les corollaires, en nombre infini, qui résultent de ce théorème, bornons-nous à signaler les plus simples. Si d'abord nous supposons $p=q=1$. Nous aurons celui-ci :

Corollaire I. Si trois lignes du second ordre, comprises dans un même plan et circonscrites à une même droite, sont deux à deux circonscrites à trois autres droites; ces trois dernières concourront en un même point.

Corollaire I. Si trois lignes du second ordre, comprises dans un même plan et inscrites à un même angle, sont deux à deux inscrites à trois autres angles; les sommets de ces trois derniers appartiendront à une même droite.

Observant ensuite que les deux côtés d'un même angle forment une ligne du second ordre, ce corollaire conduira au suivant :

Corollaire II. Trois angles compris dans un même plan étant circonscrits à une même droite, les trois droites auxquelles ces mêmes angles, pris deux à deux,

Corollaire II. Trois droites comprises dans un même plan étant inscrites à un même angle, les trois angles auxquels ces mêmes droites, prises deux à deux, se-

(*) En supposant que les $p(p+q)$ premiers points sont situés $p+q$ à $p+q$ sur p droites, on aura le deuxième théorème proposé à démontrer à la page 36 du présent volume, lequel n'est, comme l'on voit, qu'un cas très-particulier de celui-ci.

seront circonscrits concourront en un même point (*).

ront inscrites auront leurs sommets sur une même droite (*).

En remarquant que les tangentes communes à deux courbes en sont aussi des cordes communes, le corollaire I donnera aussi le suivant :

Corollaire III. Si trois lignes du second ordre qui se touchent au même point se coupent deux à deux, leurs trois cordes communes concourront en un même point.

Corollaire III. Trois lignes du second ordre se touchant au même point, les sommets des angles qu'on leur circonscrira deux à deux appartiendront tous trois à une même droite.

Dans tout hexagone inscrit à une ligne du second ordre, les côtés de rangs pairs, les côtés de rangs impairs et les diagonales qui joignent les sommets opposés, peuvent être considérés comme trois lignes du troisième ordre ayant six points communs, d'où il suit, par le théorème général, qu'on a encore ce corollaire.

Corollaire IV. Dans tout hexagone inscrit à une ligne du second ordre, les diagonales qui joignent les sommets opposés sont coupés respectivement soit par les côtés de rangs pairs soit par ceux de rang impair qui ne leur sont pas adjacens en trois points qui appartiennent à une même droite; et les droites auxquelles appartiennent ces deux systèmes de trois points concourent sur la droite qui contient les trois points de concours des directions des côtés opposés de l'hexagone.

Corollaire IV. Dans tout hexagone circonscrit à une ligne du second ordre, les droites qui joignent respectivement les points de concours des directions des côtés opposés soit avec les sommets de rangs pairs soit avec les sommets de rangs impairs qui n'appartiennent pas à ces côtés concourent toutes trois en un même point; et les points où concourent ces deux systèmes de trois droites sont en ligne droite avec celui où concourent les trois droites qui joignent les sommets opposés de l'hexagone.

(*) On ne démontre d'ordinaire cette proposition que pour le cas particulier où les trois sommets sont en ligne droite.

(*) On ne démontre d'ordinaire ce théorème que pour le cas particulier où les trois droites concourent en un même point.

SECTION DEUXIÈME.

Propriétés générales des surfaces courbes.

Soit une figure à trois dimensions, composée de tant de points, droites, plans courbes planes et à double courbure et surfaces courbes qu'on voudra. Concevons qu'ayant décrit arbitrairement une surface quelconque du second ordre, on construise, dans l'espace, une autre figure dont tous les points, toutes les droites et tous les plans soient les pôles, polaires conjuguées et plans polaires des plans, droites et points de la première, par rapport à cette surface du second ordre, considérée comme *directrice* ; les deux figures ainsi tracées seront dites *polaires réciproques* l'une de l'autre ; attendu que la première pourra être déduite de la seconde comme celle-ci est supposée l'être de l'autre. Or, d'après les propriétés connues des pôles, polaires conjuguées et plans polaires, voici les relations principales qui se trouveront exister entre ces deux figures.

1.° Autant il y aura dans l'une de systèmes de points situés dans un même plan, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de plans concourant en un même point.

1.° Autant il y aura dans l'une de systèmes de plans concourant en un même point, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de points situés dans un même plan.

2.° Autant il y aura dans l'une de systèmes de points situés en ligne droite, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de plans se coupant suivant une même droite.

2.° Autant il y aura dans l'une de systèmes de plans se coupant suivant une même droite, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de points situés en ligne droite.

3.° Autant il y aura dans l'une de systèmes de droites situées dans un même plan, autant on ren-

3.° Autant il y aura dans l'une de systèmes de droites concourant en un même point, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de droites concourant en un même point.

4.° Autant il y aura dans l'une de systèmes de points situés sur une même courbe plane, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de plans tangens à une même surface conique.

5.° Autant il y aura dans l'une de systèmes de points situés sur une même courbe à double courbure, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de plans tangens à une même surface développable.

6.° A des points d'intersection d'une courbe plane avec une sécante rectiligne, dans l'une des figures, répondront dans l'autre un égal nombre de plans tangens à une même surface conique, tous issus d'une même droite passant par son sommet.

7.° A des points d'intersection d'une courbe à double courbure avec un plan sécant, dans l'une des figures, répondront dans l'autre un égal nombre de plans tangens à une même surface développable, tous issus d'un même point.

contrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de droites situées dans un même plan.

4.° Autant il y aura dans l'une de systèmes de plans tangens à une même surface conique, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de points situés sur une même courbe plane.

5.° Autant il y aura dans l'une de systèmes de plans tangens à une même surface développable, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de points situés sur une même courbe à double courbure.

6.° A des plans tangens à une même surface conique, tous issus d'une même droite passant par son sommet, dans l'une des figures, répondront dans l'autre un égal nombre de points d'intersection d'une courbe plane avec une sécante rectiligne.

