# ANNALES

# DE MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES.

## *CONDITIONS DE LA SOUSCRIPTION.*

Depuis le premier juillet 1810, ce Recueil paraît régulièrement de mois en mois, par livraisons de 30 à 40 pages d'impression, non compris les planches.

On peut adresser indistinctement les demandes de souscription,

Au Rédacteur des *Annales*, rue du St-Sacrement, n.° 5, à Montpellier [ Hérault ];

A M. *Bachelier*, gendre *Courcier*, libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n.° 55, à Paris;

Et à tous les bureaux de poste.

Les articles à insérer et les ouvrages à annoncer doivent être envoyés, franc de port, à la première de ces adresses.

Le prix de la souscription annuelle est 21 fr. pour la France, et 24 fr. pour l'étranger.

# ANNALES

DE

# MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

## RECUEIL PÉRIODIQUE,

RÉDIGÉ ET PUBLIÉ

Par J. D. GERGONNE, professeur à la faculté des sciences de Montpellier, membre de plusieurs sociétés savantes.

TOME VINGT-UNIÈME.

A NISMES,

DE L'IMPRIMERIE DE P. DURAND-BELLE.

Et se trouve à PARIS, chez M. BACHELIER, gendre COURCIER, libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n.° 55.

1830 ET 1831.

# ANNALES
# DE MATHÉMATIQUES
# PURES ET APPLIQUÉES.


## GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

### *De la courbure des courbes planes* ;

Par M. GERGONNE.

C'EST principalement dans les recherches relatives à la courbure soit des courbes planes, soit des surfaces courbes, soit des courbes à double courbure, que se montre dans tout son jour l'utilité des notations différentielles, et il suffirait, pour s'en convaincre, de comparer ce que nous allons dire ici sur ce sujet avec ce que nous en avons dit à la pag. 127 de notre IX.me volume, où nous nous étions imposés la loi de ne faire usage que des notations de l'analyse élémentaire. Nous n'aurions donc pas hésité à débuter par ce genre d'application, si nous n'eussions pensé qu'en nous en occupant, nous pourrions avoir quelquefois besoin de nous appuyer sur la théorie des *maxima* et *minima*, et si nous n'avions désiré de n'avoir alors qu'à renvoyer à des principes déjà établis.

Nous devons rappeler ici ce que nous avons déjà dit ailleurs, savoir, que nous ne saurions avoir le dessein d'écrire un traité complet sur la matière, mais seulement de montrer à quel point l'emploi des notations différentielles facilite les recherches de haute géométrie et en généralise les résultats. Il ne sera question, au surplus, dans le présent article, que des courbes planes; d'autres articles seront consacrés aux surfaces courbes et aux courbes à double courbure.

I. Soit

$$\mathrm{f}(x,y)=S=0\,, \qquad (1)$$

une équation en $x$ et $y$ exprimant une courbe plane quelconque, rapportée à deux axes de direction arbitraire; et soit $(x',y')$ un quelconque des points du périmètre de cette courbe; de telle sorte qu'on ait

$$\mathrm{f}(x',y')=S'=0\,. \qquad (2)$$

Pour transporter en ce point l'origine des coordonnées, sans changer la direction des axes, il faudra faire, comme l'on sait,

$$x=x'+t\,, \qquad y=y'+u\,; \qquad (3)$$

$t$ et $u$ étant les symboles des nouvelles coordonnées. Or, cela revient évidemment à supposer que, dans (2), $x'$ et $y'$ se changent respectivement en $x'+t$ et $y'+u$, ce qui donnera ( tom. XX, pag. 258 ), en ayant égard à cette même équation (2),

$$0=\left.\begin{array}{l}\dfrac{dS'}{dx'}\,t \\[2ex] +\dfrac{dS'}{dy'}\,u\end{array}\right|\frac{1}{1}+\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2S'}{dx'^2}\,t^2 \\[2ex] +2\dfrac{d^2S'}{dx'dy'}\,tu \\[2ex] +\dfrac{d^2S'}{dy'^2}\,u^2\end{array}\right|\frac{1}{1.2}+\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^3S'}{dx'^3}\,t^3 \\[2ex] +3\dfrac{d^3S'}{dx'^2dy'}\,t^2u \\[2ex] +3\dfrac{d^3S'}{dx'dy'^2}\,tu^2 \\[2ex] +\dfrac{d^3S'}{dy'^3}\,u^3\end{array}\right|\frac{1}{1.2.3}\left.\begin{array}{l}+\ldots \\[2ex] +\ldots \\[2ex] +\ldots \\[2ex] +\ldots \\[2ex] +\ldots\end{array}\right\} ;\quad (4)$$

et telle sera conséquemment l'équation de la courbe (1), rapportée aux nouveaux axes ; équation dans laquelle $x'$ et $y'$ sont deux constantes indéterminées, équivalentes à une seule, attendu qu'elles sont liées par la relation (2). On repassera, d'ailleurs, au système primitif au moyen des équations (3) qui donnent

$$t=x-x' \,, \qquad u=y-y' \,. \qquad (5)$$

L'équation (4) peut être regardée comme fondamentale dans toute la théorie qui va nous occuper.

II. Si l'on ne veut considérer qu'un très-petit arc de la courbe, s'étendant fort peu de part et d'autre de l'origine des $t$ et $u$ ; pour tous les points de cet arc, $t$ et $u$ seront de fort petites quantités ; de sorte qu'on pourra, sans erreur sensible, négliger, dans l'équation (4), les termes de plus d'une dimension, par rapport à ces variables ; la suppression de ces termes aura, au surplus, d'autant moins d'influence que l'arc considéré sera plus petit. Ainsi, plus il sera petit et plus il tendra à avoir pour équation

$$\frac{dS'}{dx'}\,t+\frac{dS'}{dy'}\,u=0 \;; \qquad (6)$$

cette équation représentera donc *rigoureusement* l'arc dont il s'agit, lorsque cet arc se réduira à l'origine des $t$ et $u$. On peut donc dire que l'équation (6) est celle de la droite qui, à l'origine des $t$ et $u$, a exactement la même direction que la courbe en ce point. Une telle droite est dite une *tangente* à la courbe (1) au point $(x',y')$, qui est dit son *point de contact* avec elle.

La droite (1) tant qu'elle ne se confond pas avec l'un des axes, passe nécessairement dans deux des quatre angles des coordonnées opposés par le sommet ; puis donc qu'elle tend d'autant plus à se confondre avec un arc de la courbe, que cet arc s'étend moins de part et d'autre de l'origine des $t$ et $u$, il en faut conclure que, quand aucun des deux axes n'est tangent à la courbe, on peut toujours concevoir un arc s'étendant assez peu, de part et d'autre, de l'origine des $t$ et $u$, pour que les deux parties de cet arc, déterminées par ce point, soient situées dans deux angles des coordonnées opposés par le sommet, et conséquemment pour que $t$ et $u$ changent de signes, à la fois, en passsant d'un côté à l'autre de l'origine.

III. Pour mieux connaître la nature de cette droite que nous avons nommée tangente, conduisons, par l'origine des $t$ et $u$, une droite arbitraire ayant pour équation

$$u=Mt\,, \qquad (7)$$

où $M$ est une indéterminée. Pour avoir les intersections de cette droite avec la courbe, il faudra, dans les équations (4) et (7), considérer $t$ et $u$ comme les deux inconnues d'un même problème déterminé. Or, la substitution de la valeur (7) de $u$, dans l'équation (4), donne

$$0=t\left\{\left(\frac{dS'}{dx'}+\frac{dS'}{dy'}M\right)+\left(\frac{d^2S'}{dx'^2}+2\frac{d^2S'}{dx'dy'}M+\frac{d^2S'}{dy'^2}M^2\right)\frac{t}{1.2}+\ldots\right\}; \qquad (8)$$

telle est donc l'équation qui donnera les valeurs de $t$ qui répondent aux intersections de la droite (7) avec la courbe (4) ; valeurs qui, substituées dans l'équation (7), feront connaître les valeurs correspondantes de $u$.

Or, l'équation (8) est d'abord satisfaite en posant $t=0$, d'où résulte aussi $u=0$ ; et c'est là ce qu'on pouvait fort bien prévoir à l'avance, puisque l'origine des $t$ et $u$ est, par construction, un point commun à la droite et à la courbe. L'équation (8), délivrée de cette racine, devient

$$0=\left(\frac{dS'}{dx'}+\frac{dS'}{dy'}M\right)+\left(\frac{d^2S'}{dx'^2}+2\frac{d^2S'}{dx'dy'}M+\frac{d^2S'}{dy'^2}M^2\right)t+\ldots., \quad (9)$$

et doit donner les valeurs de $t$ qui répondent aux intersections, autres que l'origine des $t$ et $u$, de la droite (7) avec la courbe (4) ; intersections qui pourront être plus ou moins nombreuses, et dont la situation, sur cette courbe, variera avec $M$, c'est-à-dire, avec la direction de la droite (7).

Si l'on veut profiter de l'indétermination de $M$, pour faire en sorte qu'un nouveau point d'intersection vienne se confondre avec le premier, à l'origine des $t$ et $u$, il faudra faire en sorte que l'équation (9) soit, comme l'équation (8), satisfaite en posant $t=0$ ; ce qui exigera qu'on ait

$$\frac{dS'}{dx'}+\frac{dS'}{dy'}M=0\,; \qquad (10)$$

équation qui déterminera la valeur de $M$ qui satisfait à cette condition. Or, cette valeur, substituée dans l'équation (7). fait retomber de nouveau sur l'équation (6) de la tangente à l'origine des $t$ et $u$ ; donc la tangente à une courbe, en l'un de ses points, n'est autre chose que ce que deviendrait une corde qui, passant par ce point, tournerait sur lui, jusqu'à ce que sa longueur serait devenue tout à fait nulle ; d'où il suit qu'une tangente à une courbe peut être considérée comme ayant, avec cette courbe, deux points communs qui se confondent en un seul.

Puisque la tangente à une courbe a, en son point de contact, même direction que la courbe en ce point, il s'ensuit que, par le point de contact d'une tangente, il est impossible de mener une droite qui, à partir de ce point, passe entre elle et la courbe; car la direction d'une telle droite s'approchant plus alors de celle de la courbe que ne le ferait la direction de la tangente, il ne serait plus vrai de dire que cette dernière direction est, au point de contact, celle de la courbe même.

IV. Si, continuant à représenter par $t$ et $u$ les deux coordonnées d'un même point quelconque de la courbe, on représente par $u_1$ la coordonnée de la tangente qui répond à $t$, on aura (6)

$$0=\frac{dS'}{dx'}t+\frac{dS'}{dy'}u_1 \,. \qquad (11)$$

En retranchant cette équation de l'équation (4), il viendra

$$-\frac{dS'}{dy'}(u-u_1)=\frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2S'}{dx'^2}t^2+2\frac{d^2S'}{dx'dy'}tu+\frac{d^2S'}{dy'^2}u^2\right)+\ldots. \qquad (12)$$

Or, on peut toujours supposer $t$ et $u$ assez petits, sans être nuls, pour ne faire dépendre le signe du second membre que du signe de l'ensemble de ses termes de deux dimensions, lequel reste invariablement le même si $t$ et $u$ changent de signes à la fois, comme il arrive en passant d'un côté à l'autre de l'origine, d'après la remarque qui a été faite ci-dessus; donc aussi on peut toujours concevoir un arc s'étendant assez peu de part et d'autre de l'origine des $t$ et $u$, pour que, dans toute son étendue, $u-u_1$ conserve invariablement le même signe; ce qui revient à dire qu'on peut toujours concevoir un arc de courbe s'étendant assez peu de part et d'autre de son point de contact avec une tangente, pour que cet arc soit entièrement situé d'un même côté de cette tangente. La tangente à une courbe, en un quelconque de ses points, touche donc la courbe sans la couper en ce point.

Nous disons *en un quelconque de ses points*, car, si l'origine des $t$ et $u$, ou le point $(x',y')$, était tellement choisi sur la courbe, qu'on eût, à la fois,

$$\frac{d^2S'}{dx'^2}=0\,,\quad \frac{d^2S'}{dx'dy'}=0\,,\quad \frac{d^2S'}{dy'^2}=0\,,\qquad (13)$$

ce qui ne saurait, au surplus, avoir généralement lieu, puisque ces trois équations sont déjà généralement incompatibles, et qu'il faut y joindre encore l'équation (2) $S'=0$; l'équation (12) devenant alors

$$-\frac{dS'}{dy'}(u-u_1)=\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{d^3S'}{dx'^3}t^3+3\frac{d^3S'}{dx'^2dy'}t^2u+3\frac{d^3S'}{dx'dy'^2}tu^2+\frac{d^3S'}{dy'^3}u^3\right)+\dots;\ (14)$$

comme on pourrait toujours prendre $t$ et $u$ assez petits, sans être nuls, pour ne faire dépendre le signe de tout le second membre que du signe de l'ensemble de ses termes de trois dimensions, lequel change, en passant d'un côté à l'autre de l'origine des $t$ et $u$, il s'ensuit qu'alors on pourrait toujours prendre un arc de la courbe s'étendant assez peu de part et d'autre du point de contact de la tangente, pour qu'en passant d'un côté à l'autre de ce point, $u-u_1$ changeât de signe; ce qui revient à dire que les deux parties de cet arc, déterminées par le point de contact, se trouveraient alors situées de différens côtés de la tangente qui, de la sorte, toucherait et couperait la courbe en ce point. Un tel point d'une courbe est ce qu'on appelle un *point d'inflexion*.

