ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Optique. Du mouvement de la lumière dans un milieu transparent, dont la densité varie dans tous les sens, suivant une loi mathématique quelconque

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 257-284
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__257_0>

OPTIQUE.

Du mouvement de la lumière dans un milieu transparent, dont la densité varie dans tous les sens, suivant une loi mathématique quelconque;

Par M. Gergonne.

Plusieurs années avant que M. Biot eût fait paraître son ouvrage sur les *Réfractions extraordinaires qui ont lieu près de l'horizon*, et à l'occasion d'une pitoyable explication du phénomène du *Mirage*, que j'avais rencontrée dans la *Décade philosophique*, je m'étais déjà occupé de la recherche des lois du mouvement de la lumière et de la vision, dans un milieu transparent de densité variable. Bien qu'alors le phénomène du mirage fût connu et observé depuis long-temps, dans diverses contrées de l'Europe, personne néanmoins n'avait songé à en déduire l'explication mathématique des loïs connues de l'optique. La route dans laquelle je m'engageais n'était donc point encore frayée. Je n'avais jamais eu l'occasion d'observer le phénomène que j'entreprenais de soumettre à l'analyse; il ne m'était même connu que par la courte description qu'en avait donné M. Biot, dans ses *Elémens d'astronomie;* cependant je fus assez heureux pour parvenir à des résultats que l'observation directe, elle-même, n'avait fait apercevoir qu'assez tardivement à M. Monge, durant son séjour en Egypte, comme on en peut juger par le post-scriptum de son *Mémoire sur le mirage*, inséré d'abord dans la *Décade égyptienne*, et reproduit postérieurement par M. Hachette, dans son *Programme d'un cours de physique.* Le mémoire de Monge paraît, au surplus, beaucoup moins écrit pour les géomètres que pour les hommes, en très-grand nombre, qui aspirent uniquement à prendre une teinture superficielle des causes des phénomènes variés que le spectacle de la nature peut offrir à notre observation; ce mémoire ne m'aurait donc pu être d'aucun secours pour mon travail, qui était terminé depuis plus d'un an, lorsqu'il me tomba pour la première fois sous la main.

Je m'étais borné alors, parce qu'en effet cela suffisait à mon but, à considérer le mouvement de la lumière et la vision, dans un milieu transparent, composé de couches planes parallèles, d'une densité constante dans chaque couches, et variant seulement, d'une couche à l'autre, suivant une loi mathématique donnée quelconque, et un extrait de mon mémoire parut dans le volume des *Travaux de l'Académie du Gard*, pour 1808; mais je m'étais bien promis dès lors de revenir de nouveau sur ce sujet, pour l'envisager sous un point de vue un peu plus large, en supposant que la densité du milieu varie d'un point à l'autre, d'une manière quelconque, dans toutes sortes de directions. Ce n'est que très-récemment que j'ai pu jouir, sans de continuelles distractions, des quelques loisirs qui m'étaient nécessaires pour mettre ce dessein à exécution. Je ne m'occuperai, dans le présent mémoire, que des lois du mouvement de la lumière, en renvoyant à un autre mémoire ce qui concerne les lois de la vision.

Dans tout ce qui va suivre, j'admettrai, comme je l'avais déjà fait, dans mon premier mémoire, l'hypothèse newtonienne sur la nature de la lumière, non toutefois que je la regarde, plus que celles des ondulations, conforme à la vérité, mais seulement parce qu'elle se prête plus aisément que cette dernière à l'analyse mathématique, et que d'ailleurs, pour l'objet particulier que j'ai en vue, rien n'est plus facile, comme on le verra, que de passer des résultats relatifs à l'une des hypothèses à ceux qu'on déduirait de l'autre. Afin que le lecteur n'ait besoin de recourir à aucun autre écrit, qu'il pourrait fort bien n'avoir pas sous la main, j'analyserai d'abord brièvement l'action des milieux sur la lumière qui les traverse.

Tout ce que l'observation peut nous apprendre sur la nature de la lumière, c'est 1.° qu'elle semble une substance d'une nature particulière, dont les molécules s'échappent, dans toutes sortes de directions, de chacun des points des corps lumineux ou éclairés ; 2.° que, quelle que soit la direction initiale d'une molécule lumineuse, tant qu'elle se meut dans le vide ou dans un milieu physiquement et chimiquement homogène, c'est-à-dire, dans un milieu dont la nature et la densité sont partout les mêmes, elle suit une direction exactement rectiligne ; de telle sorte que la pesanteur terrestre ne paraît exercer sur elle aucune action appréciable (*) ;

(*) La preuve expérimentale qu'on apporte de cette propriété de la lumière, dans la plupart des traités de physique, m'a toujours paru une véritable pétition de principe. On nous dit, par exemple, qu'un rayon solaire, reçu dans une chambre obscure, par un trou fait au volet, enfile exactement un long tube rectiligne, quelque petit d'ailleurs qu'en soit le diamètre intérieur ; mais on ne nous explique pas comment on peut s'assurer, au préalable, que ce tube est rectiligne. Ce ne sera sûrement pas au coup d'œil qu'on en jugera ; car si, par aventure, le mouvement de la lumière était curviligne, il faudrait que la direction de l'axe du tube le fût également pour qu'on pût, en plaçant l'œil à une de ses extrémités, apercevoir les objets situés dans le prolongement de cet axe ; c'est même là ce qui arriverait inévitablement, à raison des réfractions atmosphériques, si le tube était excessivement long et non vertical. Il ne suffit donc pas que le rayon enfile le tube, pour que la direction de la lumière soit reconnue rectiligne ; il faut, en outre, qu'il ne cesse pas de l'enfiler, lorsqu'on fera tourner ce tube dans deux colliers fixes, situés à ses extrémités ; car il n'y a que la ligne droite dont la situation soit unique entre deux des points de sa direction.

3.° qu'alors son mouvement est non seulement rectiligne mais encore uniforme; de sorte qu'elle ne paraît éprouver aucune résistance sensible de la part des milieux qu'elle traverse; 4.° qu'enfin, lorsque la lumière pénètre du vide dans un milieu ou d'un milieu dans le vide, ce milieu paraît exercer sur elle une action, tantôt attractive et tantôt répulsive, tout à fait analogue aux actions chimiques, dont le caractère le plus saillant est d'être tout à fait insensible à la moindre distance appréciable du contact.

Adoptons donc cette hypothèse qui n'est, après tout, que l'expression exacte des faits, et examinons soigneusement quelles doivent en être les conséquences mathématiques.