7.° A des plans tangens à une surface développable, tous issus d'un même point, dans l'une des figures, répondront dans l'autre un égal nombre de points d'intersection d'une même courbe à double courbure avec un plan sécant.

8.° Autant il y aura, dans l'une des figures, de points communs à deux ou à un plus grand nombre de courbes planes, situées dans un même plan, autant on rencontrera dans l'autre de plans tangens à deux ou à un plus grand nombre de surfaces coniques de même sommet.

9.° Aulant il y aura, dans l'une des figures, de tangentes communes à deux ou un plus grand nombre de courbes planes, comprises dans un même plan, autant on rencontrera dans l'autre d'intersections de deux ou d'un plus grand nombre de surfaces coniques de même sommet.

10.° Autant il y aura, dans l'une des figures, de systèmes de points situés sur une même courbe à double courbure, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de plans tangens à une même surface développable.

11.° A toute surface développable, circonscrite à la fois à deux ou à un plus grand nombre de courbes à double courbure, dans l'une des figures, répondra dans l'autre une courbe à double courbure inscrite à la fois à

8.° Autant il y aura, dans l'une des figures, de plans tangens communs à deux ou à un plus grand nombre de surfaces coniques de même sommet, autant on rencontrera dans l'autre de points communs à deux ou à un plus grand nombre de courbes planes, comprises dans un même plan.

9.° Autant il y aura, dans l'une des figures, d'intersections de deux ou d'un plus grand nombre de surfaces coniques de même sommet, autant on rencontrera dans l'autre de tangentes communes à deux ou à un plus grand nombre de courbes planes, comprises dans un même plan.

10.° Autant il y aura, dans l'une des figures, de systèmes de plans tangens à une même surface développable, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de points situés sur une même courbe à double courbure.

11.° A toute courbe à double courbure, inscrite à la fois à deux ou à un plus grand nombre de surfaces développables, dans l'une des figures, répondra dans l'autre une surface développable circonscrite à la fois à un égal nomun égal nombre de surfaces développables.

12.° Autant on rencontrera, dans l'une des figures, de points communs à deux ou à un plus grand nombre de courbes à double courbure, autant il y aura dans l'autre de plans tangens communs à un égal nombre de surfaces développables.

13.° Autant il y aura dans l'une de systèmes de points situés sur une même surface courbe, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de plans tangens à une autre surface de même ordre.

14.° A des courbes planes, intersection d'une même surface courbe avec un plan sécant, dans l'une des figures, répondront dans l'autre un égal nombre de surfaces coniques de même sommet, circonscrites à une autre surface de même ordre.

15.° A des points où une même surface courbe est percée par une droite, dans l'une des figures, répondront dans l'autre un égal nombre de plans tangens à une surface de même ordre, se coupant suivant une même droite.

bre de courbes à double courbure.

12.° Autant on rencontrera, dans l'une des figures, de plans tangens communs à deux ou à un plus grand nombre de surfaces développables, autant il y aura dans l'autre de points communs à un égal nombre de courbes à double courbure.

13.° Autant il y aura dans l'une de systèmes de plans tangens à une même surface courbe, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de points situés sur une autre surface de même ordre.

14.° A des surfaces coniques de même sommet circonscrites à une même surface courbe, dans l'une des figures, répondront dans l'autre un égal nombre de courbes planes, intersections d'un plan sécant avec une autre surface de même ordre.

15.° A des plans tangens à une même surface courbe, se coupant suivant une même droite, dans l'une des figures, répondront dans l'autre un égal nombre de points où une surface de même ordre est percée par une même droite.

16.° Autant on rencontrera, dans l'une des figures, de courbes à double courbure, intersections de deux ou d'un plus grand nombre de surfaces courbes, autant il y aura dans l'autre de surfaces développables circonscrites à un égal nombre de surfaces de même ordre.

16.° Autant on rencontrera, dans l'une des figures, de surfaces développables circonscrites à deux ou à un plus grand nombre de surfaces courbes, autant il y aura dans l'autre de courbes à double courbure, intersections d'un égal nombre de surfaces de même ordre.

17.° Enfin, autant il y aura, dans l'une des figures, de points communs à trois ou à un plus grand nombre de surfaces courbes, autant on rencontrera dans l'autre de plans tangens communs à un égal nombre de surfaces de même ordre.

17.° Enfin, autant il y aura, dans l'une des figures, de plans tangens communs à trois ou à un plus grand nombre de surfaces courbes, autant on rencontrera dans l'autre de points communs à un égal nombre de surfaces de même ordre.

Il importe extrêmement de se rendre ces diverses relations bien familières, parce qu'en même temps qu'elles peuvent faire découvrir un grand nombre de théorèmes elles en rendent toute démonstration superflue (*). En les appliquant, par exemple, aux vingt-six propositions établies dans la section première, on en déduira vingt-six autres propositions de géométrie à trois dimensions, relatives à des surfaces coniques de même sommet et à des plans et droites passant par leur sommet commun. En particulier, les deux corollaires V du théorème I donneront les deux propositions suivantes :

Dans tout angle hexaèdre ins-

Dans tout angle hexaèdre cir-

(*) Ce sont aussi ces analogies qu'il faudrait consulter, si l'on voulait reconstruire la langue de la géométrie sur un plan plus symétrique ; elles en deviendraient aussi par là beaucoup plus faciles à saisir.

criptible à une surface conique du second ordre, les droites suivant lesquelles concourent les directions des faces opposées, appartiennent toutes trois à un même plan, et réciproquement.

conscriptible à une surface conique du second ordre, les plans qui contiennent les arêtes opposées se coupent tous trois suivant une même droite, et réciproquement.