Dans la même hypothèse, en posant l'équation (10), l'équation (9) deviendrait divisible par $t^3$; il y aurait donc alors, outre l'origine des $t$ et $u$, deux autres points communs à la droite (6) et à la courbe (4) qui viendraient se confondre avec celui-là;

ce qui revient à dire que la tangente à un point d'inflexion d'une courbe peut être considérée comme ayant, avec cette courbe, trois points communs qui se confondent en un seul.

Veut-on savoir si une courbe proposée a des points d'inflexion et en assigner la situation, sur la courbe? Il ne s'agira, pour cela, que d'éliminer $x'$ et $y'$ entre les équations (13) et l'équation (2); on obtiendra ainsi deux équations entre quantités connues, lesquelles ne pourront être qu'identiques ou absurdes; si elles sont toutes deux identiques, la courbe aura un ou plusieurs points d'inflexion, dont la situation sera fixée par les systèmes de valeurs de $x'$ et $y'$ tirées de deux quelconques de ces quatre équations; mais si une seule des équations entre quantités connues est absurde, et, à plus forte raison, si elles le sont toutes deux, on devra en conclure que la courbe n'a aucun point d'inflexion.

On se comporterait exactement de la même manière si, l'équation d'une courbe contenant des coefficiens indéterminés, au nombre de deux au moins, on voulait profiter de leur indétermination pour faire acquérir à la courbe un ou plusieurs points d'inflexion. Seulement les deux équations auxquelles on parviendrait ne seraient proprement ni identiques ni absurdes; ce serait des équations de condition, exprimant les relations que devraient avoir entre eux les coefficiens indéterminés pour que de tels points existassent. Ces relations ainsi admises, la situation des points d'inflexion se déterminerait comme il vient d'être dit ci-dessus.

En raisonnant d'une manière analogue, on parviendra facilement à démontrer que si, pour l'un $(x',y')$ des points d'une courbe, outre les équations (13), on a encore

$$\frac{d^3S'}{dx'^3}=0,\quad \frac{d^3S'}{dx'^2dy'}=0,\quad \frac{d^3S'}{dx'dy'^2}=0,\quad \frac{d^3S'}{dy'^3}=0;\quad (15)$$

la courbe sera toute située d'un même côté de sa tangente en ce point, laquelle conséquemment la touchera en ce même point, sans la couper, et pourra être considérée comme ayant, avec la courbe, quatre points communs se confondant en un seul; que si l'on a, en outre, pour ce point,

$$\frac{d^4S'}{dx'^4}=0, \quad \frac{d^4S'}{dx'^3dy'}=0, \quad \frac{d^4S'}{dx'^2dy'^2}=0, \quad \frac{d^4S'}{dx'dy'^3}=0, \quad \frac{d^4S'}{dy'^4}=0\,; \quad (16)$$

la tangente touchera et coupera alors la courbe, et son point de contact pourra être considéré comme cinq points communs à l'une et à l'autre, se confondant en un seul, et ainsi de suite. La recherche de ces points s'exécutera d'ailleurs comme celle des simples points d'inflexion; mais la chance d'en obtenir ira sans cesse en diminuant, à raison du nombre toujours croissant des équations de conditions auxquelles on aura à satisfaire.

V. En retournant aux coordonnées primitives, au moyen des formules (5), l'équation (6), de la tangente au point $(x', y')$, deviendra

$$\frac{dS'}{dx'}(x-x')+\frac{dS'}{dy'}(y-y')=0\,; \qquad (17)$$

équation dans laquelle les deux constantes $x'$ et $y'$ sont liées entre elles par l'équation (2), et ne doivent ainsi compter que pour une seule. Rien ne sera donc plus facile que d'obtenir l'équation de la tangente à une courbe, par un point donné sur cette courbe.

Si le point $(x', y')$ n'est pas donné, cette équation, en y mettant, pour $x'$, $y'$, tous les systèmes de valeurs compatibles avec la relation (2), pourra indistinctement exprimer toutes les tangentes à la courbe. On pourra donc ainsi profiter de l'indétermination de $x'$ et $y'$ pour assujettir une tangente demandée à une condition donnée.

Si, par exemple, on veut assujettir la tangente à passer par un point donné $(a, b)$, il faudra exprimer que les coordonnées de ce point satisfont à l'équation (17), ce qui donnera

$$\frac{dS'}{dx'}(a-x')+\frac{dS'}{dy'}(b-y')=0 \ ; \qquad (18)$$

équation qui, combinée avec l'équation (2), fera connaître les points de contact de toutes les tangentes qui peuvent être menées à la courbe par le point $(a, b)$.

Au lieu de résoudre les équations (2) et (18), par rapport à $x'$ et $y'$, on peut chercher les intersections des deux courbes qu'elles expriment, ou, ce qui revient au même, chercher les intersections de la courbe (1) avec la courbe exprimée par l'équation

$$\frac{dS}{dx}(x-a)+\frac{dS}{dy}(y-b)=0 \ ; \qquad (19)$$

cette dernière est donc celle d'une courbe qui coupe la proposée aux points de contact de toutes les tangentes qui peuvent lui être menées du point $(a, b)$.

Si l'on demandait de mener à la courbe (1) une tangente parallèle à une droite donnée par l'équation

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\ , \qquad (20)$$

la condition de parallélisme de cette droite avec la droite (17) serait exprimée par l'équation

$$a\frac{dS'}{dx'}+b\frac{dS'}{dy'}=0 \ ; \qquad (21)$$

d'où il suit, en raisonnant comme ci-dessus, que l'équation

$$a\frac{dS}{dx}+b\frac{dS}{dy}=0 \ , \qquad (22)$$

est celle d'une courbe qui coupe la proposée aux points de contact de toutes les tangentes qui peuvent lui être menées parallèlement à la droite (20).

On peut encore se demander de mener une tangente commune à deux courbes données, ou à deux branches d'une même courbe. Supposons d'abord qu'il soit question de deux courbes données par les équations

$$S_1=0\ ,\qquad S_2=0\ ;\qquad (23)$$

soient $(x',y')$, $(x'',y'')$ les points de contact respectifs, sur les deux courbes, ce qui donnera d'abord

$$S'_1=0\ ,\qquad S''_2=0\ ;\qquad (24)$$

cette tangente commune pouvant être (17) indistinctement exprimée par l'une ou l'autre équation

$$\frac{dS'_1}{dx'}(x-x')+\frac{dS'_1}{dy'}(y-y')=0\ ;\quad \frac{dS''_2}{dx''}(x-x'')+\frac{dS''_2}{dy''}(y-y'')=0\ ;$$

lesquelles reviennent à

$$\frac{dS'_1}{dx'}x+\frac{dS'_1}{dy'}y=\frac{dS'_1}{dx'}x'+\frac{dS'_1}{dy'}y'\ ,$$

$$\frac{dS''_2}{dx''}x+\frac{dS''_2}{dy''}y=\frac{dS''_2}{dx''}x''+\frac{dS''_2}{dy''}y''\ ;$$

il faudra écrire que ces deux équations n'expriment qu'une seule et même droite, ce qu'on fera en posant la double équation

$$\frac{\dfrac{dS'_1}{dx'}}{\dfrac{dS''_2}{dx''}}=\frac{\dfrac{dS'_1}{dy'}}{\dfrac{dS''_2}{dy''}}=\frac{\dfrac{dS'_1}{dx'}x'+\dfrac{dS'_1}{dy'}y'}{\dfrac{dS''_2}{dx''}x''+\dfrac{dS''_2}{dy''}y''}\ ;\qquad (25)$$

telles seront donc les deux équations qu'il faudra combiner avec les équations (24) . pour obtenir les divers systèmes de valeurs des coordonnées des deux points de contact $(x', y')$ , $(x'', y'')$.

S'il s'agissait des tangentes communes à deux branches d'une même courbe , il faudrait remplacer $S_1$ et $S_2$ par $S$ ; de sorte qu'en désignant simplement par $(x, y)$ , $(x', y')$ les deux points de contact , les quatre équations à résoudre seraient

$$S=0\ ,\quad S'=0\ ,\quad \frac{\frac{dS}{dx}}{\frac{dS'}{dx'}}=\frac{\frac{dS}{dy}}{\frac{dS'}{dy'}}=\frac{\frac{dS}{dx}x+\frac{dS}{dy}y}{\frac{dS'}{dx'}x'+\frac{dS'}{dy'}y'}\ . \qquad (26)$$

VI. Si l'on suppose les coordonnées rectangulaires , l'équation de la perpendiculaire menée à la tangente (17) , par son point de contact , c'est-à-dire , de la *normale* à la courbe en ce point , sera

$$\frac{dS}{dy'}(x-x')-\frac{dS'}{dx'}(y-y')=0\ ; \qquad (27)$$

équation dans laquelle , comme dans celle de la tangente , les deux constantes $x'$ , $y'$ sont liées entre elles par la relation (2) ; et qui conséquemment pourra indistinctement exprimer toutes les normales à la courbe , si ces deux constantes ne sont liées l'une à l'autre par aucune autre condition.

Si donc on veut particulariser une de ces normales , il faudra établir une second relation entre les constantes $x'$ , $y'$. On pourra donc , en particulier, assujettir la normale à toutes les conditions auxquelles nous venons tout à l'heure d'assujettir la tangente. Comme cela ne saurait offrir de difficultés , d'après ce qui précède, nous nous bornerons ici à donner les résultats.

L'équation

$$\frac{dS}{dy}(x-a)-\frac{dS}{dx}(y-b)=0\ , \qquad (28)$$

est celle d'une courbe qui coupe la courbe (1) aux pieds de toutes les normales qui peuvent lui être menées du point $(a, b)$.

L'équation

$$a\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}-b\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=0\ , \qquad (29)$$

est celle d'une courbe qui coupe la proposée aux pieds de toutes les normales qui peuvent lui être menées parallèlement à la droite (20).

Si l'on veut mener, aux deux courbes (23), une normale commune, les points $(x', y')$, $(x'', y'')$, où se terminera la normale sur les deux courbes, seront donnés par les équations (24), combinées avec la double équation

$$\frac{\frac{\mathrm{d}S'_1}{\mathrm{d}x'}}{\frac{\mathrm{d}S''_2}{\mathrm{d}x''}}=\frac{\frac{\mathrm{d}S'_1}{\mathrm{d}y'}}{\frac{\mathrm{d}S''}{\mathrm{d}y''}}=\frac{\frac{\mathrm{d}S'_1}{\mathrm{d}y'}x'-\frac{\mathrm{d}S'_1}{\mathrm{d}x'}y'}{\frac{\mathrm{d}S''_2}{\mathrm{d}y''}x''-\frac{\mathrm{d}S''_2}{\mathrm{d}x''}y''}\ ; \qquad (30)$$

mais s'il s'agit d'une normale commune à deux branches de la courbe (1), les coordonnées des deux extrémités $(x, y)$, $(x', y')$ de cette normale devront être déterminées par les quatre équations

$$S=0\ , \quad S'=0\ , \quad \frac{\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}'x}}=\frac{\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}}{\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}}=\frac{\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}x-\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}y}{\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}x'-\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}y'}\ . \qquad (31)$$

VII. Dans tout ce qui précède nous avons tacitement supposé que le point $(x', y')$ était quelconque sur la courbe (1) ; mais ce point pourrait être choisi de telle sorte, sur cette courbe, que $\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}$ et $\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}$, fussent tous deux nuls ; ce qui, au surplus, ne saurait avoir lieu généralement, puisque $S'$ est déjà nulle, et que les trois équations

$$S'=0\ ,\quad \frac{dS'}{dx'}=0\ ,\quad \frac{dS'}{dy'}=0\ , \tag{32}$$

sont, en général, incompatibles.