Soit d'abord une molécule lumineuse mue verticalement, de haut en bas, dans le vide, et s'approchant ainsi d'un milieu indéfini, physiquement et chimiquement homogène, séparé de ce vide par un plan horizontal, également indéfini, et dont l'action sur cette molécule soit *attractive*. Soit que la molécule soit encore hors du milieu, ou soit qu'au contraire elle y ait déjà pénétré, tout se trouvant exactement dans les mêmes circonstances tout autour de la verticale que cette molécule parcourt, elle continuera constamment à la parcourir; de sorte qu'il est seulement question de découvrir suivant quelle loi sa vîtesse pourra varier.

Considérons d'abord la molécule hors du milieu; soit x l'intervalle qui l'en sépare à l'époque t; la force accélératrice sera, pour la même époque, $\frac{d^2x}{dt^2}$; et cette force sera visiblement proportionnelle à la densité du milieu; puisque, par exemple, un milieu n fois plus dense que celui-là, pouvant être considéré comme le système de n milieux d'une densité pareille à la sienne, qui se seraient pénétrés, et chacun d'eux agissant comme s'il était seul, leur action totale doit être n fois plus grande que celle de chacun d'eux en particulier. Il n'est pas moins évident que cette force accélératrice doit être une certaine fonction de la distance x de la molécule au plan horizontal indéfini qui termine le milieu; de sorte qu'en représentant par u sa densité constante, on doit avoir

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-uF(x),$$

la fonction F étant indépendante de u. Nous donnons ici le signe — au second membre, parce que l'action du milieu tend à diminuer la distance x.

De cette première équation on conclut

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=A-2u\int F(x)dx\ ,$$

A étant une constante arbitraire; de sorte qu'en posant, pour abréger,

$$\int F(x)dx=f(x)\ ,$$

on a simplement

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=A-2uf(x)\ .$$

Pour faire disparaître la constante A, désignons par w la vîtesse uniforme de la molécule dans le vide, avant qu'elle soit assez voisine du milieu pour éprouver de sa part une action appréciable; ce sera aussi sa vîtesse pour $x=\infty$. Soit de plus V la vîtesse de cette molécule au contact où $x=0$; nous aurons ainsi

$$w^2=A-2uf(\infty)\ ,$$

$$V^2=A-2uf(0)\ ;$$

d'où, en retranchant,

$$V^2-w^2=2u\{f(\infty)-f(0)\}\ ;$$

Or, $f(\infty)-f(0)$ est une quantité constante qui ne dépend que de la forme de la fonction f, c'est-à-dire, du mode d'action inconnu des milieux sur la lumière ; mais que nous pouvons, une fois pour toute, représenter par k^2 (*) ; nous aurons donc ainsi

$$V^2-\varpi^2=2k^2u\ ;$$

c'est-à-dire qu'à l'entrée de la molécule dans le milieu, le carré de sa vîtesse se trouve déjà augmenté d'une quantité proportionnelle à la densité de ce milieu.

Considérons maintenant ce qui se passe lorsque la molécule a déjà pénétré dans le milieu. A quelque profondeur x qu'elle y soit déjà parvenue, si, à la même distance x, au-dessous d'elle, on conçoit un plan horizontal, la portion du milieu située au-dessus de ce plan n'exercera évidemment aucune action sur cette molécule, puisqu'elle s'y trouvera symétriquement située ; la molécule sera donc sollicitée par le surplus du milieu comme elle l'était par le milieu entier, lorsqu'elle n'était encore qu'à la distance x au-dessus de sa surface ; et, comme il en ira toujours de même, quelle que soit la valeur de x, qui, dans ce cas-ci, va croissant, l'action du milieu sur elle, qui aura atteint son maximum au contact, décroîtra continuellement ; de telle sorte qu'elle aura été exactement la même aux mêmes distances au-dessus et au-dessous du plan horizontal indéfini qui termine ce milieu. En un mot, l'action totale du milieu sur cette molécule aura été finalement la même que si, celle-ci restant fixe, le milieu s'était peu à peu élevé jusqu'à elle, pour s'en éloigner ensuite, par un mouvement rétrograde, exactement inverse du premier. La molécule en pénétrant dans le milieu, jusqu'à une profondeur où son mouvement sera devenu de

(*) Ce k^2 est la même chose que le k employé par Laplace dans le X.me livre de la *Mécanique céleste*. Je mets k^2 au lieu de k, pour la commodité des applications.

nouveau sensiblement uniforme, comme il l'était dans le vide, aura donc encore accru le carré de sa vîtesse de la même quantité dont il s'était déjà accru en allant du vide à la surface de ce milieu, de sorte qu'en représentant par v la nouvelle vîtesse uniforme de cette molécule, on aura

$$v^2 - V^2 = 2k^2u\ ;$$

puis donc que nous avons déjà trouvé

$$V^2 - w^2 = 2k^2u\ ,$$

nous aurons, par addition,

$$v^2 - w^2 = 4k^2u\ .$$

Ainsi, lorsqu'une molécule lumineuse passe du vide dans un milieu homogène indéfini qui l'attire, et qui est séparé de ce vide par un plan indéfini, perpendiculaire à la direction du mouvement de la molécule, le carré de la vîtesse uniforme de cette molécule dans le milieu est égal au carré de sa vîtesse uniforme dans le vide, augmenté d'une quantité proportionnelle à la densité de ce milieu, et la force accélératrice est exactement la même à des distances égales de part et d'autre du plan qui termine le milieu. Mais, à cause de l'excessive petitesse du rayon d'activité du milieu, tout se passe sensiblement comme si la vîtesse, constamment égale à w, jusqu'au contact, se changeait brusquement en v au-delà de ce point.

Supposons présentement que la molécule, au lieu de pénétrer du vide dans un milieu homogène, pénètre d'un milieu homogène indéfini dans un autre milieu également homogène et indéfini, d'une densité supérieure à la sienne; les deux milieux étant séparés l'un de l'autre par un plan indéfini, et la direction de la molécule étant perpendiculaire à ce plan. Soient u et u' les densités des deux milieux, v et v' les vîtesses constantes de la lumière dans l'un et dans l'autre. En considérant la densité u' du second milieu comme composée de deux autres u et $u'-u$, la première, qui lui sera commune avec celle du premier, n'aura aucune action pour modifier la vîtesse v; la molécule lumineuse se trouvera donc dans le même cas que si elle pénétrait du vide, où elle aurait la vîtesse v, dans un milieu dont la densité serait $u'-u$, et où elle acquerrait la vîtesse v'; on aura donc, par ce qui précède,

$$v'^2-v^2=4k^2(u'-u) \;.$$

Ainsi, si deux milieux transparens, homogènes et indéfinis, d'une densité différente, sont séparés l'un de l'autre par un plan également indéfini, et qu'une molécule lumineuse passe du moins dense dans celui qui l'est le plus, en suivant une perpendiculaire à leur plan séparateur; par l'effet de l'excès de l'action du second milieu sur celle du premier, le carré de la vîtesse de la molécule se trouvera augmenté d'une quantité proportionnelle à l'excès de la densité de ce second milieu sur celle du premier; et il est clair qu'on pourra encore admettre ici, sans erreur sensible, que cette augmentation dans le carré de la vîtesse a lieu brusquement, dans le passage du premier milieu au second.