Il en serait exactement de même de toutes les autres ; mais, comme ces sortes de traductions sont tout-à-fait sans difficulté, nous ne nous y arrêterons pas. Nous observerons seulement que si, après les avoir toutes exécutées, on imagine le sommet commun des cônes transporté au centre d'une sphère, on verra incontinent que des théorèmes analogues ont lieu pour des figures tracées sur une surface sphérique, et qu'ils s'y correspondent deux à deux comme sur un plan, comme il doit résulter d'ailleurs de la propriété connue des triangles sphériques supplémentaires l'un de l'autre, pourvu qu'on y remplace les lignes droites par des arcs de grands cercles.

Dans tout ce qui va suivre, nous réputerons également comme surface d'un certain ordre, soit une surface effective de cet ordre, soit un système équivalent de surfaces d'ordres inférieurs, c'est-à-dire, de surfaces données par une équation unique, d'un degré égal à l'ordre proposé. Ainsi, par exemple, le système de deux surfaces des p^{ieme} et q^{ieme} ordres sera réputé une surface unique du $(p+q)^{ieme}$ ordre, pareillement, le système de m plans sera réputé une surface unique du m^{ieme} ordre.

Nous convenons aussi de comprendre, parmi les intersections de deux ou de trois surfaces, leurs intersections *idéales*, aussi bien que leurs intersections *réelles*, leurs intersections *infiniment distantes*, aussi bien que leurs intersections *accessibles* ; de sorte que, dans notre langage, le nom-

Nous convenons aussi de comprendre, parmi les plans tangens à deux ou à trois surfaces courbes, leurs plans tangens *idéals*, aussi bien que leurs plans tangens *réels*, leurs plans tangens *infiniment distans* aussi bien que leurs plans tangens *accessibles* ; de sorte que, dans notre langage, tre des points d'intersection de trois surfaces sera constamment égal au produit des degrés de leurs équations.

le nombre des plans tangens communs à trois surfaces sera constamment égal au produit des degrés de leurs équations.

Ainsi que nous l'avons pratiqué dans la section première, à mesure que, par quelque moyen que ce soit, nous serons parvenus à établir un théorème, nous écrivons à sa droite le théorème qui s'en déduit par la théorie des polaires réciproques, sans nous arrêter à le démontrer; bien certains que l'un ne saurait être vrai sans que l'autre le soit également.

§. I.

Ces choses ainsi entendues, considérons dans l'espace deux surfaces du $m^{\text{ième}}$ ordre, rapportées aux mêmes axes quelconques, et ayant respectivement pour équations *rationnelles* en x, y, z,

$$M=0\,, \quad (1) \qquad\qquad M'=0\,; \quad (2)$$

elles se couperont suivant un certain nombre de lignes, droites ou courbes, planes ou à double courbure, données par ces mêmes équations, considérées comme appartenant à un même problème indéterminé à trois inconnues.

Soit représentée par λ une constante indéterminée et soit posée l'équation

$$\lambda M+M'=0\,; \qquad (3)$$

chacune de nos trois équations sera évidemment comportée par les deux autres, quel que soit λ; de sorte que, de quelque manière qu'on les combine deux à deux, elles établiront constamment les mêmes relations entre x, y, z; mais, à cause de l'indétermination de λ, la dernière appartient à une infinité de surfaces du $m^{\text{ième}}$ ordre; donc ces surfaces ont la propriété commune de couper l'une quelconque des deux proposées précisément suivant toutes les lignes et les seules lignes qu'y détermine l'autre.

Réciproquement, toute surface qui coupera l'une quelconque des deux proposées précisément suivant toutes les lignes et suivant les seules lignes qu'y détermine l'autre, devra être une surface du m^{ieme} ordre dont l'équation soit comportée par les équations (1) et (2) ; cette équation devra donc être un cas particulier de l'équation (3), et de nature à pouvoir en être déduite par une détermination convenable de la constante arbitraire λ.

Soit $m=p+q$, p et q étant deux nombres entiers positifs, et supposons que, pour une certaine valeur de la constante λ, l'équation (3) prenne la forme

$$PQ=0\,, \qquad (4)$$

P et Q étant deux facteurs rationnels des p^{ieme} et q^{ieme} degrés, il s'ensuivra que, pour cette valeur de λ, l'équation (3) n'exprime plus une surface unique, mais le système de deux surfaces des p^{ieme} et q^{ieme} ordres, sur lesquelles doivent conséquemment se trouver distribuées les lignes d'intersections des deux proposées.

Réciproquement, si la nature et la situation respective des deux proposées sont telles que, parmi leurs lignes d'intersection, il s'en trouve qui soient toutes situées sur une seule et même surface du p^{ieme} ordre, ces lignes seront de nature à être déterminées par la combinaison de l'une quelconque des équations (1) et (2) avec une équation *rationnelle* du p^{ieme} degré ; puis donc que *toutes* les lignes d'intersection s'obtiennent par la combinaison de la même équation avec l'équation (3), il s'ensuit que le premier membre de cette dernière doit, par une détermination convenable de la constante arbitraire λ, acquérir un facteur *rationnel* P du p^{ieme} degré ; ce premier membre devra donc, pour cette même valeur, avoir un autre facteur *rationnel* Q du q^{ieme} degré. Cette équation sera donc alors de la forme de l'équation (4) ; en sorte que les lignes d'intersection restantes se trouveront toutes appartenir à une seule et même surface du q^{ieme} ordre. On a donc ce théorème général :

THÉORÈME III. Si, parmi les lignes droites ou courbes, planes ou à double courbure suivant lesquelles se coupent, dans l'espace, deux surfaces du $(p+q)^{ieme}$ *ordre, il s'en trouve une partie qui soient toutes situées sur une seule et même surface du* p^{ieme} *ordre; les intersections restantes seront toutes situées sur une seule et même surface du* q^{ieme} *ordre.*