Alors l'équation (4) se réduit à

$$0=\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2S'}{dx'^2}t^2\\[2ex] +2\dfrac{d^2S'}{dx'dy'}tu\\[2ex] +\dfrac{d\,S'}{dy'^2}u^2\end{array}\right|\frac{1}{1.2}+\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^3S'}{dx'^3}t^3\\[2ex] +3\dfrac{d^3S'}{dx'^2dx'}t^2u\\[2ex] +3\dfrac{d^3S'}{dx'dy'^2}tu^2\\[2ex] +\dfrac{d^3S'}{dy'^3}u^3\end{array}\right|\frac{1}{1.2.3}\left.\begin{array}{l}+\ldots\\[2ex]+\ldots\\[2ex]+\ldots\\[2ex]+\ldots\end{array}\right\}. \tag{33}$$

Or, si l'on veut ne considérer qu'un fort petit arc s'étendant très-peu de part et d'autre de l'origine des $t$ et $u$, pour tous les points de cet arc, $t$ et $u$ seront de fort petites quantités; de sorte qu'on pourra, sans erreur sensible, faire abstraction des termes de plus de deux dimensions en $t$ et $u$, dans le second membre de l'équation (33). On peut donc dire que, pour l'arc dont il s'agit, l'équation sera sensiblement

$$\frac{d^2S'}{dx'^2}t^2+2\frac{d^2S'}{dx'dy'}tu+\frac{d^2S'}{dy'^2}u^2=0\ , \tag{34}$$

et représentera d'autant plus approximativement l'arc de courbe, que cet arc sera plus petit, puisqu'alors les termes négligés en auront des valeurs d'autant moindres; elle exprimera donc *rigoureusement* l'arc dont il s'agit, lorsqu'il se réduira à l'origine des $t$ et $u$, c'est-à-dire au point $(x', y')$.

Or, l'équation (34) exprime deux droites qui se coupent, deux droites qui se confondent, ou un simple point, suivant que la fonction

$$\left(\frac{d^2S'}{dx'dy'}\right)^2-\frac{d^2S'}{dx'^2}\cdot\frac{d^2S'}{dy'^2}\ ,\qquad (35)$$

est positive, nulle ou négative; donc, dans les mêmes circonstances, la courbe, à l'origine des $t$ et $u$, se réduira *rigoureusement* à deux droites qui se couperont, à deux droites qui se confondront ou à un simple point; c'est-à-dire qu'alors le point $(x',y')$ sera un point d'intersection ou de contact de deux branches de la courbe (1), ou un point isolé, lié analytiquement avec elle et compris dans son équation. Dans les deux premiers cas, l'équation (34), ou bien, en repassant au système primitif, au moyen des formules (5), l'équation

$$\frac{d^2S'}{dx'^2}(x-x')^2+2\frac{d^2S'}{dx'dy'}(x-x')(y-y')+\frac{d^2S'}{dy'^2}(y-y')^2=0\ ,\qquad (36)$$

sera l'équation commune aux tangentes aux deux branches de la courbe au point $(x',y')$.

On peut remarquer que, dans le cas où les équations (32) sont satisfaites, l'équation (8) est immédiatement divisible par $t^2$; et, qu'en ôtant ce diviseur et supposant ensuite $t$ nul, on a, pour déterminer $M$, l'équation

$$\frac{d^2S'}{dx'^2}+2\frac{d^2S'}{dx'dy'}M+\frac{d^2S'}{dy'^2}M^2=0\ ;\qquad (37)$$

de laquelle éliminant $M$, au moyen de l'équation (7), on retombe exactement sur l'équation (34). En conséquence les points d'une courbe pour lesquels les équations (32) sont satisfaites, sont appelés des *points doubles* de cette courbe.

L'équation $S=0$ d'une courbe étant donnée; si l'on veut savoir si cette courbe a des points doubles, et en déterminer la situation, on éliminera $x$ et $y$ entre les trois équations

$$S=0\ , \quad \frac{dS}{dx}=0\ , \quad \frac{dS}{dy}=0\ ; \qquad (38)$$

l'équation résultante, entre quantités connues, ne pourra être qu'absurde ou identique. Dans le premier cas, la courbe n'aura aucun point double; dans le second, elle en aura un ou plusieurs dont les coordonnées seront données par deux quelconques des équations (38). Ces coordonnées étant mises ensuite tour à tour à la place de $x'$ et $y'$, dans l'équation (36), on connaîtra ainsi les directions des deux tangentes en chacun de ces points.

On se comporterait exactement de la même manière si, l'équation $S=0$ renfermant un ou plusieurs coefficiens arbitraires, on voulait profiter de leur indétermination pour lui faire exprimer une courbe ayant un ou plusieurs points doubles; il arriverait seulement qu'en éliminant $x$ et $y$ entre les trois équations (38), l'équation à laquelle on serait conduit ne serait ni identique ni absurde; elle exprimerait la condition à laquelle les constantes arbitraires devraient satisfaire pour que de tels points existassent; et, en supposant cette condition satisfaite, le calcul s'achèverait comme dans le premier cas.

VIII. Des considérations analogues prouvent que, si le point $(x',y')$ était choisi sur la courbe (1) de telle sorte que, outre les équations (32), on eût encore celles-ci:

$$\frac{d^2S'}{dx'^2}=0\ , \quad \frac{d^2S'}{dx'dy'}=0\ , \quad \frac{d^2S'}{dy'^2}=0\ ; \qquad (39)$$

ce qui peut encore moins avoir lieu généralement; l'équation de la courbe, réduite au point $(x',y')$, serait

$$\frac{d^3S'}{dx'^3}(x-x')^3+3\frac{d^3S'}{dx'^2dy'}(x-x')^2(y-y')+3\frac{d^3S'}{dx'dy'^2}(x-x')(y-y')^2+\frac{d^3S'}{dy'^3}(y-y')^3=0\,; \quad (40)$$

équation qui exprime trois droites qui se coupent, ou bien deux droites qui se confondent et une troisième droite qui les coupe, ou enfin une droite unique et un point situé sur sa direction, suivant que la fonction

$$\left(\frac{d^3S'}{dx'^3}\cdot\frac{d^3S'}{dy'^3}-\frac{d^3S'}{dx'^2dy'}\cdot\frac{d^3S'}{dx'dy'^2}\right)^2-4\left\{\left(\frac{d^3S'}{dx'^2dy'}\right)^2-\frac{d^3S'}{dx'^3}\cdot\frac{d^3S'}{dx'dy'^2}\right\}\left\{\left(\frac{d^3S'}{dx'dy'^2}\right)^2-\frac{d^3S'}{dy'^3}\cdot\frac{d^3S'}{dx'^2dy'}\right\}, \quad (41)$$

est négative, nulle ou positive ; et qui, en particulier, exprimera trois droites qui se confondent, si l'on a, à la fois,

$$\left(\frac{d^3S'}{dx'^2dy'}\right)^2=\frac{d^3S'}{dx'^3}\cdot\frac{d^3S'}{dx'dy'^2}\,, \quad \left(\frac{d^3S'}{dx'dy'^2}\right)^2=\frac{d^3S'}{dy'^3}\cdot\frac{d^3S'}{dx'^2dy'}\,; \quad (42)$$

la courbe aura donc, dans les mêmes circonstances, en son point $(x',y')$, ou trois branches qui se couperont, ou deux branches qui se toucheront et une troisième qui les coupera toutes deux à leur point de contact, ou trois branches qui se toucheront, ou enfin une branche unique et un point sur sa direction, lié analytiquement avec elle ; et, comme alors l'équation (8) devient immédiatement divisible par $t^3$, on dit que le point $(x',y')$ est un *point triple.* Les tangentes aux diverses branches de la courbe qui passent par ce point sont d'ailleurs données par l'équation (40).

Veut-on savoir si une courbe donnée par l'équation $S=0$ a des points triples, et en déterminer la situation? Ou bien, cette équation contenant des coefficiens arbitraires, veut-on profiter de leur indétermination pour faire acquérir des points triples à la courbe qu'elle exprime ? Dans l'un comme dans l'autre cas il faudra d'abord éliminer $x$ et $y$ entre les six équations

$$\left.\begin{array}{c} S=0\;; \\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=0\,,\qquad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}=0\;; \\ \frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x^2}=0\,,\qquad \frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=0\,,\qquad \frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y^2}=0\;; \end{array}\right\}\quad(43)$$

il en résultera quatre équations, soit entre quantités connues, soit entre les coefficiens arbitraires. Dans le premier cas, il n'y aura des points triples qu'autant que ces équations seront toutes quatre identiques ; dans le second, si les coefficiens arbitraires ne sont pas en moindre nombre que celles de ces équations qui ne seront pas identiques d'elles-mêmes, ces équations exprimeront les relations cherchées. Dans tous les cas, deux quelconques des équations (43) feront connaître les coordonnées des points triples ; et la substitution des valeurs de ces coordonnées, à la place de $x'$ et $y'$, dans l'équation (40), fera connaître les tangentes aux diverses branches de la courbe qui se couperont en ces différens points.

On voit aisément par là ce qu'il y aurait à dire sur la recherche des *points quadruples*, et, en général, sur la recherche des *points multiples*, d'un ordre de multiplicité quelconque.

IX. Pour qu'une courbe $S_1=0$ passe par le point $(x',y')$, il faut qu'on ait $S'_1=0$. Si l'on veut en outre que cette courbe ait, en ce point $(x',y')$, la même tangente que la courbe (1) en ce point ; on voit (6) qu'il suffira pour cela qu'on ait

$$\frac{\mathrm{d}S'_1}{\mathrm{d}x'}=\lambda\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}\,,\qquad \frac{\mathrm{d}S'_1}{\mathrm{d}y'}=\lambda\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}\;;\qquad(44)$$

$\lambda$ étant une constante quelconque.

Donc, en particulier, l'équation

$$0=\frac{dS'}{dx'}t+\frac{dS'}{dy'}u+C(t^2+u^2)\ , \tag{45}$$

est, quelle que soit la constante $C$, l'équation d'un cercle qui, non seulement passe, comme la courbe (1), par l'origine des $t$ et $u$, c'est-à-dire, par le point $(x',y')$, mais qui a, en outre, en ce point, même tangente que cette courbe ; et qui a conséquemment son centre sur la normale à cette même courbe, en ce point. Un tel cercle est dit *tangent* à la courbe (1) au point $(x',y')$ ; d'où l'on voit, à cause de l'indétermination de $C$, qu'une courbe a, en chacun de ses points, une infinité de cercles qui lui sont tangens, et qui ont tous leurs centres sur la normale en ce point. Il est d'ailleurs manifeste qu'un cercle tangent à une courbe, en un quelconque de ses points, peut être considéré comme ayant avec cette courbe deux points communs qui se confondent en un seul. Il peut avoir d'ailleurs avec la courbe un plus ou un moins grand nombre d'autres points communs.

Ces derniers seront évidemment donnés par le système des équations (4) et (45) dans lesquelles il faudra considérer $t$ et $u$ comme les deux inconnues d'un même problème déterminé. On pourra, au surplus, dans cette recherche, remplacer l'équation (4) par quelle combinaison on voudra de l'une et de l'autre, par leur différence, par exemple, qui est

$$\left.\begin{aligned}0=\left(\frac{1}{2}\frac{d^2S'}{dx'^2}-C\right)t^2+\left(\frac{1}{2}\frac{d^2S'}{dy'^2}-C\right)u^2+\frac{d^2S'}{dx'dy'}tu\\+\frac{1}{6}\left(\frac{d^3S'}{dx'^3}t^3+3\frac{d^3S'}{dx'^2dy'}t^2u+3\frac{d^3S'}{dx'dy'^2}tu^2+\frac{d^3S'}{dy'^3}u^3\right)+\ldots\end{aligned}\right\}\tag{46}$$

Cherchons à déterminer la constante $C$ de telle sorte qu'un troisième point, commun aux deux courbes, vienne se confondre avec les deux premiers, à l'origine des $t$ et $u$, c'est-à-dire, en $(x',y')$.

