
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

**Géométrie de situation. Note sur une inadvertance grave,
commise à la pag. 336 du précédent volume**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 32-35

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__32_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1828-1829, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

*Note sur une inadvertance grave , commise à
la pag. 336 du précédent volume ;*

Par M. GERGONNE.



Soit qu'on assujettisse une courbe plane à passer par un point donné ou qu'on exige qu'elle touche une droite donnée, il n'en résulte jamais qu'une condition unique, propre seulement à déterminer un des coefficients de son équation ; et si l'on assujettit à la

fois cette courbe à passer par un point donné et à toucher une droite donnée, cela ne devra compter que pour deux conditions seulement, propres à déterminer deux des coefficients de son équation ; il importe peu d'ailleurs que le point donné soit hors de la droite donnée ou qu'il soit situé sur cette droite.

Si, en effet, dans le dernier cas, (a, b) est le point donné, l'équation de la droite donnée sera de la forme

$$y-b=m(x-a) ;$$

il faudra d'abord exprimer que le point (a, b) satisfait à l'équation de la courbe, ce qui donnera une première équation de condition ; il faudra ensuite exprimer que la tangente à la courbe en ce point, dont l'équation sera de la forme

$$y-b=M(x-a) ,$$

coïncide avec la droite donnée, ce qui donnera, pour seconde équation de condition, $M=m$.

On voit, en particulier, que, si deux triangles sont inscrit et circonscrit l'un à l'autre, assujettir une courbe à être à la fois circonscrite à l'un et inscrite à l'autre, c'est l'assujettir à six conditions distinctes ; si donc il s'agit d'une ligne du second ordre, dont la détermination n'exige, comme l'on sait, que cinq conditions seulement, le problème sera plus que déterminé ; il ne sera donc possible que sous certaine condition ; aussi a-t-on vu (tom. XVIII, pag. 323) qu'il fallait pour cela que les points de concours des directions des côtés opposés dans les deux triangles, appartenissent tous trois à une même droite. On a vu aussi qu'il fallait que les droites, qui joignaient les sommets opposés des deux triangles, concourussent toutes trois en un même point ; mais ce n'est point là une seconde condition, car on a vu (tom. XVI, pag. 219) que ces deux conditions se comportent réciproquement.

Soit qu'on assujettisse une surface courbe à passer par un point donné ou qu'on exige qu'elle touche un plan donné, il n'en résulte jamais qu'une condition unique, propre seulement à déterminer un des coefficients de son équation. Si on l'assujettit à la fois à passer par un point donné et à toucher un plan donné, il y aura à faire une distinction qui n'a pas lieu dans la géométrie plane. Ou bien le point donné sera situé hors du plan donné, auquel cas cela ne devra compter que pour deux conditions propres seulement à déterminer deux des coefficients de l'équation de cette surface, ou bien le point donné sera situé dans le plan donné, et alors les deux conditions devront compter pour trois, propres à déterminer un nombre égal de coefficients.

Si, en effet, dans le dernier cas (a, b, c) est le point donné, l'équation du plan donné sera de la forme

$$z-c=p(x-a)+q(y-b) ;$$

il faudra d'abord exprimer que le point (a, b, c) satisfait à l'équation de la surface proposée, ce qui donnera une première équation de condition; il faudra ensuite exprimer que le plan tangent à la surface en ce point, dont l'équation sera de la forme

$$z-c=P(x-a)+Q(y-b) ,$$

coïncide avec le plan donné, ce qui donnera les deux autres équations de condition $P=p, Q=q$.

On voit, en particulier, que, si deux tétraèdres sont inscrit et circonscrit l'un à l'autre, assujettir une surface courbe à être à la fois circonscrite à l'un et inscrite à l'autre, c'est l'assujettir à *douze* conditions distinctes, et non pas à *huit*, comme nous l'avions dit par une inadvertance tout à fait impardonnable, et justement relevée par M. Bobillier dans la note de la page 336 du précédent

volume ; note qui , conséquemment , doit être réputée non avenue. Si donc la surface est du second ordre seulement , comme *neuf* conditions suffisent pour déterminer une telle surface , le problème sera plus que déterminé et ne sera possible que sous certaines conditions ; aussi MM. Steiner et Bobillier ont-ils reconnu l'un et l'autre qu'alors les droites , suivant lesquelles se coupent les plans des faces opposées des deux tétraèdres , doivent appartenir toutes quatre à une même surface gauche du second ordre , et que les droites qui joignent les sommets opposés de ces tétraèdres doivent aussi appartenir à une même surface gauche de cet ordre (*).

Mais voilà qu'après avoir accusé ces deux élégans théorèmes de pécher par excès , nous sommes présentement obligés de les accuser de pécher par défaut , c'est-à-dire , d'être incomplets. En admettant , en effet , qu'ils ne se comportent pas l'un et l'autre , comme leurs analogues , dans la géométrie plane , ce qui est tout au moins très-douteux , ils ne constitueraient encore que *deux* conditions distinctes , tandis qu'ici le nombre des conditions imposées excède de *trois* unités le nombre de celles qui sont nécessaires pour la détermination complète de la surface dont il s'agit. Voilà donc un sujet de recherche dont le défaut de loisir ne nous permet malheureusement pas de nous occuper dans ce moment , mais auquel les deux estimables géomètres , auteurs de l'un et de l'autre théorèmes , voudront peut-être bien donner quelque attention.

(*) Au moment où nous corrigeons l'épreuve de cette feuille , nous recevons une lettre de M. Chasles qui signale également l'inconcevable erreur dont nous faisons ici l'humble aveu.