THÉORÈME III. Si, parmi les surfaces planes, coniques ou développables circonscrites à deux surfaces du $(p+q)^{ieme}$ *ordre, il s'en trouve une partie qui soient toutes circonscrites à une seule et même surface du* p^{ieme} *ordre; les surfaces circonscrites restantes seront toutes circonscrites à une seule et même surface du* q^{ieme} *ordre.*

La vérité du théorème dépendant uniquement du degré commun des deux équations et non du nombre et la nature des surfaces que chacune d'elles exprime, il ne cessera pas d'être vrai lorsqu'elles exprimeront, l'une et l'autre, des systèmes de $p+q$ plans. On a donc ce premier corollaire :

Corollaire I. Deux systèmes de $p+q$ plans existant dans l'espace, si, parmi les $(p+q)^2$ droites suivant lesquelles les plans de l'un des systèmes coupent les plans de l'autre système, il s'en trouve $p(p+q)$ qui appartiennent à une seule et même surface réglée du p^{ieme} ordre; les $q(p+q)$ droites restantes appartiendront à une seule et même surface réglée du q^{ieme} ordre.

Corollaire I. Deux systèmes de $p+q$ points existant dans l'espace, si, parmi les $(p+q)^2$ droites qui joignent les points de l'un de ces systèmes à ceux de l'autre système, il s'en trouve $p(p+q)$ qui appartiennent à une seule et même surface réglée du p^{ieme} ordre, les $q(p+q)$ droites restantes appartiendront à une seule et même surface réglée du q^{ieme} ordre.

On sait que, par chacun des points d'une surface réglée du second ordre on peut tracer deux droites qui y soient entièrement situées ; que par conséquent une telle surface peut, de deux manières différentes, être engendrée par le mouvement d'une droite, et que chacune des droites de l'une des générations est coupée par toutes les droites de l'autre génération ; d'où il suit évidemment que l'on peut toujours, sur une telle surface, tracer un polygone rectiligne gauche de $2m$ côtés dont les côtés soient alternativement des portions de droites de l'une et de l'autre générations.

Si l'on considère ensuite les plans des angles de rangs pairs du polygone et les plans de ses angles de rangs impairs comme deux systèmes de m plans, les plans de l'un des systèmes couperont ceux de l'autre système suivant m^2 droites, et $2m$ de ces droites seront les côtés même du polygone gauche dont il s'agit, et appartiendront ainsi à une même surface réglée du second ordre. Supposant donc, dans le précédent corollaire, $p+q=m$, et alternativement p et q égaux à *deux*, on reconnaîtra que les $m(m-2)$ intersections restantes doivent appartenir à une seule et même surface réglée du $(m-2)^{ieme}$ ordre. On a donc cet autre corollaire :

Corollaire II. Dans tout polygone rectiligne gauche de $2m$ côtés, exactement applicable sur une surface réglée du second ordre, les plans des angles de rangs pairs et ceux des angles de rangs impairs qui ne leur sont pas consécutifs se coupent suivant $m(m-2)$ droites qui appartiennent toutes à une seule et même surface réglée du $(m-2)^{ieme}$ ordre, et réciproquement.

Corollaire II. Dans tout polygone rectiligne gauche de $2m$ côtés, exactement applicable sur une surface réglée du second ordre, les droites qui joignent les sommets de rangs pairs aux sommets de rangs impairs non consécutifs, au nombre de $m(m-2)$, appartiennent toutes à une seule et même surface réglée du $(m-2)^{ieme}$ ordre, et réciproquement.

Dans le cas particulier où l'on supposera $m=3$, ce corollaire se changera dans le suivant :

Corollaire III. Dans tout hexagone rectiligne gauche exacte-

Corollaire III. Dans tout hexagone rectiligne gauche exactement applicable à une surface réglée du second ordre, les droites suivant lesquelles se coupent les plans des angles opposés, appartiennent toutes trois à un même plan, et réciproquement (*).

ment applicable à une surface réglée du second ordre, les droites qui joignent les sommets opposés, concourent toutes trois en un même point, et réciproquement (*).

Si, dans le même corollaire, on suppose $m=4$, on obtiendra le suivant :

Corollaire IV. Dans tout octogone rectiligne gauche, exactement applicable sur une surface réglée du second ordre, les huit droites suivant lesquelles les plans des angles de rangs pairs coupent les plans des angles de rangs impairs qui ne leur sont pas consécutifs, appartiennent toutes à une autre surface réglée du second ordre, et réciproquement.

Corollaire IV. Dans tout octogone rectiligne gauche, exactement applicable sur une surface réglée du second ordre, les huit droites qui joignent les sommets de rangs pairs aux sommets de rangs impairs qui ne leur sont pas consécutifs, appartiennent toutes à une autre surface réglée du second ordre, et réciproquement.

Si, dans le théorème général, on suppose $p=q=1$, on aura cet autre corollaire :

Corollaire V. Si deux surfaces du second ordre se coupent suivant deux courbes dont l'une soit une courbe plane, l'autre sera aussi nécessairement une courbe plane.

Corollaire V. Si deux surfaces du second ordre sont inscriptibles à deux surfaces développables dont l'une soit une surface conique, l'autre sera aussi nécessairement une surface conique.

En considérant que deux surfaces courbes qui se touchent en un

(*) On reconnaît ici les deux élégans théorèmes de M Dandelin, démontrés tom. XV (pag. 393) et tom. XVI (pag. 229). Ces théorèmes ne sont, comme l'on voit, que des cas très-particuliers de nos corollaires II.

point sont censée avoir, en ce point, une section plane, située dans le plan tangent au même point, on conclura encore de là ce nouveau corollaire :

Corollaire VI. Si deux surfaces du second ordre qui se coupent se touchent en outre en un point, elles se couperont nécessairement suivant une courbe plane.

Corollaire VI. Toute surface développable circonscrite à deux surfaces du second ordre, qui se touchent est nécessairement une surface conique.