Pour cela remarquons d'abord qu'on peut toujours profiter de l'indétermination de $C$ pour amener ce troisième point à être aussi voisin de l'origine des $t$ et $u$ qu'on le voudra, et qu'alors on pourra sensiblement, dans la recherche de ce même point, négliger les termes de dimensions plus élevées en $t$ et $u$, vis-à-vis des termes de dimensions moindres, c'est-à-dire, remplacer les équations (45) et (46) par les deux suivantes :

$$\left.\begin{aligned} 0&=\frac{dS'}{dx'}t+\frac{dS'}{dy'}u\,, \\ 0&=\left(\frac{d^2S'}{dx'^2}-2C\right)t^2+\left(\frac{d^2S'}{dy'^2}-2C\right)u^2+2\frac{d^2S'}{dx'dy'}tu\,; \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

or, en éliminant de la seconde, au moyen de la première, une quelconque des coordonnées $t$ et $u$, l'autre disparaît d'elle-même, et il vient

$$\left(\frac{dS'}{dy'}\right)^2\left(\frac{d^2S'}{dx'^2}-2C\right)+\left(\frac{dS'}{dx'}\right)^2\left(\frac{d^2S'}{dy'^2}-2C\right)-2\frac{dS'}{dx'}\frac{dS'}{dy'}\frac{d^2S'}{dx'dy'}=0;$$

d'où on tire

$$C=\frac{\left(\frac{dS'}{dy'}\right)^2\frac{d^2S'}{dx'^2}-2\frac{dS'}{dx'}\frac{dS'}{dy'}\frac{d^2S}{dx'dy'}+\left(\frac{dS'}{dx'}\right)^2\frac{d^2S'}{dy'^2}}{2\left\{\left(\frac{dS'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dS'}{dy'}\right)^2\right\}}\,; \quad (48)$$

donc, plus $C$ approchera de cette valeur et plus aussi le troisième point commun approchera de se confondre avec les deux autres ; il se confondra donc *rigoureusement* avec eux, lorsque $C$ aura exactement cette valeur.

Remarquons présentement que l'équation (45) peut être écrite comme il suit :

$$\left(t+\frac{1}{2C}\cdot\frac{dS'}{dx'}\right)^2+\left(u+\frac{1}{2C}\cdot\frac{dS'}{dy'}\right)^2=\frac{1}{4C^2}\left\{\left(\frac{dS'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dS'}{dy'}\right)^2\right\}; \quad (49)$$

de sorte que le cercle qu'elle exprime a, respectivement, pour les coordonnées de son centre et pour son rayon,

$$-\frac{1}{2C}\cdot\frac{dS'}{dx'}\,,\quad -\frac{1}{2C}\cdot\frac{dS'}{dy'}\,,\quad \frac{1}{2C}\sqrt{\left(\frac{dS'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dS'}{dy'}\right)^2}\,;$$

en mettant donc pour $C$ sa valeur, et repassant au système primitif, au moyen des formules (5), le cercle dont trois points se confondent avec trois points de la courbe en $(x',y')$, aura, pour les coordonnées de son centre,

$$\left.\begin{aligned} x&=x'-\frac{\frac{dS'}{dx'}\left\{\left(\frac{dS'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dS'}{dy'}\right)^2\right\}}{\left(\frac{dS'}{dy'}\right)^2\frac{d^2S'}{dx'^2}-2\frac{dS'}{dx'}\,\frac{dS'}{dy'}\,\frac{d^2S'}{dx'dy'}+\left(\frac{dS'}{dx'}\right)^2\frac{d^2S'}{dy'^2}}\,,\\ y&=y'-\frac{\frac{dS'}{dy'}\left\{\left(\frac{dS'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dS'}{dy'}\right)^2\right\}}{\left(\frac{dS'}{dy'}\right)^2\frac{d^2S'}{dx'^2}-2\frac{dS'}{dx'}\,\frac{dS'}{dy'}\,\frac{d^2S'}{dx'dy'}+\left(\frac{dS'}{dx'}\right)^2\frac{d^2S'}{dy'^2}}\,;\end{aligned}\right\}\quad(50)$$

et pour son rayon

$$r=\frac{\left\{\left(\frac{dS'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dS'}{dy'}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{dS'}{dy'}\right)^2\frac{d^2S'}{dx'^2}-2\frac{dS'}{dx'}\,\frac{dS'}{dy'}\,\frac{d^2S'}{dx'dy'}+\left(\frac{dS'}{dx'}\right)^2\frac{d^2S'}{dy'^2}}\,.\quad(51)$$

Ce cercle est ce qu'on appelle le *cercle osculateur* de la courbe au point $(x',y')$; son centre et son rayon sont dits le *centre* et le *rayon de courbure* de cette même courbe, en ce même point. Nous allons voir tout à l'heure la raison de ces dénominations.

X. Pour abréger, désignons par $\Omega$ le second membre de l'équation (4), et par $\Omega'$ ce que devient ce second membre, lorsqu'on y change respectivement $t$ et $u$ en $t'$ et $u'$; si $(t', u')$ est un point de la courbe (4), de sorte qu'on ait $\Omega'=0$, l'équation de la normale menée, par ce même point, à la courbe $\Omega=0$ sera (27)

$$\frac{d\Omega'}{du'}(t-t')-\frac{d\Omega'}{dt'}(u-u')=0\,; \qquad (52)$$

les deux constantes $t'$ et $u'$ étant liées entre elles par l'équation $\Omega'=0$, c'est-à-dire, par l'équation

$$0=\left.\begin{array}{l}\frac{dS'}{dx'}t'+\frac{d^2S'}{dx'^2}t'^2\\ +\frac{dS'}{dy'}u'+2\frac{d^2S'}{dx'dy'}t'u'\\ \qquad\qquad +\frac{d^2S'}{dy'^2}u'^2\end{array}\right|\left.\begin{array}{l}\frac{1}{1.2}+\frac{d^3S'}{dx'^3}t'^3\\ \quad+3\frac{d^3S'}{dx'^2dy'}t'^2u'\\ \quad+3\frac{d^3S'}{dx'dy'^2}t'u'^2\\ \quad+\frac{d^3S'}{dy'^3}u'^3\end{array}\right|\left.\begin{array}{l}\frac{1}{1.2.3}+\ldots\\ \quad+\ldots\\ \quad+\ldots\\ \quad+\ldots\\ \quad+\ldots\end{array}\right\}; \qquad (53)$$

ce qui donne

$$\frac{d\Omega'}{dt'}=\frac{dS'}{dx'}+\left(\frac{d^2S'}{dx'^2}t'+\frac{d^2S'}{dx'dy'}u'\right)+\frac{1}{1.2}\left(\frac{d^3S'}{dx'^3}t'^2+2\frac{d^3S'}{dx'^2dy'}t'u'+\frac{d^3S'}{dx'dy'^2}u'^2\right)+\ldots\ldots;$$

$$\frac{d\Omega'}{du'}=\frac{dS'}{dy'}+\left(\frac{d^2S'}{dy'^2}u'+\frac{d^2S'}{dx'dy'}t'\right)+\frac{1}{1.2}\left(\frac{d^3S'}{dy'^3}u'^2+2\frac{d^3S'}{dx'dy'^2}t'u'+\frac{d^3S'}{dx'^2dy'}t'^2\right)+\ldots\ldots;$$

au moyen de quoi l'équation (51) de la normale au point $(t', u')$ deviendra

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\frac{dS'}{dy'}+\left(\frac{d^2S'}{dy'^2}u'+\frac{d^2S'}{dx'dy'}t'\right)+\frac{1}{1.2}\left(\frac{d^3S'}{dy'^3}u'^2+2\frac{d^3S'}{dx'dy'^2}t'u'+\frac{d^3S'}{dx'^2dy'}t'^2\right)+\ldots\ldots\right\}(t-t')\\ -\left\{\frac{dS'}{dx'}+\left(\frac{d^2S'}{dx'^2}t'+\frac{d^2S'}{dx'dy'}u'\right)+\frac{1}{1.2}\left(\frac{d^3S'}{dx'^3}t'^2+2\frac{d^3S'}{dx'^2dy'}t'u'+\frac{d^3S'}{dx'dy'^2}u'^2\right)+\ldots\ldots\right\}(u-u')\end{array}\right\}=0\,. \quad (54)$$

Si l'on veut avoir l'intersection de cette normale avec celle qui passe par l'origine des $t$ et $u$, c'est-à-dire, par le point $(x',y')$, il faudra considérer $t$ et $u$ comme les deux inconnues d'un même problème déterminé, tant dans l'équation (54) que dans l'équation de la normale à l'origine des $t$ et $u$, qui est (27)

$$\frac{dS'}{dy}t-\frac{dS'}{dx'}u=0\ ; \qquad (55)$$

mais, si le point $(t',u')$ est supposé très-voisin de l'origine des $t$ et $u$, on pourra, sans erreur sensible, remplacer, dans cette recherche, l'équation (54) par l'équation plus simple

$$\left\{\frac{dS'}{dy'}+\left(\frac{d^2S'}{dy'^2}u'+\frac{d^2S'}{dx'dy'}t'\right)\right\}(t-t')-\left\{\frac{dS'}{dx'}+\left(\frac{d^2S'}{dx'^2}t'+\frac{d^2S'}{dx'dy'}u'\right)\right\}(u-u')\ ; \quad (56)$$

et même remplacer cette dernière par telle combinaison qu'on en voudra faire avec l'autre, de manière à n'en pas élever le degré; par leur différence, par exemple, qui est

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{d^2S'}{dy'^2}u'+\frac{d^2S'}{dx'dy'}t'\right)t-\left(\frac{d^2S'}{dx'^2}t'+\frac{d^2S'}{dx'dy'}u'\right)u\\ =\left\{\frac{dS'}{dy'}+\left(\frac{d^2S'}{dy'^2}u'+\frac{d^2S'}{dx'dy'}t'\right)\right\}t'-\left\{\frac{dS'}{dx'}+\left(\frac{d^2S'}{dx'^2}t'+\frac{d^2S'}{dx'dy'}u'\right)\right\}u'\end{array}\right\}. \quad (57)$$

Si l'on résout les deux équations (55) et (57), par rapport à $t$ et $u$, et que, dans les numérateurs des valeurs de ces deux inconnues, on néglige les termes de deux dimensions en $t'$ et $u'$, vis-à-vis de ceux qui n'en ont qu'une seule, il viendra

$$\left.\begin{aligned}
t&=-\frac{\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}\left(\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}t'-\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}u'\right)}{\left(\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}\frac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}x'^2}-\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}\frac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}\right)t'-\left(\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}\frac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}y'^2}-\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}\frac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}\right)u'}\,,\\
u&=-\frac{\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}\left(\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}t'-\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}u'\right)}{\left(\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}\frac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}x'^2}-\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}\frac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}\right)t'-\left(\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}\frac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}y'^2}-\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}\frac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}\right)u'}\,;
\end{aligned}\right\}\quad(58)$$

telles seront donc, approximativement, les coordonnées de l'intersection des deux normales, et d'autant plus approximativement que le point $(t', u')$ sera plus voisin de l'origine des $t$ et $u$; c'est-à-dire, d'autant plus approximativement que $t'$ et $u'$ seront plus petits.

Mais, dans cette hypothèse, l'équation (53) se réduit sensiblement à

$$\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}t'+\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}u'=0\,; \qquad (59)$$

en employant donc cette dernière équation à chasser des formules (57) l'une quelconque des coordonnées $t'$ et $u'$, l'autre disparaîtra d'elle-même, et l'on obtiendra ainsi des formules qui conviendront rigoureusement au cas où le point $(t', u')$ se confond avec l'origine des $t$ et $u$, puisque les coordonnées de ce point $(t', u')$ n'y figureront plus. Or, on retombe ainsi de nouveau sur les formules (50) qui donnent les coordonnées du centre de courbure; d'où résulte ce théorème :

*Si une normale mobile marche vers une normale fixe, leur point d'intersection marchera sur cette dernière, de manière à s'arrêter au* *centre de courbure qui lui répond, lorsque la seconde normale aura atteint la première.*

XI. Ce théorème nous met en mesure de donner une idée beaucoup plus claire de ce que nous avons nommé cercle osculateur, centre et rayon de courbure d'une courbe, en chacun de ses points.

Soit d'abord un polygone plan rectiligne ouvert quelconque ABCD......, sur la convexité duquel soit appliqué un fil, fixé par une extrémité à son dernier sommet, et venant se terminer en A par son autre extrémité. Concevons qu'on développe ce fil, sans lui faire quitter le plan du polygone; son extrémité mobile décrira d'abord, dans le supplément de l'angle B, un arc de cercle ayant le point B pour centre et le côté BA pour rayon; mais, du moment que ce fil aura pris la direction du prolongement de CB, toute sa portion d'abord couchée le long de ce côté s'en détachera à la fois; de sorte que le premier arc décrit se prolongera, dans le supplément de l'angle C, suivant un second arc ayant le sommet C pour centre et CB+BA pour rayon. On voit qu'en continuant ainsi le développement, dans le même sens, l'extrémité mobile du fil décrira, sur le plan du polygone, une courbe composée d'une suite d'arcs de cercles, ayant successivement pour centres les différens sommets du polygone, et des rayons croissant subitement d'un arc à l'autre d'une quantité égale à la longueur d'un côté du polygone; et ces arcs seront consécutivement tangens les uns aux autres, puisque le point commun à deux arcs consécutifs quelconque sera constamment sur le prolongement d'un côté du polygone; c'est-à-dire, sur la droite qui joindra leurs centres. Un tel système d'arcs forme ce qu'on appelle *une anse de panier.*

Les rayons de ces arcs étant ainsi continuellement croissans, du premier au dernier, si on prolonge l'un d'eux, de part et d'autre de ses points de contact avec les deux qui le comprennent, il enveloppera celui des deux dont le rayon sera plus petit que le sien, et sera, au contraire, enveloppé par celui dont le rayon sera plus grand.