Supposons actuellement que la molécule traverse le premier milieu dans une direction oblique au plan séparateur; si, par cette direction, on conçoit un plan perpendiculaire à celui-là, tout étant égal de part et d'autre de ce second plan, la molécule n'en sortira pas, même après avoir pénétré dans le second milieu. Par le point d'incidence soit conduite une perpendiculaire au plan séparateur; soient θ et θ' les angles que font les rayons incidens et réfractés avec cette perpendiculaire; ce seront là aussi, respectivement, les angles d'incidence et de réfraction. Soient toujours v et v' les vîtesses constantes de la molécule dans les deux milieux; les composantes de ces vîtesses seront, savoir:

$$\text{dans le sens du plan séparateur} \left\{ \begin{array}{l} v\ \mathrm{Sin.}\theta\ , \\ v'\ \mathrm{Sin.}\theta'\ ; \end{array} \right.$$

$$\text{dans le sens de la perpendiculaire} \left\{ \begin{array}{l} v\ \mathrm{Cos.}\theta\ , \\ v'\ \mathrm{Cos.}\theta'\ ; \end{array} \right.$$

or, comme l'action totale des milieux s'exerce perpendiculairement au plan séparateur, les vîtesses, dans le sens de ce plan, ne sauraient différer l'une de l'autre; de sorte qu'on doit avoir

$$v\mathrm{Sin.}\theta = v'\mathrm{Sin.}\theta'\ .$$

En second lieu, les carrés des vîtesses perpendiculaires au plan séparateur devant, d'après ce qui précède, différer l'un de l'autre de la quantité $4k^2(u-u')$, on aura aussi

$$v'^2\mathrm{Cos.}^2\theta' - v^2\mathrm{Cos.}^2\theta = 4k^2(u'-u)\ ;$$

éliminant v' entre ces deux équations, et transformant les cosinus en sinus dans l'équation résultante, on aura

$$\frac{\mathrm{Sin.}\theta}{\mathrm{Sin.}\theta'} = \sqrt{1 + \frac{4k^2(u'-u)}{v^2}}\ ;$$

or, pour les deux mêmes milieux et pour une même vîtesse constante v, dans le premier, le second membre de cette équation est indépendant de θ, c'est-à-dire, de la direction de la molécule dans le premier milieu; donc, son premier membre en doit être également indépendant; donc, pour les deux mêmes milieux et pour la même vîtesse absolue dans le premier, *il existe un rapport constant entre le sinus d'incidence et le sinus de réfraction.*

On sait que la constance de ce rapport est complétement confirmée par l'expérience ; d'où il suit qu'elle est indépendante de toute hypothèse sur la nature de la lumière ; en la représentant par n, nous aurons

$$n=\sqrt{1+\frac{4k^2(u'-u)}{v^2}},$$

d'où on tire

$$u'-u=\frac{n^2-1}{4}\left(\frac{v}{k}\right)^2;$$

si donc on veut adopter tout autre hypothèse que la nôtre, il ne s'agira que de remplacer par $\frac{n^2-1}{4}\left(\frac{v}{k}\right)^2$ ce que nous avons appelé la différence de densité des deux milieux.

Si, entre les deux mêmes équations, on élimine θ, θ' disparaîtra de lui-même, et il viendra

$$v'^2-v^2=4k^2(u'-u);$$

ainsi, la différence des carrés des vîtesses absolues de la molécule dans les deux milieux est indépendante de la direction initiale de son mouvement.

Soient présentement u, u_1, u_2, u_3, ... u_m les densités d'une suite de milieux transparens, homogènes et indéfinis, séparés les uns des autres par des plans également indéfinis, *parallèles ou non parallèles ;* une molécule lumineuse qui les parcourra successivement décrira sensiblement un polygone rectiligne ouvert, plan ou gauche, ayant ses sommets sur les divers plans séparateurs, et les plans de ses angles respectivement perpendiculaires aux plans séparateurs qui en contiendront les sommets. Au passage de chaque milieu dans le suivant, la composante de la vîtesse absolue, dans le sens du plan séparateur, ne subira aucune modification ; mais, si l'on représente par v, v_1, v_2, v_3, ... v_m les vîtesses absolues dans les différens milieux, on aura, par ce qui précède,

$$v_1^2 - v^2 = 4k^2(u_1 - u) ,$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 4k^2(u_2 - u_1) ,$$

$$v_3^2 - v_2^2 = 4k^2(u_3 - u_2) ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$v^2_m - v^2_{m-1} = 4k^2(u_m - u_{m-1}) ;$$

d'où , en ajoutant et réduisant ,

$$v^2_m - v^2 = 4k^2(u_m - u) ;$$

et par suite

$$v^2_m = v^2 + 4k^2(u_m - u) ;$$

c'est-à-dire que la vîtesse absolue de la molécule, dans le dernier milieu , sera exactement la même que si elle y était immédiatement parvenue du premier; de sorte que l'existence des milieux intermédiaires n'aura eu, au plus , d'autre effet que de changer la direction finale de cette molécule, et de lui faire acquérir, par degrés, une vîtesse qu'elle aurait prise tout à coup sans leur présence.

Si les milieux , toujours homogènes et indéfinis , sont séparés les uns des autres par des surfaces courbes quelconques , la molécule en les traversant décrira encore sensiblement un polygone rectiligne ouvert, plan ou gauche, ayant ses sommets sur ces diverses surfaces. En imaginant, par les sommets du polygone, des plans respectivement tangens aux surfaces courbes séparatrices sur lesquelles ces sommets se trouvent situés; ces plans tangens pourront être pris pour les surfaces séparatrices elles-mêmes; de sorte que les plans des angles du polygone seront respectivement perpendiculaires à ces plans tangens; que les composantes des vîtesses absolues , dans le sens de ces plans tangens, ne subiront aucune variation dans le passage d'un milieu à celui qui lui sera consécutif, et qu'enfin la vîtesse absolue de la molécule, dans l'un quelconque de ces milieux, sera la même que si cette molécule y avait directement pénétré.