Si deux surfaces du second ordre se touchent suivant une ligne courbe, cette ligne pourra être considérée comme une commune section des deux surfaces ; mais on pourra aussi, d'après ce qui a été observé plus haut, considérer comme tel un quelconque des points de leur ligne de contact ; et comme cette dernière intersection est plane, l'autre devra l'être également. On a donc cet autre corollaire :

Corollaire VII. Deux surfaces du second ordre inscrite et circonscrite l'une à l'autre se touchent suivant une courbe plane.

Corollaire VII. Deux surfaces du second ordre inscrite et circonscrite l'une à l'autre sont inscriptibles à une même surface conique.

Si l'on suppose que l'une des deux surfaces du second ordre soit elle-même une surface conique, on aura cette proposition connue :

Corollaire VIII. Toute surface conique circonscrite à une surface du second ordre, la touche suivant une courbe plane.

Corollaire VIII. Toute surface développable qui touche une surface du second ordre suivant une courbe plane, est une surface conique.

Le raisonnement qui nous a conduit au corollaire VII, appliqué au théorème général, nous conduira à cet autre corollaire, dont celui-là n'est qu'un cas particulier :

Corollaire IX. Si deux surfa-

Corollaire IX. Si deux surfaces du $m^{ième}$ ordre sont inscrites et circonscrites l'une à l'autre, leurs lignes de contact appartiendront toutes à une seule et même surface du $(m-1)^{ième}$ ordre au plus.

ces du $m^{ième}$ ordre sont inscrites et circonscrites l'une à l'autre, les surfaces développables qui leur seront circonscrites toucheront toutes une seule et même surface du $(m-1)^{ième}$ ordre au plus.

Dans le cas particulier où l'une des deux surfaces proposées sera une surface conique, on aura ce nouveau corollaire :

Corollaire X. Toute surface conique circonscrite à une surface du $m^{ième}$ ordre la touche suivant un système de courbes qui appartiennent toutes à une seule et même surface du $(m-1)^{ième}$ ordre au plus (*).

Corollaire X. Tout système de surfaces développables qui touchent une surface courbe quelconque suivant une section plane quelconque faite dans cette surface est circonscriptible à une seule et même surface du $(m-1)^{ième}$ ordre au plus.

§. II.

Considérons, en second lieu, trois surfaces du $m^{ième}$ ordre, données par les équations *rationnelles*, en x, y, z,

$$M=0\,, \quad (1) \qquad M'=0\,, \quad (2) \qquad M''=0\,; \quad (3)$$

elles se couperont, deux à deux, suivant diverses lignes, droites ou courbes, planes ou à double courbure.

Soit toujours $m=p+q$, et supposons que ces trois surfaces aient un certain nombre de leurs lignes d'intersection communes, et que ces lignes d'intersection communes appartiennent toutes à une seule

(*) On reconnait ici le théorème démontré par M. Vallès, à la page 315 du précédent volume. Nous avions négligé, à l'endroit cité, de signaler son correspondant.

et même surface du p^{ieme} ordre, donnée par l'équation rationnelle

$$P=0\ ;$$

d'après ce qui précède (*Théorème III*), les lignes d'intersection restantes de ces surfaces, prises deux à deux, seront sur trois surfaces du q^{ieme} ordre, dont nous supposerons les équations

$$Q=0\,,\quad (4)\qquad Q'=0\,,\quad (5)\qquad Q''=0\,;\quad (6)$$

chacune de ces dernières étant supposée relative aux deux qui ne lui correspondent pas parmi les trois autres. On devra donc avoir pour une détermination convenable de λ et λ',

$$\lambda M+M''=PQ'\ ,\qquad \lambda' M'+M''=PQ\ ;$$

d'où

$$\lambda M-\lambda' M'=P(Q'-Q)\ ,$$

ou bien

$$-\frac{\lambda}{\lambda'}M+M'=P.\frac{Q-Q'}{\lambda'}\ ;$$

mais, d'après ce qui a été démontré (§. I), pour une détermination convenable de μ, on doit avoir

$$\mu M+M'=PQ''$$

puis donc qu'en posant $\mu=-\frac{\lambda}{\lambda'}$, on a

$$\mu M+M'=P.\frac{Q-Q'}{\lambda'}\ :$$

il s'ensuit qu'on doit avoir

$$\frac{Q-Q'}{\lambda'}=Q'' \;;$$

c'est-à-dire,

$$\lambda'Q''+Q'=Q \;;$$

ce qui montre que chacune des trois équations (4), (5), (6) est comportée par les deux autres, et que conséquemment les trois surfaces qu'elles expriment se coupent exactement suivant les mêmes lignes. De là naît ce théorème :

THÉORÈME IV. Si trois surfaces du $(p+q)^{ieme}$ *ordre passent toutes par un certain nombre de lignes, droites ou courbes, planes ou à double courbure, appartenant à une seule et même surface du* p^{ieme} *ordre, leurs lignes d'intersection restantes, deux à deux, appartiendront à trois surfaces du* q^{ieme} *ordre, se coupant suivant les mêmes lignes.*

THÉORÈME IV. Si trois surfaces du $(p+q)^{ieme}$ *ordre sont toutes inscrites à un certain nombre de surfaces développables, circonscrites elles-mêmes à une seule et même surface du* p^{ieme} *ordre, leurs surfaces développables circonscrites restantes, deux à deux, seront circonscrites à trois surfaces du* q^{ieme} *ordre, qui auront leurs surfaces développables circonscrites communes.*

De ce théorème, on peut conclure, comme cas particuliers, une infinité de corollaires, parmi lesquels nous nous bornerons à signaler les plus simples.

Corollaire I. Si, par une même courbe plane du second ordre, on fait passer trois surfaces de cet ordre qui se coupent de nouveau deux à deux ; elles se couperont suivant trois courbes

Corollaire I. Si, à une même surface conique du second ordre, on inscrit trois surfaces de cet ordre qui puissent être de nouveau inscrites deux à deux à des surfaces développables ; ces dernières se-planes dont les plans passeront tous trois par une même droite.

ront également des surfaces coniques, et leurs sommets appartiendront tous trois à une même droite.