Ceci suppose, au surplus, que le polygone générateur de l'anse de panier est convexe, dans toute sa longueur; car, dans le cas contraire, suivant la manière dont s'exécuterait le développement du fil, le rayon de certains arcs pourrait être, à la fois, tantôt plus grand et tantôt plus petit que les rayons des arcs qui les comprendaient; de sorte que de tels arcs, prolongés de part et d'autre, tantôt envelopperaient à la fois ces deux-là et tantôt en seraient à la fois enveloppés.

Si l'on conçoit présentement que les côtés du polynome deviennent de plus en plus petits, de plus en plus nombreux et de moins en moins inclinés les uns aux autres, les arcs de cercles, dont se composera l'anse de panier, deviendront eux-mêmes de plus en plus petits et plus nombreux et de rayons de moins en moins différens.

Si, enfin, on remplace le polygone par une courbe continue, laquelle peut être considérée comme un polygone d'une infinité de côtés infiniment petits et infiniment peu inclinés les uns aux autres, l'anse de panier deviendra également une courbe continue, composée d'une infinité d'arcs de cercles infiniment petits, dont les rayons croîtront ou décroîtront par degré insensibles, et dont les centres seront les différens points de la courbe d'abord enveloppée par le fil; les tangentes à cette dernière courbe seront toutes normales à l'autre; le point de contact de l'une quelconque sera le centre de l'arc infiniment petit de l'autre qui répondra au pied de la normale, et la distance entre ces deux points sera le rayon de cet arc.

Réciproquemment, une courbe continue étant tracée sur un plan, si on mène les normales de tous ses points, toutes ces normales seront tangentes à une seconde courbe qui sera évidemment celle qu'il faudrait prendre pour base de développement d'un fil dont l'extrémité mobile devrait décrire la première. Chacun des points de la seconde courbe sera le centre de l'un des arcs de cercles infiniment petits dont la première pourra être réputée l'assemblage; cet arc se trouvant situé à l'intersection de la première courbe avec la tangente menée à la seconde par ce même point ; et la longueur de cette tangente, terminée à ces deux points, sera le rayon de cet arc.

Ainsi, en résumé, toute courbe donnée peut être considérée comme composée d'arcs de cercles infiniment petits, de rayons continuellement croissans ou décroissans, se touchant consécutivement ; le cercle dont un quelconque de ces arcs fait partie, et qui a évidemment même courbure que cet arc lui-même, est ce que nous avons appelé le cercle osculateur de la courbe en ce point ; et l'on voit qu'en général il doit toucher et couper à la courbe, c'est-à-dire qu'il doit l'envelopper d'une part et en être, au contraire, enveloppé de l'autre. Le centre de ce cercle qui est, en même temps, le centre de courbure de la courbe en ce même point, n'est autre que le point de contact de la normale en ce point avec la courbe à laquelle toutes les normales sont tangentes ; courbe qui est dite la *développée* de la proposée, et qui est évidemment le lieu géométrique des centres de courbure de tous ses points ; enfin son rayon de courbure, en un point quelconque, n'est autre que la normale qui répond à ce point, terminée à son point de contact avec la développée.

Dans les points où la courbure de la courbe après avoir cru, commence à décroître, c'est-à-dire, dans les points où cette courbure est *maximum*, et, par suite, le rayon de courbure *minimum*, le cercle osculateur est évidemment enveloppé par la courbe, de part et d'autre du point de contact ; mais dans les points où, au contraire, cette courbure est *minimum*, et, par suite, le rayon de courbure *maximum*, c'est au contraire le cercle osculateur qui enveloppe la courbe de part et d'autre du point de contact ; de sorte que, dans l'un comme dans l'autre cas, le cercle osculateur touche la courbe sans la couper.

On peut encore envisager la chose sous un autre point de vue qui conduit exactement aux mêmes conséquences.

Soit M l'un quelconque des points d'une courbe plane, par lequel soit menée à cette courbe une normale indéfinie. De l'un quelconque C des points de cette normale pris pour centre, et avec la distance CM pour rayon, soit décrit un cercle; ce cercle aura évidemment, au point M, même tangente que la courbe; et, pour cette raison, on dira qu'il lui est tangent en ce point; d'où l'on voit, à cause de l'indétermination du point C sur la normale, qu'une courbe peut avoir, en chacun de ses points, une infinité de cercles qui lui soient tangens en ce point, lesquels, comme l'on voit, ont tous leur centre sur la normale à la courbe au même point.

De tous les cerles qui touchent la proposée en M, ne considérons que la série de ceux qui ont leur centre du côté de la concavité de cette courbe, et qui ont conséquemment leur courbure dans le même sens que la sienne. On pourra toujours, pour l'un d'eux, prendre le point C assez voisin du point M pour que ce cercle, du moins dans le voisinage du point de contact, soit, de part et d'autre de ce point, enveloppé par la courbe. On pourra toujours, au contraire, pour un autre cercle, éloigner assez le point C du point M pour que, de part et d'autre du point de contact, ce soit le cercle qui enveloppe la courbe.

Si l'on conçoit ensuite que l'on fasse marcher le point C, sur la normale, entre ces deux positions, on devra rencontrer une position intermédiaire pour laquelle le cercle tangent aura, à la fois, une courbure plus grande que celle de la courbe d'un côté du point M, mais moindre que la courbure de cette courbe de l'autre côté de ce point. Un tel cercle tangent sera donc enveloppé par la courbe, d'un côté du point de contact, tandis qu'au contraire ce sera lui qui l'enveloppera de l'autre côté de ce point; il sera donc, à la fois, tangent et sécant à la courbure au point M, et sera conséquemment le cercle osculateur de cette courbe en ce point. Son centre et son rayon en seront donc, pour le même point M, le centre et le rayon de courbure de la courbe en ce point. Son centre sera donc le point de la développée correspondant au point M ; et l'on voit même que ceci offrirait, au besoin, un moyen graphique de déterminer, à peu près, tant de points qu'on voudrait de la développée d'une courbe proposée.

Mais les choses ne se passeraient plus de la sorte si le point M était choisi sur la courbe, de manière qu'en ce point sa courbure fût *maximum* ou *minimum*. Alors, dans la série des cercles dont il vient d'être question, on passerait, sans intermédiaire, d'un cercle enveloppé par la courbe des deux côtés du point de contact à un autre cercle qui l'envelopperait, au contraire, de part et d'autre de ce point ; et la position du point C sur la normale où la transition aurait lieu serait alors le centre de courbure du point correspondant de la courbe proposée.

Dans le cas particulier où le point M serait un point d'inflexion, il est visible que le centre de courbure devrait être porté sur la normale à une distance infinie, de part ou d'autre de ce point ; de sorte que la normale à un point d'inflexion d'une courbe est une asymptote de sa développée qui a ainsi au moins deux fois autant de branches infinies que cette courbe a de points d'inflexion.

XII. On voit, d'après ce qui précède, que, si l'on veut déterminer quels sont les points de la courbe (1) pour lesquels le rayon de courbure a une longueur donnée $r$, il ne s'agira que de considérer $x'$ et $y'$ dans les équations (4) et (51), comme les deux inconnues d'un même problème déterminé. On peut dire, en conséquence, que l'équation

$$\left\{\left(\frac{dS}{dy}\right)^2\frac{d^2S}{dx^2}-2\frac{dS}{dx}\frac{dS}{dy}\frac{d^2S}{dxdy}+\left(\frac{dS}{dx}\right)^2\frac{d^2S}{dy^2}\right\}^2r^2-\left\{\left(\frac{dS}{dx}\right)^2+\left(\frac{dS}{dy}\right)^2\right\}^3=0\,, \quad (60)$$

est celle d'une courbe qui coupe la proposée (1) aux points pour lesquels son rayon de courbure est égal à $r$.

La formule (51) prouve d'ailleurs que, aux points d'inflexion de la courbe (1), pour lesquels les équations (13) sont toutes trois satisfaites, le rayon de courbure devient infini ; de sorte qu'alors le cercle osculateur se confond avec la tangente. On voit aussi que la formule (51) est en défaut pour tous les points où les deux coefficiens différentiels $\frac{dS'}{dx'}$ et $\frac{dS'}{dy'}$ sont nuls ; et on ne doit pas en être surpris, puisqu'alors il peut passer par le point $(x', y')$ au moins deux branches de la courbe, dont chacune doit avoir son rayon de courbure. Ce rayon $r$ doit donc alors être donné par une équation d'un degré supérieur au premier, équation que l'on obtiendrait facilement par l'application des principes qui nous ont constamment dirigés dans tout ce qui précède, mais à la poursuite de laquelle nous ne nous arrêterons pas.

En éliminant $x'$ et $y'$ entre l'équation (2) et les équations (50) du centre de courbure du point $(x', y')$, l'équation résultante en $x$ et $y$ sera celle du lieu des centres de courbure de tous les points de la courbe (1), c'est-à-dire, l'équation de la développée de cette courbe. Au surplus, il revient au même et il est plus simple de dire que l'équation de la développée de la courbe (1) est le résultat de l'élimination de $x'$ et $y'$ entre l'équation (2) et la double équation

$$\frac{\frac{dS'}{dx'}}{x-x'}=\frac{\frac{dS'}{dy'}}{y-y'}=-\frac{\left(\frac{dS'}{dy'}\right)^2\frac{d^2S'}{dx'^2}-2\frac{dS'}{dx'}\frac{dS'}{dy'}\frac{d^2S'}{dx'dy'}+\left(\frac{dS'}{dx'}\right)\frac{d^2S'}{dy'^2}}{\left(\frac{dS'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dS'}{dy'}\right)^2}. \qquad (61)$$

Veut-on savoir enfin quels sont les points de courbe (1) pour lesquels la courbure de cette courbe est *maximum* ou *minimum* ? La question se réduira à rendre l'un ou l'autre la fonction $r$ des deux variables $x'$ et $y'$, liées entre elles par la relation (2) ; il faudra donc, suivant ce qui a été expliqué (tom. XX, pag. 337) égaler d'abord à zéro la variation de la valeur (51) de $r$, prise à la fois par rapport à ces deux variables, ce qui donnera, en supprimant les accens qui, dans cette rencontre, ne sont d'aucune utilité,

$$3\left\{\left(\frac{dS}{dy}\right)^2\frac{d^2S}{dx^2}-2\frac{dS}{dx}\,\frac{dS}{dy}\,\frac{d^2S}{dxdy}+\left(\frac{dS}{dx}\right)^2\frac{d^2S}{dy^2}\right\}\left\{\frac{dS}{dx}\,\frac{d^2S}{dx^2}\delta x+\left(\frac{dS}{dy}\delta x+\frac{dS}{dx}\delta y\right)\frac{d^2S}{dxdy}+\frac{dS}{dy}\,\frac{d^2S}{dy^2}\delta y\right\}$$

$$-2\left\{\left(\frac{dS}{dx}\right)^2+\left(\frac{dS}{dy}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{d^2S}{dxdy}\right)^2-\frac{d^2S}{dx^2}\,\frac{d^2S}{dy^2}\right\}\left(\frac{dS}{dx}\delta x+\frac{dS}{dy}\delta y\right)$$

$$=\left\{\left(\frac{dS}{dx}\right)^2+\left(\frac{dS}{dy}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{dS}{dy}\right)^2\frac{d^3S}{dx^3}\delta x+\frac{dS}{dy}\left(\frac{dS}{dy}\delta y-2\frac{dS}{dx}\delta x\right)\frac{d^3S}{dx^2dy}\right.$$

$$\left.+\frac{dS}{dx}\left(\frac{dS}{dx}\delta x-2\frac{dS}{dy}\delta y\right)\frac{d^3S}{dxdy^2}+\left(\frac{dS}{dx}\right)^2\frac{d^3S}{dy^3}\delta y\right\};$$

mais l'équation (1) donne

$$\frac{dS}{dx}\delta x+\frac{dS}{dy}\delta y=0\;;$$

ce qui fait d'abord disparaître la seconde partie du premier membre de la précédente ; substituant dans l'équation restante la valeur de $\delta x$ ou de $\delta y$ tirée de cette dernière, l'autre variation en disparaîtra aussi, et l'on obtiendra, pour solution du problème,

$$3\left\{\frac{dS}{dy}\left(\frac{dS}{dx}\,\frac{d^2S}{dx^2}+\frac{dS}{dy}\,\frac{d^2S}{dxdy}\right)-\frac{dS}{dx}\left(\frac{dS}{dy}\,\frac{d^2S}{dy^2}+\frac{dS}{dx}\,\frac{d^2S}{dxdy}\right)\right\}$$

$$\left\{\left(\frac{dS}{dy}\right)^2\frac{d^2S}{dx^2}-2\frac{dS}{dx}\,\frac{dS}{dy}\,\frac{d^2S}{dxdy}+\left(\frac{dS}{dx}\right)^2\frac{d^2S}{dy^2}\right\}$$

$$=\left\{\left(\frac{dS}{dx}\right)^2+\left(\frac{dS}{dy}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{dS}{dy}\right)^3\frac{d^3S}{dx^3}-3\frac{dS}{dx}\,\frac{d^2S}{dy^2}\,\frac{d^3S}{dx^2dy}+3\left(\frac{dS}{dx}\right)^2\frac{dS}{dy}\,\frac{d^3S}{dxdy^2}-\left(\frac{dS}{dy}\right)^3\frac{d^3S}{dy^3}\right\};\quad(62)$$

c'est-à-dire que cette équation est celle d'une courbe qui coupe la proposée (1) aux points où sa courbure est *maximum* ou *minimum*. Ayant déterminé, par la combinaison de cette équation avec l'équation (1), les coordonnées des points pour lesquels cette circonstance a lieu, la substitution des valeurs de ces coordonnées, pour $x'$ et $y$, dans la formule (51), fera connaître la grandeur du rayon de courbure en ces points.