Tout se passera évidemment de la même manière, quelque peu différentes de figure et de situation dans l'espace que soient deux surfaces courbes séparatrices consécutives et quelque petite que soit la différence de densité des deux milieux séparés par chacune d'elles; il en ira donc encore de même lorsque la molécule parcourra un milieu, chimiquement homogène, dont la densité variera, d'une manière insensible, d'un point au suivant, dans toutes les directions, suivant une loi mathématique quelconque. Il arrivera seulement alors que le polygone rectiligne, plan ou gauche, que décrivait d'abord la molécule, deviendra une courbe plane ou a double courbure; et l'on voit, 1.° que le plan osculateur de cette courbe, en l'un quelconque de ses points, sera normal à la surface courbe, lieu de tous les points du milieu qui auront même densité que celui-là; 2.° que la composante, suivant le plan tangent à cette surface, en ce même point, de la vîtesse absolue de la molécule, devra être constante ou, en d'autres termes, que sa différentielle devra être nulle; 3.° qu'enfin cette vîtesse absolue devra être la même que si, sans intermédiaire, la molécule était parvenue du vide en ce point. Or, il n'en faut pas davantage pour parvenir aux équations du mouvement de la lumière, dans un milieu transparent, chimiquement homogène, dont la densité varie d'un point à l'autre, dans toutes les directions et d'une manière insensible, suivant une loi mathématique donnée, ainsi qu'on le verra tout à l'heure.

Au lieu de supposer que le milieu, chimiquement homogène, varie seulement de densité, il reviendrait au même de supposer que c'est, au contraire, sa nature chimique qui varie, par degrés insensibles, tandis que sa densité demeure constante; on pourrait même supposer que l'une et l'autre varient à la fois. Pour éviter tout embarras, on peut appeler *densité optique* d'un milieu, en chacun de ses points, la densité que devrait avoir un fluide connu, pris pour terme de comparaison, l'air atmosphérique, par exemple, pour exercer sur la lumière une action pareille à celle que ce milieu exerce sur elle, en ce même point, et c'est ainsi qu'il sera permis d'entendre le mot *densité* dans tout ce qui va suivre.

Soit présentement une molécule lumineuse, en mouvement dans un milieu transparent, d'une densité variable. Supposons que cette molécule ne s'y meuve qu'en vertu d'une vîtesse antérieurement acquise, combinée avec l'action du milieu sur elle; rapportons-la à trois axes rectangulaires, et soit (x, y, z) le point du milieu où elle se trouve à l'époque t. Si nous représentons par u la densité de ce milieu en ce point, u sera une fonction de x, y, z, sans t, donnée par une équation de la forme

$$u=\varphi(x,y,z), \qquad (1)$$

qui déterminera le densité de ce milieu, en chacun de ses points, et qui en sera conséquemment la définition complète.

En même temps que cette équation donnera la densité de chacun des points du milieu, elle fera aussi connaître les points de ce milieu qui auront une densité donnée; et l'on voit que tous les points d'une même densité quelconque seront, en général, ceux d'une certaine surface plane ou courbe; de sorte que, généralement parlant, tout milieu de densité variable peut être considéré, ainsi que nous le faisions tout à l'heure, comme composé de couches de densité constante. Un milieu ne saurait différer d'un autre que par la figure et la situation de ces couches, et par la manière dont la densité varie d'une couche à l'autre (*).

(*) C'est la théorie générale de ces sortes de milieux que nous appellions de nos vœux dans une note de la pag. 87 de notre XIV.e volume; note

En posant, pour abréger,

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=P\,,\quad \left(\frac{du}{dy}\right)=Q\,,\quad \left(\frac{du}{dz}\right)=R\,,\qquad (2)$$

on aura

$$du=Pdx+Qdy+Rdz\,. \qquad (3)$$

Or, poser $du=0$ c'est exprimer que la variation de densité est nulle ou que la densité est constante; donc, l'équation résultante

$$Pdx+Qdy+Rdz=0\,, \qquad (4)$$

est l'équation différentielle des couches de densité constante; c'est-à-dire que c'est l'équation différentielle de la couche dans toute l'étendue de laquelle la densité u est la même qu'au point (x, y, z).

En désignant donc par X, Y, Z les coordonnées courantes dans l'espace, les équations du plan tangent et de la normale de cette surface, en ce point (x, y, z), seront

$$P(X-x)+Q(Y-y)+R(Z-z)=0\,, \qquad (5)$$

$$\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q}=\frac{Z-z}{R}\,. \qquad (6)$$

Présentement, en considérant x, y, z comme des fonctions de t, choisi pour variable indépendante, l'équation du plan osculateur de la trajectoire, au point (x, y, z), sera, comme l'on sait,

---

sur laquelle le *Bulletin universel* (juillet 1828, pag. 10) a rappelé de nouveau l'attention des géomètres, à l'occasion d'un très-curieux mémoire de M. Gauss. On classerait alors les milieux comme on classe aujourd'hui les lignes et les surfaces courbes.

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)(X-x)\\+&\left(\frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)(Y-y)\\+&\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right)(Z-z)\end{aligned}\right\}=0\ ;\quad(7)$$

et il faudra d'abord que ce plan soit perpendiculaire, en (x, y, z), au plan tangent (5) au même point; ce qui donnera, pour première équation du mouvement de la molécule

$$P\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)+Q\left(\frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)+R\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right)=0,$$

ou bien

$$\left(Q\frac{d^2z}{dt^2}-R\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{dx}{dt}+\left(R\frac{d^2x}{dt^2}-P\frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{dy}{dt}+\left(P\frac{d^2y}{dt^2}-Q\frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{dz}{dt}=0.\quad(8)$$

Les vîtesses de la molécule, parallèlement aux axes des x, des y et des z, étant respectivement

$$\frac{dx}{dt},\quad\frac{dy}{dt},\quad\frac{dz}{dt};$$

les équations de la tangente à la trajectoire, au point (x, y, z), seront

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}};\qquad(9)$$

de sorte que, si l'on représente par θ l'angle que fait cette tangente avec la normale (6) au même point, c'est-à-dire, l'angle d'incidence, on aura

$$\text{Sin.}\theta = \frac{\sqrt{\left(Q\frac{dz}{dt}-R\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(R\frac{dx}{dt}-P\frac{dz}{dt}\right)^2+\left(P\frac{dy}{dt}-Q\frac{dx}{dt}\right)^2}}{\sqrt{(P^2+Q^2+R^2)\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}}}. \quad (10)$$