En remarquant que trois surfaces courbes qui se touchent en un même point sont censées avoir en ce point une section plane commune, située dans leur plan tangent, on aura cet autre corollaire:

Corollaire II. Si trois surfaces du second ordre qui se touchent au même point se coupent deux à deux, elles se couperont suivant des courbes planes, dont les plans passeront tous trois par une même droite.

Corollaire II. Si trois surfaces du second ordre qui se touchent au même point sont inscriptibles deux à deux à des surfaces développables, ces dernières seront des surfaces coniques, dont les sommets appartiendront tous trois à une même droite.

En considérant un angle trièdre comme une surface unique du troisième ordre, on aura aussi ce corollaire :

Corollaire III. Trois angles trièdres étant circonscrits à un même triangle; indépendamment des trois côtés de ce triangle, ils se couperont encore deux à deux suivant six droites appartenant toutes à une seule et même surface réglée du second ordre; et les surfaces réglées ainsi déterminées se couperont toutes trois suivant les mêmes courbes.

Corollaire III. Trois triangles étant inscrits à un même angle trièdre; indépendamment des trois arêtes de cet angle trièdre, les sommets de ces triangles, considérés deux à deux détermineront six droites appartenant toutes à une seule et même surfaces réglée du second ordre; et les surfaces réglées ainsi déterminées se couperont toutes trois suivant les mêmes courbes.

§. III.

Soient de nouveau trois surfaces du $m^{ième}$ ordre, données par les équations *rationnelles* en x, y, z

$$M=0\ ,\quad (1)\qquad M'=0\ ,\quad (2)\qquad M''=0\ ;\quad (3)$$

Ces surfaces se couperont en m^3 points qui, dès que m sera plus grand que *deux*, ne pourront plus être supposés quelconques, puisqu'alors m^3 surpassera le nombre des points qu'il est permis de prendre au hasard dans l'espace, pour déterminer complètement une surface *unique* du m^{ieme} ordre. Dans tous les cas, on obtiendra les coordonnées de ces différens points, en considérant x, y, z, dans les équations (1), (2), (3), comme les inconnues d'un même problème déterminé.

Soient représentées par λ et λ' deux constantes indéterminées, et soit posée l'équation

$$\lambda M+\lambda' M'+M''=0\ ;\qquad (4)$$

cette équation, à cause de l'indétermination de λ et λ', exprimera une infinité de surfaces du m^{ieme} ordre, et, comme chacune de nos quatre équations est comportée par les trois autres, chacune de ces surfaces coupera précisément les lignes d'intersection de deux quelconques des trois proposées en tous les points et aux seuls points où ces lignes seraient coupées par la troisième.

Réciproquement, toute surface qui coupera les lignes d'intersection de deux quelconques des trois proposées précisément en tous les points et aux seuls points où ces lignes seraient coupées par la troisième, devra être une surface du m^{ieme} ordre, dont l'équation soit comportée par les équations (1), (2), (3); cette équation ne pourra donc être qu'un cas particulier de l'équation (4) et de nature à pouvoir en être déduite par une détermination convenable des constantes arbitraires λ et λ'.

Soit $m=p+q$, p et q étant des nombres entiers positifs, et supposons que la nature et la situation respective des trois proposées soient telles que, parmi leurs m^3 ou $(p+q)^3$ points d'intersection, il y en ait $p(p+q)^2$ qui se trouvent tous appartenir à une seule et même surface du p^{ieme} ordre ; ces points pourront ainsi être obtenus par la combinaison de deux quelconques des équations (1), (2), (3) avec une équation *rationnelle* du p^{ieme} degré ; puis donc que tous les points d'intersection sont obtenus par la combinaison des deux mêmes équations avec l'équation (4) ; il s'ensuit que cette dernière équation devra, pour des valeurs convenables de λ et λ', acquérir un facteur *rationnel* P du p^{ieme} degré ; son premier membre devra donc avoir, dans ce cas, un autre facteur *rationnel* Q du q^{ieme} degré qui, égalé à son tour à zéro, fera connaître, par la combinaison de l'équation résultante avec les deux mêmes équations, les $q(p+q)^2$ points d'intersection restans, lesquels se trouveront ainsi appartenir tous à une seule et même surface du q^{ieme} ordre. De là naît ce théorème général :

THÉORÈME V. Si, parmi les $(p+q)^3$ *points d'intersection de trois surfaces du* $(p+q)^{ieme}$ *ordre, il s'en trouve* $p(p+q)^2$ *qui appartiennent tous à une seule et même surface du* p^{ieme} *ordre ; les* $q(p+q)^2$ *points d'intersection restans appartiendront tous à une seule et même surface du* q^{ieme} *ordre.*

THÉORÈME V. Si, parmi les $(p+q)^3$ *plans tangens communs à trois surfaces du* $(p+q)^{ieme}$ *ordre, il s'en trouve* $p(p+q)^2$ *qui soient tous tangens à une seule et même surface du* p^{ieme} *ordre ; les* $q(p+q)^2$ *plans tangens communs restans toucheront tous une seule et même surface du* q^{ieme} *ordre.*

La vérité de ce théorème dépendant uniquement du degré commun des trois équations, et non du nombre et de la nature des surfaces exprimées par chacune d'elles, il ne cessera pas d'être vrai lorsqu'elles exprimeront des systèmes de $p+q$ plans. On a donc ce premier corollaire :

Corollaire I. Trois systèmes de $p+q$ plans existant dans l'espace ; si, parmi les $(p+q)^3$ points communs à ces trois systèmes, il s'en trouve

Corollaire I. Trois systèmes de $p+q$ points existant dans l'espace ; si, parmi les $(p+q)^3$ plans qui peuvent être déterminés par des

$p(p+q)^2$ qui appartiennent tous à une seule et même surface du $p^{\text{ième}}$ ordre, les $q(p+q)^2$ points communs restans appartiendront tous à une seule et même surface du $q^{\text{ième}}$ ordre.

points pris dans les trois systèmes, il s'en trouve $p(p+q)^2$ qui touchent tous une seule et même surface du $p^{\text{ième}}$ ordre, les $q(p+q)^2$ plans restans toucheront tous une seule et même surface du $q^{\text{ième}}$ ordre.