XIII. En négligeant, dans l'équation (4), les termes de plus d'une dimension en $t$ et $u$, nous sommes parvenus à l'équation (6) de la tangente à la courbe (1), au point $(x', y')$ de cette courbe. On pourrait, pour plus de précision, ne rejeter, dans cette équation (4), que les termes de plus de deux dimensions en $t$ et $u$, ce qui conduirait à l'équation

$$0=\frac{dS'}{dx'}t+\frac{dS'}{dy'}u+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2S'}{dx'^2}t^2+2\frac{d^2S'}{dx'dy'}tu+\frac{d^2S'}{dy'^2}u^2\right), \quad (63)$$

qui appartient conséquemment à celle de toutes les lignes du second ordre qui passent par l'origine des $t$ et $u$ qui se moule le plus exactement sur la courbe (1), en ce point. A cause de cette propriété, une telle courbe est dite l'*osculatrice du second ordre* de la proposée au point où elle la touche. En raisonnant comme nous l'avons fait pour la tangente que, par analogie, on pourrait appeler *osculatrice du premier ordre*, on s'assurera facilement qu'en général l'osculatrice du second ordre d'une courbe, en l'un de ses points, touche et coupe à la fois cette courbe en ce point.

En repassant au système rectangulaire, au moyen des formules (5), on pourra dire que l'équation de l'osculatrice du second ordre de la courbe (1), en un quelconque $(x', y')$ de ses points, est

$$\frac{d^2S'}{dx'^2}(x-x')^2+\frac{d^2S'}{dy'^2}(y-y')^2+2\frac{d^2S'}{dx'dy'}(x-x')(y-y')+2\frac{dS'}{dx'}(x-x')+2\frac{dS'}{dy'}(y-y')=0 . \quad (64)$$

On voit, au surplus, que, si le point $(x', y')$ était un point double, cette osculatrice se réduirait à deux droites ou à un point ; et que, si ce même point $(x', y')$ était un point d'inflexion, l'osculatrice ne serait autre que la tangente en ce point.

On pourrait aussi ne supprimer, dans l'équation (4), que les termes de plus de trois dimensions en $t$ et $u$, et l'on obtiendrait ainsi ce qu'on appelle l'*osculatrice du troisième ordre* de la proposée, en un quelconque de ses points, c'est-à-dire, celle de toutes les courbes du troisième ordre qui, en ce point, se moule le plus exactement sur cette courbe en ce point, et de laquelle on prouverait que, dans le voisinage du point de contact, elle est toute située d'un même côté de la proposée, qu'elle touche ainsi sans la couper. On voit aisément par là ce que seraient les *osculatrices des ordres supérieurs*, lesquelles couperaient et toucheraient, à la fois, la proposée, ou bien seraient entièrement situées d'un même côté de cette courbe, suivant qu'elles seraient d'un ordre pair ou d'un ordre impair.

XIV. Les formules auxquelles nous sommes parvenus dans tout ce qui précède sont un peu plus compliquées que celles qu'on emploie communément à la résolution des diverses questions que nous avons traitées ; mais, outre qu'elles en sont aussi plus symétriques, leur apparente complication en rend l'application plus facile. En ne supposant pas, en effet, que l'équation proposée soit résolue par rapport à une des deux coordonnés $x$ et $y$, il sera toujours permis de supposer que S est une fonction rationnelle et entière de ces deux coordonnées ; ce qui rendra les divers coefficiens différentiels très-faciles à obtenir. Au surplus, rien ne sera plus aisé que de revenir de nos formules aux formules ordinaires ; il ne s'agira pour cela que d'y changer d'abord respectivement $\frac{dS}{dx}$, $\frac{d^2S}{dx^2}$, $\frac{d^3S}{dx^3}$, ...... en $-\frac{dy}{dx}$, $-\frac{d^2y}{dx^2}$, $-\frac{d^3y}{dx^3}$, ....., d'y poser ensuite $\frac{dS}{dy}=0$, et d'y faire enfin tous les autres coefficiens différentiels nuls.

XV. Terminons en appliquant ces généralités à la ligne du second ordre donnée par l'équation

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0\ . \qquad \text{(a)}$$

On aura d'abord, pour le point $(x', y')$,

$$Ax'^2+By'^2+2Cx'y'+2Dx'+2Ey'+F=0\ , \qquad \text{(b)}$$

et de là

$$\left.\begin{array}{llll} \frac{dS'}{dx'}=2(Ax'+Cy'+D)\ , & & \frac{dS'}{dy'}=2(By'+Cx'+E)\ , & \\ \frac{d^2S'}{dx'^2}=2A\ , & \frac{d^2S'}{dx'dy'}=2C\ , & \frac{d^2S'}{dy'^2}=2B\ , & \\ \frac{d^3S'}{dx'^3}=0\ , & \frac{d^3S'}{dx'^2dy}=0\ , & \frac{d^3S'}{dx'dy'^2}=0\ , & \frac{d^3S'}{dy'^3}=0\ . \end{array}\right\} \qquad \text{(c)}$$

Cela posé, la formule (17) donnera, pour l'équation de la tangente en $(x', y')$,

$$(Ax'+Cy'+D)(x-x')+(By'+Cx'+E)(y-y')=0\ ;$$

ou bien

$$Ax'x+By'y+C(x'y+y'x)+Dx+Ey=Ax'^2+By'^2+2Cx'y'+Dx'+Ey'\ ,$$

ou, en ajoutant l'équation (b) et réduisant,

$$(Ax'+Cy+D)x+(By'+Cx'+E)y+(Dx'+Ey'+F)=0 \ . \quad \text{(d)}$$

La formule (19) donne pour l'équation de la corde de contact de l'angle circonscrit à la courbe (a), ayant son sommet en $(a, b)$, en ayant égard à l'équation (a),

$$(Aa+Cb+D)x+(Bb+Ca+E)y+(Da+Eb+F)=0 \ . \quad \text{(e)}$$

La formule (22) montre que si, à la courbe (a), on mène deux tangentes parallèles à une droite ayant pour équation

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b} \ ,$$

la droite qui joindra les deux tangentes aura pour équation

$$(aA+bC)x+(bB+aC)y+(aD+bE)=0 \ . \quad \text{(f)}$$

Si l'on veut mener une tangente commune à deux branches de la courbe (a), on aura (26), pour déterminer les deux points de contact, outre les équations (a) et (b), la double équation

$$\frac{Ax+Cy+D}{Ax'+Cy'+D}=\frac{By+Cx+E}{By'+Cx'+E}=\frac{Ax^2+By^2+2Cxy+Dx+Ey}{Ax'^2+By'^2+2Cx'y'+Dx'+Ey'} \ ,$$

laquelle devient simplement, au moyen des équations (a) et (b),

$$\frac{Ax+Cy+D}{Ax'+Cy'+D}=\frac{By+Cx+E}{By'+Cx'+E}=\frac{Dx+Ey+F}{Dx'+Ey'+F} \ ;$$

tirant de cette double équation les valeurs de $x'$ et $y'$ pour les substituer dans l'équation (b), et ayant égard à l'équation (a), on trouvera pour la courbe qui coupe la proposée aux points où elle est touchée par des tangentes communes à deux de ses branches,

$$B(Ax+Cy+D)^2-2C(Ax+Cy+D)(By+Cx+E)+A(By+Cx+E)^2=0\ ; \quad (g)$$

équation qui appartient aux deux asymptotes si la courbe est une hyperbole, et qui n'exprime rien dans le cas contraire. Les asymptotes d'une hyperbole sont, en effet, des tangentes communes à ses deux branches.

La formule (27) donne, pour l'équation de la normale à la courbe (a), par le point $(x',y')$, pris sur cette courbe,

$$(By'+Cx'+E)(x-x')-(Ax'+Cy'+D)(y-y')=0\ ; \quad (h)$$

les deux constantes $x'$, $y'$ étant liées entre elles par la relation (b).

D'après la formule (28), l'équation

$$(By+Cx+E)(x-a)-(Ax+Cy+D)(y-b)=0\ , \quad (i)$$

est celle d'une courbe coupant la courbe (a) aux pieds de toutes les normales qui peuvent lui être menées par le point $(a, b)$ de son plan ; et comme cette équation du second degré n'est point, en général, susceptible d'abaissement, il s'ensuit que, de l'un quelconque des points du plan d'une ligne du second ordre, on peut, généralement parlant, abaisser jusqu'à quatre normales à cette courbe.

La formule (29) donne l'équation

$$(bA-aC)x-(aB-bC)y+(bD-aE)=0\ , \quad (k)$$

pour celle d'une droite qui coupe la courbe (a) aux pieds de toutes les normales qui peuvent lui être menées parallélement à une droite donnée par l'équation

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b} \quad ;$$

ces normales sont donc au nombre de deux seulement.

D'après la formule (31), si l'on veut mener une normale commune à deux branches de la courbe (a), on aura, pour déterminer les deux points $(x, y)$, $(x', y')$ de cette courbe où elle se termine, outre les équations (a) et (b), la double équation

$$\frac{Ax+Cy+D}{Ax'+Cy'+D}=\frac{By+Cx+E}{By'+Cx'+E}=\frac{x(By+Cx+E)-y(Ax+Cy+D)}{x'(By'+Cx'+E)-y'(Ax'+Cy'+D)} \quad ;$$

entre laquelle et l'équation (b), éliminant $x'$ et $y'$, et ayant égard à l'équation (a), on obtiendra pour solution du problème l'équation

$$\left.\begin{array}{l}(By+Cx+E)\{A(Ax+Cy+D)+C(By+Cx+E)\}\\ -(Ax+Cy+D)\{B(By+Cx+E)+C(Ax+Cy+D)\}\end{array}\right\}=0 \; ; \quad (l)$$

équation que l'on reconnaîtra facilement pour celle des deux diamètres principaux de la courbe (a) ; lesquels sont, en effet, les deux seules normales communes à deux branches de cette courbe.

Les formules (32) et (35) montrent que, pour que la courbe (a) ait des points doubles, il faut qu'on ait à la fois

$$Ax+Cy+D=0 \ , \qquad By+Cx+E=0 \ ; \qquad (m)$$

mais l'équation (a) pouvant être écrite ainsi,

$$x(Ax+Cy+D)+y(By+Cx+E)+(Dx+Ey+F)=0 \ .$$

les deux autres la réduisent simplement à

$$Dx+Ey+F=0\ ;$$

éliminant donc $x$ et $y$ entre ces trois équations, on trouvera, pour la condition qui fait acquérir des points doubles à la courbe (a),

$$D(BD-CE)+E(AE-CD)+F(C^2-AB)=0\ ; \qquad \text{(n)}$$

cette équation étant supposée satisfaite, les points doubles seront donnés par les équations (m); d'où l'on voit qu'il n'y en aura jamais plus d'un. Il y aura d'ailleurs, en ce point, deux branches de courbe qui se couperont ou se toucheront, ou bien ce point sera tout à fait isolé (35) suivant que la quantité

$$C^2-AB\ ,$$

sera positive, nulle ou négative. On reconnaît, en effet, que les équations (m) sont celles du centre de la courbe (a) et que la condition (n) est celle qui exprime que cette courbe se réduit à son centre ou à deux droites qui se coupent en ce point. Quant aux points triples, il est visible qu'une ligne du second ordre n'en saurait offrir.