Mais, si l'on représente par v la vîtesse absolue de la molécule au point (x, y, z), ce qui donnera

$$v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2, \quad (11)$$

la vîtesse, dans le sens du plan tangent en (x, y, z) à la surface (4) de densité constante, sera $v\text{Sin.}\theta$; en substituant donc, dans son expression, pour v et $\text{Sin.}\theta$ leurs valeurs, cette vîtesse deviendra

$$\frac{\sqrt{\left(Q\frac{dz}{dt}-R\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(R\frac{dx}{dt}-P\frac{dz}{dt}\right)^2+\left(P\frac{dy}{dt}-Q\frac{dx}{dt}\right)^2}}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}};$$

et il faudra que la différentielle de cette composante, en y traitant P, Q, R comme constans, puisqu'on reste dans le plan tangent, soit nulle; ce qui donnera, pour deuxième équation du mouvement de la molécule,

$$\left.\begin{aligned}&\left(Q\frac{dz}{dt}-R\frac{dy}{dt}\right)\left(Q\frac{d^2z}{dt^2}-R\frac{d^2y}{dt^2}\right)\\+&\left(R\frac{dx}{dt}-P\frac{dz}{dt}\right)\left(R\frac{d^2x}{dt^2}-P\frac{d^2z}{dt^2}\right)\\+&\left(P\frac{dy}{dt}-Q\frac{dx}{dt}\right)\left(P\frac{d^2y}{dt^2}-Q\frac{d^2x}{dt^2}\right)\end{aligned}\right\}=0. \quad (12)$$

Enfin, la vîtesse absolue v de la molécule, en (x, y, z), où la densité du milieu est u devant être la même que si cette molécule y était parvenue du vide, sans aucun intermédiaire; en désignant toujours par w la vîtesse connue de la lumière dans le vide, on devra avoir encore, d'après ce qui a été dit ci-dessus,

$$v^2=w^2+4k^2u \ ;$$

ce qui donnera, pour la troisième équation du mouvement de la molécule

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=w^2+4k^2u \ ; \qquad (13)$$

mais nous allons voir que ces trois équations peuvent être remplacées par trois autres, incomparablement plus simples.

On satisfait d'abord visiblement aux deux équations (8) et (12), quel que soit λ, en posant

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\lambda P \ , \quad \frac{d^2y}{dt^2}=\lambda Q \ , \quad \frac{d^2z}{dt^2}=\lambda R \ ; \qquad (14)$$

mais, en différentiant l'équation (13), on obtient

$$\frac{dx}{dt}\,\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\,\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\,\frac{d^2z}{dt^2}=2k^2\left(P\,\frac{dx}{dt}+Q\,\frac{dy}{dt}+R\,\frac{dz}{dt}\right), \quad (15)$$

qui, en y substituant les valeurs (14), se réduit à $\lambda=2k^2$; de sorte que les équations (14), c'est-à-dire, les équations du mouvement de la molécule sont simplement

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2k^2P \ , \quad \frac{d^2y}{dt^2}=2k^2Q \ , \quad \frac{d^2z}{dt^2}=2k^2R \ ; \quad (16)$$

équations qui comportent d'ailleurs l'équation (13), et qui seront, à raison de leur extrême simplicité et de leur parfaite symétrie, d'un emploi très-commode, surtout lorsque P, Q, R seront respectivement des fonctions de x, y, z seulement.

Ces équations (16) pourront également servir, soit à déterminer les circonstances du mouvement, lorsque la nature du milieu sera donnée, soit au contraire à déterminer la nature du milieu, lorsque les circonstances du mouvement seront connues.

Pour donner un exemple du premier de ces deux cas, supposons que les couches de densité constante soient des couches ellipsoïdales concentriques, semblables et semblablement disposées, ayant le point (a, b, c) pour centre commun, et leurs axes proportionnels à trois quantités p, q, r. Supposons, en outre, que la densité de ces couches croisse du dedans au dehors, proportionnellement aux carrés de leurs dimensions, en prenant les axes des coordonnées respectivement parallèles aux diamètres principaux de ces surfaces, on aura

$$u=\left(\frac{x-a}{p}\right)^2+\left(\frac{y-b}{q}\right)^2+\left(\frac{z-c}{r}\right)^2. \qquad (17)$$

On trouvera conséquemment

$$P=\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)=2\left(\frac{x-a}{p^2}\right), \quad Q=\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)=2\left(\frac{y-b}{q^2}\right), \quad R=\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)=2\left(\frac{z-c}{r^2}\right);$$

au moyen de quoi les équations (16) deviendront

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=4k^2\left(\frac{x-a}{p^2}\right), \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=4k^2\left(\frac{y-b}{q^2}\right), \quad \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=4k^2\left(\frac{z-c}{r^2}\right),$$

et donneront, en intégrant

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2=4k^2\left(\frac{x-a}{p}\right)^2+A,\ \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2=4k^2\left(\frac{y-b}{q}\right)^2+B,\ \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2=4k^2\left(\frac{z-c}{r}\right)^2+C;\ (18)$$

A, B, C étant trois constantes arbitraires.

Pour les déterminer, supposons que la molécule soit partie de l'origine, avec la vîtesse V, dans une direction faisant avec les axes des x, y, z des angles respectivement égaux à α, β, γ; nous aurons ainsi

$$V^2\text{Cos.}^2\alpha=4k^2\frac{a^2}{p^2}+A,\quad V^2\text{Cos.}^2\beta=4k^2\frac{b^2}{q^2}+B,\quad V^2\text{Cos.}^2\gamma=4k^2\frac{c^2}{r^2}+C;$$

en retranchant ces équations des précédentes, il viendra, en transposant,

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2&=4k^2\left(\frac{x-a}{p}\right)^2+V^2\text{Cos.}^2\alpha-4k^2\frac{a^2}{p^2}, \\
\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2&=4k^2\left(\frac{y-b}{q}\right)^2+V^2\text{Cos.}^2\beta-4k^2\frac{b^2}{q^2}, \\
\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2&=4k^2\left(\frac{z-c}{r}\right)^2+V^2\text{Cos.}^2\gamma-4k^2\frac{c^2}{r^2};
\end{aligned}\right\}\ (19)$$