En supposant $p=q=1$, ce corollaire se changera dans le suivant :

Corollaire II. Trois angles dièdres se coupant dans l'espace ; si quatre de leurs huit points d'intersection sont dans un même plan, les quatre points d'intersection restans seront aussi dans un même plan.

Corollaire II. Trois droites existant dans l'espace ; si, parmi les huit plans passant par les extrémités des trois droites il s'en trouve quatre qui se coupent en un même point, les quatre restans se couperont aussi en un même point.

Supposant ensuite $p=2$ et $q=1$, on aura cet autre corollaire :

Corollaire III. Si, parmi les vingt-sept points d'intersection de trois angles trièdres dans l'espace, il s'en trouve dix-huit qui appartiennent à une seule et même surface du second ordre ; les neuf points d'intersection restans appartiendront tous à un seul et même plan et réciproquement.

Corollaire III. Si, parmi les vingt-sept plans qu'on peut conduire par les sommets de trois triangles donnés dans l'espace, il s'en trouve dix-huit qui touchent tous une seule et même surface du second ordre ; les neuf plans restans se couperont tous en un un même point et réciproquement.

Si, dans le théorème général, on suppose $p=q=1$, il prendra la forme suivante :

Corollaire IV. Si quatre des huit points d'intersection de trois surfaces du second ordre sont dans un même plan, leurs quatre points

Corollaire IV. Si quatre des huit plans tangens communs à trois surfaces du second ordre concourent en un même point, les d'intersection restans seront aussi dans un même plan.

quatre plans tangens communs restans concourront aussi en un même point.

§. V.

Soient toujours les trois mêmes équations *rationnelles* du m^{ieme} degré en x, y, z,

$$M=0\ ,\quad (1)\qquad M'=0\ ,\quad (2)\qquad M''=0\ ;\quad (3)$$

exprimant trois surface du m^{ieme} ordre dont les intersections déterminent m^3 points de l'espace, desquels on obtiendrait les coordonnées en considérant x, y, z comme les trois inconnues d'un même problème déterminé.

Soient encore λ, λ' deux constantes indéterminées, et soient posées les équations

$$\lambda M+M''=0\ ,\quad (4)\qquad \lambda' M'+M''=0\ ;\quad (5)$$

ces équations, à cause de l'indétermination de λ et λ', exprimeront, l'une et l'autre, une infinité de lignes, toutes du m^{ieme} ordre; et, comme deux quelconques de nos cinq équations sont comportées par les trois autres, chaque système de deux surfaces comprises dans les équations (4) et (5) déterminera, sur l'une quelconque des surfaces représentées par les équations (1), (2), (3), tous les points et les seuls points d'intersection que les deux autres y détermineraient. Et réciproquement, tout système de deux surfaces déterminant, sur l'une quelconque des trois proposées, tous les points et les seuls points d'intersection que les deux autres y détermineraient, devra être un système de deux surfaces du m^{ieme} ordre, dont les équations soient comportées par les équations (1), (2), (3), et soient conséquemment des cas particuliers des équations (4),

(5), et de nature à pouvoir en être déduites par une détermination convenable des constantes λ et λ'.

Soit $m=p+q=t+u$, p, q, t, u étant des nombres entiers positifs, et supposons que la nature et la situation respective des trois proposées soient telles que, parmi leurs m^3 ou $m(p+q)(t+u)$ points d'intersection il s'en trouve mpt qui soient situés sur les lignes d'intersection de deux surfaces des p^{ieme} et t^{ieme} ordre; ces points pourront ainsi être obtenus par la combinaison de l'une quelconque des équations (1), (2), (3) avec deux équations *rationnelles*, des p^{ieme} et t^{ieme} degrés; puis donc que *tous* les points d'intersection de ces trois surfaces sont obtenus par la combinaison de la même équation avec les équations (4) et (5); il s'ensuit que les premiers membres de ces dernières doivent, pour des valeurs convenables de λ et λ', acquérir respectivement des facteurs *rationnels* P et T, des p^{ieme} et t^{ieme} degrés; ces premiers membres devront donc avoir, dans ce cas, d'autres facteurs *rationnels* Q et U des q^{ieme} et u^{ieme} degrés respectivement; c'est-à-dire que ces équations reviendront à

$$PQ=0\,, \qquad TU=0\,,$$

ce qui donne ces quatre combinaisons

$$\left\{\begin{array}{l}P=0\,,\\ T=0\,;\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}P=0\,,\\ U=0\,;\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}Q=0\,,\\ T=0\,;\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}Q=0\,,\\ U=0\,;\end{array}\right.$$

à chacune desquelles joignant une quelconque des trois équations proposées, on obtiendra la totalité des points d'intersection de nos trois surfaces, lesquels se trouveront ainsi au nombre de mpt sur les lignes d'intersection de deux surfaces des p^{ieme} et q^{ieme} ordre, au nombre de mqu sur les lignes d'intersection de deux autres surfaces des q^{ieme} et u^{ieme} ordre, au nombre de mpu sur les lignes d'intersection des deux surfaces des p^{ieme} et u^{ieme} ordre, et enfin au nombre de mqt sur les lignes d'intersection des deux surfaces des q^{ieme} et t^{ieme} ordre. On a donc ce théorème général :