Les formules (50) donnent pour les équations du centre de courbure de la courbe (a), en un quelconque $(x', y')$ de ses points,

$$\left.\begin{aligned}
x&=x'-\frac{(Ax'+Cy'+D)\{(Ax'+Cy'+D)^2+(By'+Cx'+E)^2\}}{A(By'+Cx'+E)^2-2C(Ax'+Cy'+D)(By'+Cx'+E)+B(Ax'+Cy'+D)^2}\ ,\\
y&=y'-\frac{(By'+Cx'+E)\{(Ax'+Cy'+D)^2+(By'+Cx'+E)^2\}}{A(By'+Cx'+E)^2-2C(Ax'+Cy'+D)(By'+Cx'+E)+B(Ax'+Cy'+D)^2}\ ;
\end{aligned}\right\}$$

et pour son rayon de courbure en $(x, y)$,

$$r=\frac{\{(Ax'+Cy'+D)^2+(By'+Cx'+E)^2\}^{\frac{3}{2}}}{A(By'+Cx'+E)^2-2C(Ax'+Cy'+D)(By'+Cx'+E)+B(Ax'+Cy'+D)^2}\ ;$$

sur quoi on peut remarquer que le dénominateur commun à ces formules revient à

$$B(BD-CE)+E(AE-CD)+F(C^2-AB)$$
$$-(C^2-AB)(Ax'^2+By'^2+2Cx'y'+2Dx'+2Ey'+F)\ ,$$

dont la dernière ligne s'évanouit en vertu de l'équation (b) ; de sorte que les coordonnées du centre de courbure de la courbe (a) au point ( $x'$ , $y'$ ) sont simplement

$$\left.\begin{aligned} x&=x'-\frac{(Ax'+Cy'+D)\{(Ax'+Cy'+D)^2+(By'+Cx'+E)^2\}}{D(BD-CE)+E(AE-CD)+F(C^2-AB)}\ ,\\ y&=y'-\frac{(By'+Cx'+E)\{(Ax'+Cy'+D)^2+(By'+Cx'+E)^2\}}{D(BD-CE)+E(AE-CD)+F(C^2-AB)}\ ;\end{aligned}\right\}\quad(\text{o})$$

et son rayon de courbure au même point ,

$$r=\frac{\{(Ax'+Cy'+D)^2+(By'+Cx'+E)^2\}^{\frac{3}{2}}}{D(BD-CE)+E(AE-CD)+F(C^2-AB)}\ . \qquad (\text{p})$$

Nous ne nous occuperons pas de la recherche de la développée de la courbe (a) dont l'équation serait probablement fort compliquée. Nous remarquerons seulement que , pour la courbe (a) , l'équation (62) de la courbe qui en coupe une autre proposée aux points où la courbure de cette courbe est *maximum* ou *minimum* , a son second membre nul ; et , comme son premier membre est le produit de deux facteurs , on peut y satisfaire en égalant l'un ou l'autre de ces facteurs à zéro. On trouve alors , par les substitutions, ou l'équation (l) commune aux deux axes de la courbe ou l'équation (g) commune à ses deux asymptotes, si toutefois cette courbe est une hyperbole.

Quant à l'osculatrice du second ordre de la courbe (a), il est manifeste qu'en chacun de ses points cette osculatrice n'est autre que la courbe elle-même.

# QUESTIONS PROPOSÉES.

## *Problème de Géométrie.*

Les deux dérivées relatives à $x$ et $y$ de l'équation d'une courbe quelconque, égalées à la fois à zéro, déterminent, sur son plan, un certain nombre de points; lesquels, lorsque la courbe est une ligne du second ordre, se réduisent à un point unique qui en est le centre.

Quelles sont, dans les autres cas, les propriétés les plus remarquables de ces sortes de points?

# ANALYSE ALGÉBRIQUE.

## *De l'élimination entre un nombre quelconque d'équations de degrés quelconques ;*

Par M. GERGONNE.

ON sait que, pour transformer des tables de logarithmes, calculées pour une certaine base, en tables de logarithmes relatives à une autre base, il suffit de diviser tous les logarithmes des tables données par le logarithme de la nouvelle base, pris dans ces mêmes tables. Mais celui-là serait bien maladroit qui, ayant à exécuter une pareille transformation, ferait effectivement autant de divisions que les tables données contiendraient de logarithmes ; il est incomparablement plus court et plus commode de diviser l'unité une fois pour tout, par le logarithme de la nouvelle base, pris dans les tables données, et de multiplier ensuite tous les logarithmes de ces mêmes tables par le quotient obtenu. On pourrait même en formant, à l'avance, une table des produits de ce quotient, par les neuf premiers nombres naturels, réduire tout le travail à de simples additions.

C'est à peu près de cette manière qu'en agissent les habiles calculateurs, dans tous les cas analogues ; ils évitent avec grand soin les divisions et extractions de racines qu'ils remplacent, autant qu'ils le peuvent, par des multiplications et des formations de puissances ; et tel est, en particulier, un des principaux avantages qu'on retire, dans la pratique, du développement des fonctions en séries. Ils poussent même l'attention jusqu'à éviter les soustractions que, au moyen de ce qu'on appelle *complémens arithmétiques*, ils parviennent à remplacer par des additions.

Parmi les recherches dans lesquelles la division est employée, une des plus ingrates, à raison des diverses préparations que le plus souvent elle nécessite, est sans doute celle du plus grand commun diviseur entre deux polynomes proposés. Or, comme l'observe M. Bérard, géomètre distingué de Briançon, dans une note qu'il nous a transmise il y a quelque temps, ici, comme en beaucoup d'autres rencontres, la multiplication peut suppléer à la division. Chercher, en effet, le plus grand commun diviseur, entre deux polynomes $P$ et $P'$, fonctions rationnelles et entières de $x$, c'est, en d'autres termes, chercher l'équation du degré le plus élevé en $x$ qui puisse vérifier à la fois les deux équations $P=0$, $P'=0$. Pour la découvrir, M. Bérard combine celles-là entre elles par multiplication et addition, de manière à rabaisser le degré de l'une et de l'autre successivement d'une, de deux, de trois, .... unités, jusqu'à ce qu'il soit parvenu à deux équations identiquement les mêmes, ou ne diffèrent au plus l'une de l'autre que par un facteur indépendant de $x$. En supposant que, privées de ce facteur, elle se réduisent toutes deux à $D=0$, cette dernière sera évidemment l'équation du degré le plus élevé qui puisse vérifier à la fois les deux premières, d'où il suit que le polynome $D$ sera le plus grand commun diviseur entre les deux polynomes $P$ et $P'$.

Pour faire de ce procédé une application dont l'utilité puisse être facilement comprise, M. Bérard suppose qu'ayant à résoudre l'équation

$$x^7+5x^6+6x^5-6x^4-15x^3-3x^2+8x+4=0\,, \qquad (1)$$

on veuille, avant tout, mettre en évidence ses racines égales, si toutefois elle en a de telles. On sait que, s'il en est ainsi, la dérivée de son premier membre doit être nulle, et que le plus grand commun diviseur, entre ce premier membre et sa fonction dérivée, doit contenir tous les facteurs égaux de la proposée, excepté un de chaque sorte ; égalant donc cette dérivée à zéro, ce qui donnera

$$7x^6+30x^5+30x^4-24x^3-45x^2-6x+8=0\ ; \qquad (2)$$

il s'agira, en premier lieu, de trouver l'équation du degré le plus élevé qui vérifie à la fois les équations (1) et (2).

Pour cela, soit prise la somme de leurs produits respectifs par $+7$ et $-x$, il en résultera cette nouvelle équation du sixième degré qui pourra remplacer celle du septième dans la recherche de leurs racines communes

$$5x^6+12x^5-18x^4-60x^3-15x^2+48x+28=0\ ; \qquad (3)$$

de sorte que nous n'aurons plus à considérer que deux équations du sixième degré seulement.

Prenant, tour à tour, la somme des produits respectifs des équations (2) et (3), d'abord par $+5$ et $-7$, puis par $-7$ et $+2$, en divisant la première des équations résultantes par 6 et la seconde par $3x$, il viendra

$$11x^5+46x^4+50x^3-20x^2-61x-26=0\ , \qquad (4)$$

$$13x^5+62x^4+82x^3-16x^2-95x-46=0\ ; \qquad (5)$$

équations qui ne sont plus que du cinquième degré seulement, et qui peuvent, comme les équations (2) et (3), remplacer les deux proposées dans la recherche de leurs racines communes.

Prenant enfin, tour à tour, la somme des produits respectifs de ces deux dernières, d'abord par $-13$ et $+11$, puis par $+23$ et $-13$, en divisant la première des équations résultantes par 84 et la seconde par $84x$, il viendra également

$$x^4+3x^3+x^2-3x-2=0\;; \qquad (6)$$

cette dernière équation vérifie donc, à elle seule, les proposées (1) et (2); son premier membre est donc le plus grand commun diviseur des leurs.

Veut-on savoir si cette dernière équation (6) n'a pas elle-même des racines égales? Il faudra pareillement égaler à zéro la dérivée de son premier membre, ce qui donnera

$$4x^3+9x^2+2x-3=0\;; \qquad (7)$$

et chercher quelle est l'équation du degré le plus élevé qui vérifie à la fois les équations (6) et (7).

Soit prise d'abord la somme de leurs produits respectifs par $+4$ et $-x$; on obtiendra cette seconde équation du troisième degré

$$3x^3+2x^2-9x-8=0\;. \qquad (8)$$

Prenant, tour à tour, la somme des produits respectifs des équations (7) et (8), d'abord par $+3$ et $-4$, puis par $+8$ et $-3$, il viendra, en divisant par $x$, la dernière des équations résultantes,

$$19x^2+42x+23=0\;, \qquad (9)$$

$$23x^2+66x+43=0\;; \qquad (10)$$

équations qui ne sont plus que du second degré seulement.

Prenant enfin, tour à tour, la somme des produits respectifs de ces dernières, d'abord par $-23$ et $+19$, puis par $+43$ et $-23$, et divisant la première des deux équations résultantes par 288 et la seconde par $288x$, il viendra également

$$x+1=0\;; \qquad (11)$$

cette équation vérifie donc, à elle seule, les proposées (6) et (7); son premier membre est donc le plus grand commun diviseur des leurs.

Donc, suivant la théorie connue des racines égales, le premier membre de l'équation (6) est divisible par $(x+1)^2$ ; et, en effet, en exécutant la division, on trouve que cette équation revient à

$$(x^2+x-2)(x+1)^2=0\ ; \qquad (12)$$

donc aussi, suivant la même théorie, il y a, dans le premier membre de la proposée (1), deux facteurs égaux à $x^2+x-2$ et trois facteurs égaux à $x+1$, et, comme elle n'est que du septième degré seulement, elle doit revenir à

$$(x^2+x-2)^2(x+1)^3=0\ ; \qquad (13)$$

comme on s'en assure, en effet, par le développement.

Voilà donc que, par des multiplications et additions extrêmement simples et faciles, nous sommes parvenus à mettre en évidence les racines égales d'une équation proposée du septième degré, et l'on reconnaît ici le procédé d'élimination donné par Euler, dans le deuxième volume de son *Introduction au calcul différentiel* (chap. XIX), procédé fort élégant et fort commode et qui nous paraît bien préférable à la méthode d'élimination par le plus grand commun diviseur, où, par une inconcevable antinomie, on remplace à dessein, par des divisions, ce qui se peut faire si simplement par des multiplications ; méthode dont nous ne pensons pas que jamais aucun calculateur tant soit peu exercé se soit jamais avisé de se servir pour son propre usage, et qui n'est, de la sorte, qu'une méthode de pure spéculation, une méthode d'apparat, uniquement réservées pour les examens publics (*).

---

(*) J'ai vu un temps où cette méthode d'élimination était tellement en faveur que les examens des aspirans aux écoles des services publics ne roulaient, pour ainsi dire, que sur elle ; on était admis ou rejeté suivant

Avant d'examiner plus en détail, et de chercher à réduire à sa juste valeur la critique plus ou moins vive qu'on a faite, dans divers ouvrages élémentaire, de la méthode d'élimination d'Euler, et les motifs de la préférence accordée à celle qui se fonde sur la recherche du plus grand commun diviseur, remarquons d'abord que le procédé de M. Bérard pourrait être facilement étendu à la recherche du plus grand commun diviseur entre trois ou un plus grand nombre de polynomes.