d'où on tirera

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{d}t&=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4k^2\left(\frac{x-a}{p}\right)^2+V^2\text{Cos.}^2\alpha-4k^2\frac{a^2}{p^2}}}, \\
\mathrm{d}t&=\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{4k^2\left(\frac{y-b}{q}\right)^2+V^2\text{Cos.}^2\beta-4k^2\frac{b^2}{q^2}}}, \\
\mathrm{d}t&=\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{4k^2\left(\frac{z-c}{r}\right)^2+V^2\text{Cos.}^2\gamma-4k^2\frac{c^2}{r^2}}};
\end{aligned}\right\}\ (20)$$

ce qui donnera, en intégrant,

$$\left.\begin{aligned}
t+D&=\frac{p}{2k}\,\mathrm{Log.}\left\{2k\,\frac{x-a}{p}+\sqrt{4k^2\left(\frac{x-a}{p}\right)^2+V^2\mathrm{Cos.}^2\alpha-4k^2\,\frac{a^2}{p^2}}\right\},\\
t+E&=\frac{q}{2k}\,\mathrm{Log.}\left\{2k\,\frac{y-b}{q}+\sqrt{4k^2\left(\frac{y-b}{q}\right)^2+V^2\mathrm{Cos.}^2\beta-4k^2\,\frac{b^2}{q^2}}\right\},\\
t+F&=\frac{r}{2k}\,\mathrm{Log.}\left\{2k\,\frac{z-c}{r}+\sqrt{2k^2\left(\frac{z-c}{r}\right)^2+V^2\mathrm{Cos.}^2\gamma-4k^2\,\frac{c^2}{r^2}}\right\},
\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

D, E, F étant trois nouvelles constantes arbitraires.

Pour les déterminer, fixons l'origine des temps au passage de la molécule par l'origine des coordonnées; alors x, y, z devront être nuls en même temps que t; ce qui donnera

$$D=\frac{p}{2k}\,\mathrm{Log.}\left(-2k\,\frac{a}{p}+V\mathrm{Cos.}\alpha\right),$$

$$E=\frac{q}{2k}\,\mathrm{Log.}\left(-2k\,\frac{b}{q}+V\mathrm{Cos.}\beta\right),$$

$$F=\frac{r}{2k}\,\mathrm{Log.}\left(-2k\,\frac{c}{r}+V\mathrm{Cos.}\gamma\right);$$

d'où, en retranchant,

$$\left.\begin{aligned}
t&=\frac{p}{2k}\,\mathrm{Log.}\,\frac{2k\,\frac{x-a}{p}+\sqrt{2k^2\left(\frac{x-a}{p}\right)^2+V^2\mathrm{Cos.}^2\alpha-4k^2\,\frac{a^2}{p^2}}}{V\mathrm{Cos.}\alpha-2k\,\frac{a}{p}},\\
t&=\frac{q}{2k}\,\mathrm{Log.}\,\frac{2k\,\frac{y-b}{q}+\sqrt{2k^2\left(\frac{y-b}{q}\right)^2+V^2\mathrm{Cos.}^2\beta-4k^2\,\frac{b^2}{q^2}}}{V\mathrm{Cos.}\beta-2k\,\frac{a^2}{q^2}},\\
t&=\frac{r}{2k}\,\mathrm{Log.}\,\frac{2k\,\frac{z-c}{r}+\sqrt{2k^2\left(\frac{z-c}{r}\right)^2+V^2\mathrm{Cos.}^2\gamma-4k^2\,\frac{c^2}{r^2}}}{V\mathrm{Cos.}\gamma-2k\,\frac{c}{r}};
\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

équations entre lesquelles éliminant t, on aura d'abord, pour la double équation de la trajectoire décrite

$$\left\{\frac{2k\,\frac{x-a}{p}+\sqrt{4k^2\left(\frac{x-a}{p}\right)^2+V^2\mathrm{Cos.}^2\alpha-4k^2\,\frac{a^2}{p^2}}}{V\mathrm{Cos.}\alpha-2k\,\frac{a}{p}}\right\}^{p}$$

$$=\left\{\frac{2k\,\frac{y-b}{q}+\sqrt{2k^2\left(\frac{y-b}{q}\right)^2+V^2\mathrm{Cos.}^2\beta-4k^2\,\frac{b^2}{q^2}}}{V\mathrm{Cos.}\beta-2k\,\frac{b}{q}}\right\}^{q}\qquad(23)$$

$$=\left\{\frac{2k\,\frac{z-c}{q}+\sqrt{4k^2\left(\frac{z-c}{r}\right)^2+V^2\mathrm{Cos}^2\gamma-4k^2\,\frac{c^2}{r^2}}}{V\mathrm{Cos.}\gamma-2k\frac{c}{r}}\right\}^{r}$$

Les mêmes équations (22) peuvent être écrites comme il suit :

$$\left(V\mathrm{Cos.}\alpha-2k\,\frac{a}{p}\right)e^{\frac{2kt}{p}}-2k\,\frac{x-a}{p}=\sqrt{4k^2\left(\frac{x-a}{p}\right)^2+V^2\mathrm{Cos.}^2\alpha-4k^2\,\frac{a^2}{p^2}}\;,$$

$$\left(V\mathrm{Cos.}\beta-2k\,\frac{b}{q}\right)e^{\frac{2kt}{q}}-2k\,\frac{y-b}{q}=\sqrt{4k^2\left(\frac{y-b}{q}\right)^2+V^2\mathrm{Cos.}^2\beta-4k^2\,\frac{b^2}{q^2}}\;,$$

$$\left(V\mathrm{Cos.}\gamma-2k\,\frac{c}{r}\right)e^{\frac{2kt}{r}}-2k\,\frac{z-c}{r}=\sqrt{4k^2\left(\frac{z-c}{r}\right)^2+V^2\mathrm{Cos.}^2\gamma-4k^2\,\frac{c^2}{r^2}}\;;$$

carrant alors les deux membres, réduisant et divisant respectivement par $V\mathrm{Cos.}\alpha-2k\,\frac{a}{p}$, $V\mathrm{Cos.}\beta-2k\,\frac{b}{q}$, $V\mathrm{Cos.}\gamma-2k\,\frac{c}{r}$, il viendra, en transposant,

$$\left.\begin{aligned}
x&=a+\frac{4}{4k}\left\{\left(V\text{Cos.}\alpha-2k\,\frac{a}{p}\right)e^{\frac{2kt}{p}}-\left(V\text{Cos.}\alpha+2k\,\frac{a}{p}\right)e^{-\frac{2kt}{p}}\right\},\\
y&=b+\frac{q}{4k}\left\{\left(V\text{Cos.}\beta-2k\,\frac{b}{q}\right)e^{\frac{2kt}{q}}-\left(V\text{Cos}\,\beta+2k\,\frac{b}{q}\right)e^{-\frac{2kt}{q}}\right\},\\
z&=c+\frac{r}{4k}\left\{\left(V\text{Cos.}\gamma-2k\,\frac{c}{r}\right)e^{\frac{2kt}{r}}-\left(V\text{Cos.}\gamma+2k\,\frac{c}{r}\right)e^{-\frac{2kt}{r}}\right\};
\end{aligned}\right\}\quad(24)$$

et telles seront finalement les équations du mouvement de la molécule.