THÉORÈME V. Si, parmi les $(p+q)^3$ *ou* $(t+u)^3$ *points d'intersection de trois surfaces du* $(p+q)^{ieme}$ *ou* $(t+u)^{ieme}$ *ordre, il s'en trouve* $pt(p+q)$ *ou* $pt(t+u)$ *qui soient sur les lignes d'intersection de deux surfaces des* p^{ieme} *et* t^{ieme} *ordres, il y en aura nécessairement* $qu(p+q)$ *ou* $qu(t+u)$ *qui seront sur les lignes d'intersection de deux surfaces des* q^{ieme} *et* u^{ieme} *ordre. Quant aux points d'intersection restans, il y en aura* $pu(p+q)$ *ou* $pu(t+u)$ *qui seront sur les lignes d'intersection des deux surfaces des* p^{ieme} *et* u^{ieme} *ordres et* $qt(p+q)$ *ou* $qt(t+u)$ *qui seront sur les lignes d'intersection des deux surfaces des* q^{ieme} *et* t^{ieme} *ordres.*

THÉORÈME V. Si, parmi les $(p+q)^3$ *ou* $(t+u)^3$ *plans tangens communs à trois surfaces du* $(p+q)^{ieme}$ *ou* $(t+u)^{ieme}$ *ordre, il s'en trouve* $pt(p+q)$ *ou* $pt(t+u)$ *qui soient tangens à deux surfaces des* p^{ieme} *et* t^{ieme} *ordres, il y en aura nécessairement* $qu(p+q)$ *ou* $qu(t+u)$ *qui seront tangens à deux surfaces des* q^{ieme} *et* u^{ieme} *ordres. Quant aux plans tangens communs restans, il y aura* $pu(p+q)$ *ou* $pu(t+u)$ *qui seront tangens aux deux surfaces des* p^{ieme} *et* u^{ieme} *ordres et* $qt(p+q)$ *ou* $qt(t+u)$ *qui seront tangens aux deux surfaces des* q^{ieme} *et* t^{ieme} *ordres.*

La vérité de notre théorème dépendant uniquement du degré commun des trois équations et non du nombre et de la nature des surfaces exprimées par chacune d'elles, il ne cessera pas d'être vrai lorsqu'elles exprimeront, les unes et les autres, des systèmes de $p+q$ ou $t+u$ plans. On a donc ce corollaire :

Corollaire I. Trois systèmes de $p+q$ ou $t+u$ plans existant dans l'espace. Si, parmi les $(p+q)^3$ ou $(t+u)^3$ points déterminés par les intersections des plans des trois systèmes, il s'en trouve

Corollaire I. Trois groupes de $p+q$ ou $t+u$ points existant dans l'espace. Si, parmi les $(p+q)^3$ ou $(t+u)^3$ plans déterminés par des points pris dans les trois groupes, il s'en trouve $pt(p+q)$ ou

$pt(p+q)$ ou $pt(t+u)$ qui appartiennent aux intersections de deux surfaces des p^{ieme} et t^{ieme} ordres, il y en aura nécessairement $qu(p+q)$ ou $qu(t+u)$ qui appartiendront aux intersections de deux surfaces des q^{ieme} et u^{ieme} ordres. Quant aux points d'intersection restans, il y en aura $pu(p+q)$ ou $pu(t+u)$ qui appartiendront aux intersections des deux surfaces des p^{ieme} et u^{ieme} ordres, et $qt(p+q)$ ou $qt(t+u)$ qui appartiendront aux intersections des surfaces des q^{ieme} et t^{ieme} ordres.

$pt(t+u)$ qui touchent à la fois deux surfaces des p^{ieme} et t^{ieme}, il y en aura nécessairement $qu(p+q)$ ou $qu(t+u)$ qui toucheront à la fois deux surfaces des q^{ieme} et u^{ieme} ordres. Quant aux plans restans, il y en aura $pu(p+q)$ ou $pu(t+u)$ qui toucheront à la fois les surfaces des p^{ieme} et u^{ieme} ordres, et $qt(p+q)$ ou $qt(t+u)$ qui toucheront à la fois les surfaces des q^{ieme} et t^{ieme} ordres.

Dans le cas particulier où l'on suppose $p=t=2$ et $q=u=1$, ce corollaire prend la forme suivante :

Corollaire II. Trois angles trièdres existant ensemble dans l'espace ; si, parmi leurs *vingt-sept* points d'intersection, il s'en trouve *douze* aux intersections de deux surfaces du second ordre, il y en aura nécessairement *trois* autres qui appartiendront à une même droite. Quant aux *douze* points d'intersection restans, ils se trouveront *six à six* aux périmètres de deux courbes planes du second ordre, appartenant aux surfaces de même ordre dont il vient d'être question.

Corollaire II. Trois triangles existant ensemble dans l'erpace ; si, parmi les *vingt-sept* plans que déterminent leurs sommets il s'en trouve *douze* qui touchent à la fois deux surfaces du second ordre, il y en aura nécessairement *trois* autres qui se couperont suivant une même droite. Quant aux *douze* plans restans, ils se trouveront *six à six* tangens à deux surfaces coniques du second ordre, circonscrites aux deux surfaces de même ordre dont il vient d'être question.

En nous engageant pour la première fois dans une route qui n'avait point encore été tracée, il ne serait pas surprenant qu'il nous fût échappé quelques méprises; il se pourrait aussi que nous eussions négligé des propositions plus intéressantes que quelques-unes de celles que nous avons signalées; mais l'important ici était de mettre entre les mains du lecteur un nouvel instrument de recherches que bientôt sans doute il maniera plus habilement que nous ne l'avons fait nous-mêmes. Tout repose au surplus ici, comme en beaucoup d'autres rencontres, sur la correspondance entre les procédés de l'analyse et les spéculations de la géométrie; et tout ce que nous avons dit ici aurait sans doute été aperçu depuis long-temps, si, dans les traités élémentaires, on s'occupait avec plus de soin qu'on n'a coutume de le faire de la théorie des équations qui ont lieu en même temps ou qui ont un certain nombre de système de racines communes.