Si l'on suppose c et Cos γ nuls, c'est-à-dire, si l'une des sections principales communes à toutes les couches de densité constante est dans le plan des xy, et que la direction de la molécule à son passage par l'origine, soit aussi dans ce plan, on aura $z=0$, quel que soit t ; c'est-à-dire que, pendant toute la durée du mouvement, la molécule ne sortira pas de ce plan, ce qui est d'ailleurs évident, puisqu'alors tout se trouvera de part et d'autre dans les mêmes circonstances.

Si les couches de densité constante sont sphériques, on aura $p=q=r$, et par suite

$$x=a+\frac{1}{4k}\left\{(rV\text{Cos.}\alpha-2ka)e^{\frac{2kt}{r}}-(rV\text{Cos.}\alpha+2ka)e^{-\frac{2kt}{r}}\right\},$$

$$y=b+\frac{1}{4k}\left\{(rV\text{Cos}\,\beta-2kb)e^{\frac{2kt}{r}}-(rV\text{Cos.}\beta+2kb)e^{-\frac{2kt}{r}}\right\},$$

$$z=c+\frac{1}{4k}\left\{(rV\text{Cos.}\gamma-2kc)e^{\frac{2kt}{r}}-(rV\text{Cos.}\gamma+2kc)e^{-\frac{2kt}{r}}\right\}.$$

On tirera de là

$$cy-bz=\frac{rV}{4k}\left(e^{\frac{2kt}{r}}-e^{-\frac{2kt}{r}}\right)(c\text{Cos.}\beta-b\text{Cos.}\gamma)\ ,$$

$$az-cx=\frac{rV}{4k}\left(e^{\frac{2kt}{r}}-e^{-\frac{2kt}{r}}\right)(a\text{Cos.}\gamma-c\text{Cos.}\alpha)\ ,$$

$$bx-ay=\frac{rV}{4k}\left(e^{\frac{2kt}{r}}-e^{-\frac{2kt}{r}}\right)(b\text{Cos.}\alpha-a\text{Cos}\,\beta)\ ;$$

et par suite

$$(cy-bz)\text{Cos.}\alpha+(az-cx)\text{Cos.}\beta+(by-ay)\text{Cos.}\gamma=0\ ,$$

ou bien

$$(b\text{Cos.}\gamma-c\text{Cos.}\beta)x+(c\text{Cos.}\alpha-a\text{Cos.}\gamma)y+(a\text{Cos.}\beta-b\text{Cos.}\alpha)=0\ ;$$

la trajectoire est donc plane, dans ce cas, comme on pouvait bien le prévoir. Son plan passe évidemment par l'origine et par le centre commun des couches de densité constante.

Si, dans les équations (24), on suppose a, b, Cos.α, Cos.β nuls, c'est-à-dire, si l'on suppose que l'un des diamètres principaux commun à toutes les couches de densité constante est dans l'axe des z, et qu'à son passage à l'origine, la molécule est dirigée suivant cet axe, on aura x et y nuls, quel que soit t; c'est-à-dire que, pendant toute la durée du mouvement, la molécule ne sortira pas de cet axe des z; ce qui d'ailleurs est évident, puisqu'alors, d'après ce qui a été dit ci-dessus, elle ne doit sortir ni du plan des xz ni de celui des yz.

Pour donner un exemple du second cas, c'est-à-dire, de celui où des circonstances du mouvement il faut conclure la nature du milieu ; supposons que les équations du mouvement de la molécule soient

$$x=a-\sqrt{(a-Vt\,\mathrm{Cos}.\alpha)^2-4k^2\left(\frac{p}{a}\right)^2t^2}\,,$$

$$y=b-\sqrt{(b-Vt\,\mathrm{Cos}.\beta)^2-4k^2\left(\frac{q}{b}\right)^2t^2}\,,$$

$$z=c-\sqrt{(c-Vt\,\mathrm{Cos}.\gamma)^2-4k^2\left(\frac{r}{c}\right)^2t^2}\,,$$

et proposons-nous d'en conclure la valeur de u, en x, y, z. On voit d'abord qu'à l'origine des temps la molécule se trouvera l'origine des coordonnées.

Par une première différentiation, on déduit de là

$$\frac{dx}{dt}=\frac{aV\,\mathrm{Cos}.\alpha-\left(V^2\,\mathrm{Cos}.^2\alpha-4k^2\,\frac{p^2}{a^2}\right)t}{\sqrt{(a-Vt\,\mathrm{Cos}.\alpha)^2-4k^2\left(\frac{p}{a}\right)^2t^2}}\,,$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{bV\,\mathrm{Cos}\,\beta-\left(V^2\,\mathrm{Cos}.^2\beta-4k^2\,\frac{q^2}{b^2}\right)t}{\sqrt{(b-Vt\,\mathrm{Cos}.\beta)^2-4k^2\left(\frac{q}{b}\right)^2t^2}}\,,$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{cV\,\mathrm{Cos}.\gamma-\left(V^2\,\mathrm{Cos}.^2\gamma-4k^2\,\frac{r^2}{c^2}\right)t}{\sqrt{(c-Vt\,\mathrm{Cos}.\gamma)^2-4k^2\left(\frac{r}{c}\right)^2t^2}}\,;$$

d'où l'on voit que la vîtesse initiale de la molécule est V, et que sa direction initiale fait, avec les axes des x, y, z, des angles respectivement égaux à α, β, γ.

En différentiant de nouveau, il vient

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{4k^2p^2}{\left\{(a-Vt\mathrm{Cos}.\alpha)^2-4k^2\left(\frac{p}{a}\right)^2t^2\right\}^{\frac{3}{2}}}=-\frac{4k^2p^2}{(x-a)^3}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\frac{4k^2q^2}{\left\{(b-Vt\mathrm{Cos}.\beta)^2-4k^2\left(\frac{q}{b}\right)^2t^2\right\}^{\frac{3}{2}}}=-\frac{4k^2q^2}{(y-b)^3}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=\frac{4k^2r^2}{\left\{(c-Vt\mathrm{Cos}.\gamma)^2-4k^2\left(\frac{r}{c}\right)^2t^2\right\}^{\frac{3}{2}}}=-\frac{4k^2r^2}{(z-c)^3}\,;$$

on aura donc aussi (16)

$$2k^2P=-\frac{4k^2p^2}{(x-a)}\,,\quad 2k^2Q=-\frac{4k^2q^2}{(y-b)^3}\,,\quad 2k^2R=-\frac{4k^2r^2}{(z-c)^3}\,;$$

c'est-à-dire,

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)=P=-\frac{2p^2}{(x-a)^3}\,,\quad\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)=Q=-\frac{2q^2}{(y-b)^3}\,,\quad\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)=R=-\frac{2r^2}{(z-c)^3}\,;$$

d'où

$$\mathrm{d}u=-\frac{2p^2\mathrm{d}x}{(z-a)^3}-\frac{2q^2\mathrm{d}y}{(y-b)^3}-\frac{2r^2\mathrm{d}z}{(z-c)^3}\,;$$

et, par suite, en intégrant,

$$u=\left(\frac{p}{x-a}\right)^2+\left(\frac{q}{q-y}\right)^2+\left(\frac{r}{z-c}\right)^2;$$

telle est donc la définition du milieu dont il s'agit. Nous n'ajoutons point de constante, attendu qu'en augmentant ou en diminuant, d'une même quantité, la densité de tous les points du milieu, on ne change rien aux circonstances du phénomène.

Lorsque le milieu est symétrique par rapport à un plan et que la direction initiale de la molécule est comprise dans ce plan, c'est-à-dire, lorsque les surfaces courbes de densité constante ont toutes une section principale commune dont le plan contient la direction de la molécule lumineuse, pour un instant quelconque, cette molécule ne sort pas de ce plan et décrit conséquemment une courbe plane. En prenant donc le plan de sa trajectoire pour le plan des xy, $\frac{dz}{dt}$ sera nul; de sorte qu'on n'aura à considérer que les deux équations

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2k^2P\ , \quad \frac{d^2y}{dt^2}=2k^2Q\ . \qquad (25)$$

C'est, par exemple, le cas où les couches de densité constante étant des surfaces cylindriques, ayant toutes leurs élémens rectilignes parallèles à une même droite fixe, la molécule serait mue dans un plan perpendiculaire à cette droite.

Si donc les couches de densité constante se trouvaient symétriques par rapport à tous les plans conduits par un même point fixe, la trajectoire décrite par la molécule serait contenue dans un plan passant par ce point fixe, quelle que pût être d'ailleurs la direction initiale de son mouvement. Tel serait, par exemple, le cas où les couches de densité constante seraient sphériques et concentriques; et tel serait aussi le cas où elles seraient planes et parallèles; des plans parallèles pouvant être considérés comme des portions de sphères concentriques, dont le rayon est infini.

Si le milieu était symétrique par rapport à deux ou à un plus grand nombre de plans, se coupant suivant la même droite, et que la direction initiale de la molécule coïncidât avec cette droite, il est clair qu'elle n'en sortirait pas dans tout le mouvement; de sorte que la trajectoire serait rectiligne. En prenant donc cette droite pour axe des x, on n'aurait à considérer que la seule équation

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2k^2P\ . \qquad (26)$$

C'est, par exemple, le cas où les couches de densité constante seraient des surfaces de révolution ayant un axe commun avec lequel coïnciderait, à un instant quelconque, la direction du mouvement de la molécule, et c'est encore le cas où les couches de densité constante étant des plans parallèles, la molécule serait dirigée perpendiculairement à ces plans; enfin ce serait aussi le cas d'un milieu homogène, quelle que pût être d'ailleurs la direction initiale de la molécule; puisqu'alors cette direction serait toujours perpendiculaire à des couches planes parallèles de densité constante; mais dans ce dernier cas, le mouvement serait non seulement rectiligne, mais encore uniforme.

Lorsqu'on n'a aucun intérêt à connaître le lieu de la molécule lumineuse à chaque instant de son mouvement et qu'on veut seulement savoir qu'elle est la trajectoire décrite, ce qui est le cas le plus ordinaire, il faut, pour obtenir les équations générales du problème, éliminer t entre les trois équations (16); ce qui exige qu'on change d'abord d'hypothèse relativement à la variable indépendante. En prenant x pour cette variable

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{d^2x}{dt^2}\\[3em] \dfrac{d^2y}{dt^2}\\[3em] \dfrac{d^2z}{dt^2}\end{array}\right\}\ \text{deviendront respectivement}\ \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\dfrac{d^2t}{dx^2}}{\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^3}\,, \\[2em] \dfrac{\dfrac{d^2y}{dx^2}\dfrac{dt}{dx}-\dfrac{dy}{dx}\dfrac{d^2t}{dx^2}}{\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^3}\,, \\[2em] \dfrac{\dfrac{d^2z}{dx^2}\dfrac{dt}{dx}-\dfrac{dz}{dx}\dfrac{d^2t}{dx^2}}{\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^3}\,; \end{array}\right.$$

au moyen de quoi les équations (16) se changent dans les suivantes :

$$-\frac{d^2t}{dx^2}=2k^2P\left(\frac{dt}{dx}\right)^3,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{dt}{dx}-\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2t}{dx^2}=2k^2Q\left(\frac{dt}{dz}\right)^3,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}\,\frac{dt}{dx}-\frac{dz}{dx}\,\frac{d^2t}{dx^2}=2k^2R\left(\frac{dt}{dx}\right)^3.$$

Éliminant $\frac{d^2t}{dx^2}$ des deux dernières, au moyen de la première, elles deviennent, en divisant par $\frac{dt}{dx}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2k^2\left(Q-P\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right)^2$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=2k^2\left(R-P\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right)^2;$$

mais, dans l'hypothèse actuelle, l'équation (13) devient

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2=(w^2+4k^2u)\left(\frac{dt}{dx}\right)^2;$$

éliminant donc $\left(\frac{dt}{dx}\right)^2$ des deux précédentes, au moyen de cette dernière, on obtiendra, pour les deux équations différentielles de la trajectoire décrite,

$$\left.\begin{aligned}(w^2+4k^2u)\frac{d^2y}{dx^2}&=2k^2\left(Q-P\frac{dy}{dx}\right)\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\},\\(w^2+4k^2u)\frac{d^2z}{dx^2}&=2k^2\left(R-P\frac{dz}{dx}\right)\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\};\end{aligned}\right\}(27)$$

mais il sera communément plus simple de recourir aux équations (16).

Dans un prochain article, nous nous occuperons proprement du phénomène du mirage.