Pour en donner un seul exemple, supposons qu'on ait uniquement intérêt à savoir si l'équation (1) n'a pas quelques racines triples ; il est connu que, si elle a de telles racines, elles doivent se trouver, non seulement dans l'équation (2), mais encore dans l'équation qu'on obtient en égalant à zéro la dérivée du premier membre de cette dernière ; ce qui donnera, en divisant par 6,

$$7x^5+25x^4+20x^3-12x^2-15x-1=0\ ; \qquad (14)$$

de sorte que la question se trouvera amenée à assigner le plus grand commun diviseur entre les premiers membres des équations (1), (2), (14), ou, ce qui revient au même, l'équation du degré le plus élevé qui les vérifient toutes trois.

D'abord, en opérant sur les équations (1) et (2), comme nous l'avons fait ci-dessus, on en conclura l'équation (3) qui, dans la recherche qui nous occupe, pourra ainsi remplacer la première ; de sorte que la question se trouvera réduite à assigner l'équation du degré le plus élevé qui vérifie à la fois les équations (2), (3), (14).

---

qu'on la possédait bien ou mal. Un peu avant, ç'avait été le tour de la discussion des lignes du second ordre, par la résolution effective de leur équation, c'est-à-dire, par la méthode de Chézy ; méthode qui refuse le service dès le troisième degré, et que néanmoins on persiste encore aujourd'hui à offrir comme modèle.

D'abord, en retranchant de l'équation (2) le produit de l'équation (14), par $x$, il vient

$$5x^5+10x^4-12x^3-30x^2-5x+8=0\ ; \qquad (15)$$

en prenant ensuite la somme des produits respectifs des équations (3) et (14) par $-7$ et $+5$, il vient

$$41x^5+226x^4+360x^3+30x^2-341x-196=0\ ; \qquad (16)$$

de sorte que nous n'avons plus à considérer que les trois équations du cinquième degré (14), (15), (16).

Prenant, tour à tour, la somme des produits respectifs de ces trois dernières, d'abord par $+720$, $-557$ et $-55$, ensuite par $+1308$, $-1331$ et $-61$, puis enfin par $+3708$, $-2599$ et $-125$ (*), en divisant la première des équations résultantes par $12$, la seconde par $12x$ et la troisième par $12x^2$, il viendra

$$107x^3+535x^2+895x+467=0\ , \qquad (17)$$

$$467x^3+1681x^2+1867x+653=0\ , \qquad (18)$$

$$653x^3+3205x^2+5029x+2477=0\ ; \qquad (19)$$

équations qui ne sont plus que du troisième degré, et qui, dans la recherche qui nous occupe, peuvent remplacer les équations (1), (2), (14).

Prenant enfin, tour à tour, la somme des produits respectifs de ces trois dernières, d'abord par $+66507$, $+1070$ et $-11663$, ensuite par $+121725$, $+6652$ et $-24703$, puis enfin par $+223437$, $+21938$ et $-47909$, en divisant la première des équations résultantes par $2868228$, la seconde par $2868228x$ et

---

(*) On verra plus loin comment se forment ces multiplicateurs.

la troisième par $2868228x^2$, il viendra également $x+1=0$; d'où on conclura que $x+1$ est le seul facteur triple du premier membre de l'équation (1), comme nous l'avions déjà trouvé.

Revenons présentement à l'élimination, et remarquons, en premier lieu, que, quelles que soient deux équations algébriques en $x$, entre lesquelles on se propose d'éliminer cette lettre, et que nous supposons d'ailleurs ne renfermer ni radicaux ni dénominateurs, il est toujours permis de les supposer du même degré, par rapport à cette même lettre; puisque, dans le cas où elles seraient de degrés inégaux, on pourrait toujours les amener à être du même degré, en multipliant la moins élevée des deux par une puissance convenable de $x$. C'est donc fort inutilement, à ce qu'il nous paraît, que Euler, dans l'endroit cité, a cru devoir considérer, tour à tour, des équations du même degré et des équations de degrés différens.

Soient donc les deux équations d'un même degré quelconque

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots\ldots+A_{m-2}x^2+A_{m-1}x+A_m=0\ ;$$

$$B_0x^m+B_1x^{m-1}+B_2x^{m-2}+\ldots\ldots+B_{m-2}x^2+B_{m-1}x+B_m=0\ ;$$

le problème de l'élimination consiste à déduire de ces équations: 1.° une équation de relation entre les coefficiens de leurs différens termes; 2.° une valeur rationnelle de $x$ fonction de ces coefficiens.

Remarquons bien que le mécanisme du calcul étant tout à fait indépendant de ce que représentent les symboles sur lesquels on l'exécute, le problème se résoudra toujours de la même manière quels que soient les coefficiens des deux proposées. Si ces coefficiens sont des quantités déterminées, l'équation de relation entre eux exprimera la condition nécessaire pour que ces deux équations puissent être satisfaites par une même valeur de $x$ qui sera précisément la valeur qu'on obtiendra pour cette inconnue. Si ces coefficiens sont des fonctions quelconques d'une autre inconnue $y$, l'équation de relation entre eux sera ce qu'on appelle, dans la théorie de l'élimination, *l'équation finale en* $y$, et alors la valeur de $x$ sera exprimée en fonction de cette dernière inconnue. On pourrait d'ailleurs supposer que ces coefficiens sont fonctions d'un plus grand nombre de variables.

Ces choses ainsi entendues, soit prise, tour à tour, la somme des produits respectifs de ces deux équations, d'abord par $-B_0$ et $+A_0$, puis par $+B_m$ et $-A_m$ (*), et divisant la dernière des deux équations résultantes par $x$, et posant, pour abréger,

$$A_0B_1-A_1B_0=C_1\ ,\qquad A_{m-1}B_m-A_mB_{m-1}=C_{2m-1}\ ,$$

$$A_0B_2-A_2B_0=C_2\ ,\qquad A_{m-2}B_m-A_mB_{m-2}=C_{2m-2}\ ,$$

$$A_0B_3-A_3B_0=C_3\ ,\qquad A_{m-3}B_m-A_mB_{m-3}=C_{2m-3}\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$A_0B_{m-1}-A_{m-1}B_0=C_{m-1}\ ,\qquad A_1B_m-A_mB_1=C_{m+1}\ ,$$

$$A_0B_m-A_mB_0=C_m\ ,$$

on aura

$$C_1x^{m-1}+C_2x^{m-2}+C_3x^{m-3}+\ldots\ldots+C_{m-2}x^2+C_{m-1}x+C_m=0\ ,$$

$$C_mx^{m-1}+C_{m+1}x^{m-2}+C_{m+2}x^{m-3}+\ldots\ldots+C_{2m-3}x^2+C_{2m-2}x+C_{2m-1}=0\ ;$$

---

(*) Si les coefficiens $A_0$ et $B_0$ ou les coefficiens $A_m$ et $B_m$, ou les uns et les autres avaient un diviseur commun, il suffirait de multiplier par les quotiens obtenus en les divisant par ce diviseur ; le calcul s'en trouverait d'autant simplifié.

équations qui ne sont plus que du $(m-1)^{ieme}$ degré seulement par rapport à $x$. Par l'application réitérée du même procédé on parviendra successivement à des couples d'équations de degrés de moins en moins élevés ; de sorte qu'on arrivera finalement à deux équations du premier degré en $x$, desquelles on déduira d'abord la valeur de $x$, sous deux formes différentes, égalant ensuite entre elles les deux valeurs ainsi obtenues, l'équation résultante sera l'équation de relation demandée, et conséquemment l'équation finale en $y$, si les coefficiens sont des fonctions de cette autre inconnue.

Si, par l'effet de l'abaissement successif des équations, par rapport à $x$, on parvenait à deux équations d'un certain degré qui fussent exactement les mêmes, on en conclurait que leur premier membre est facteur des premiers membres des proposées. Ce facteur, égalé à zéro, donnerait donc des solutions indéterminées du problème, et, pour en avoir les solutions déterminées, il faudrait délivrer les premiers membres des proposées de leur facteur commun, et opérer sur les équations résultantes comme il a été dit ci-dessus.

Si, pour quelqu'une des valeurs de $y$, déduites de l'équation finale, les valeurs de $x$ devenaient toutes deux indéterminées, il serait facile d'en conclure que les deux équations du premier degré en $x$ ont l'une et l'autre un facteur commun, fonction de $y$, que cette valeur rend nul, et qui satisfait ainsi aux deux proposées, quel que soit $x$. Si enfin en cherchant à rabaisser le degré des proposées par rapport à $x$, on tombait sur quelque équation absurde, on en conclurait que ces proposées sont incompatibles, et qu'ainsi le problème qui y a conduit est impossible.

Tel est, au fond, le procédé d'élimination exposé par Euler, dans l'endroit cité ; on a dit de ce procédé : 1.° qu'il ne faisait pas voir comment deux équations avaient lieu en même temps, tandis que rien ne semble plus propre à exprimer analytiquement cette circonstance que de combiner ces équations entre elles, comme équations d'un même problème ; 2.° qu'il ne donnait aucune lumière sur les relations entre les valeurs de l'inconnue restée dans l'équation finale et les valeurs correspondantes de l'inconnue éliminée ; et l'on voit qu'au contraire, il donne l'expression de cette dernière en fonction de l'autre sous deux formes différentes ; 3.° enfin qu'il conduisait à une équation finale d'un degré trop élevé, et nous conviendrons qu'à défaut de certaines précautions, il en serait réellement ainsi ; mais, outre qu'on en peut dire autant de la méthode d'élimination par le plus grand commun diviseur, nous allons faire voir qu'il est très-aisé ici d'éviter cet inconvénient, et qu'en outre, en rattachant la recherche pour chaque degré aux résultats obtenus pour le degré immédiatement inférieur, le calcul s'exécute sans qu'on ait, pour ainsi dire, d'autre peine que celle d'écrire (*).

Venons présentement aux cas particuliers dans lesquels nous supposerons constamment que les coefficiens sont des fonctions rationnelles et entières de $y$, des degrés marqués par leurs indices respectifs.

## *Premier Degré.*

Soient les deux proposées du premier degré,

$$\left.\begin{array}{l} A_0x+A_1=0\ , \\ B_0x+B_1=0\ ; \end{array}\right\} \quad (1)$$

(*) En gâtant un peu le procédé d'élimination d'Euler, c'est-à-dire, n'attaquant constamment les équations que par la gauche, ce qui détruirait toute la symétrie des calculs, on le ferait exactement revenir, pour le fond, à celui du plus grand commun diviseur, sur lequel pourtant il conserverait encore l'avantage d'une forme plus commode. On pourrait aussi n'attaquer constamment les équations que par la droite ; on obtiendrait ainsi une nouvelle équation finale dont le plus grand commun diviseur, avec l'équation déduite de l'autre procédé, serait la véritable équation finale délivrée de tout facteur étranger.

elles donnent immédiatement

$$x = -\frac{A_1}{A_0} = -\frac{B_1}{B_0} \; ; \qquad (2)$$

d'où résulte l'équation en $y$, du premier degré,

$$A_0B_1 - A_1B_0 = 0 \; . \qquad (3)$$

Si les proposées étaient

$$\left.\begin{array}{l} C_1x + C_2 = 0 \;, \quad \text{du } 2.^{\text{me}} \text{ degré} \;, \\ C_2x + C_3 = 0 \;, \quad \text{du } 3.^{\text{me}} \text{ degré} \;, \end{array}\right\} \quad (4)$$

on aurait, pour la double valeur de $x$,

$$x = -\frac{C_2}{C_1} = -\frac{C_3}{C_2} \; ; \qquad (5)$$

et l'équation en $y$ serait

$$C_2^2 - C_1C_3 = 0 \; ; \qquad (6)$$

équation qui ne s'élève qu'au quatrième degré seulement.

## *Deuxième Degré.*

Soient les deux proposées du deuxième degré,

$$\left.\begin{array}{l} A_0x^2 + A_1x + A_2 = 0 \;, \\ B_0x^2 + B_1x + B_2 = 0 \; ; \end{array}\right\} \quad (7)$$

si l'on prend, tour à tour, la somme de leurs produits respectifs, d'abord par $-B_0$ et $+A_0$, puis par $+B_2$ et $-A_2$ ; en divisant par $x$ la dernière des équations résultantes, et posant, pour abréger,

$$A_0B_1-A_1B_0=C_1\,,\quad A_0B_2-A_2B_0=C_2\,;\quad A_1B_2-A_2B_1=C_3\,;\qquad (8)$$

on retombera précisément sur les équations (4) ; d'où il suit qu'on obtiendra la double valeur de $x$ de l'équation en $y$, en substituant les valeurs (8) dans les formules (5) et (6) ; on aura donc ainsi, pour la double valeur de $x$,

$$x=-\frac{A_0B_2-A_2B_0}{A_0B_1-A_1B_0}=-\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_0B_2-A_2B_0}\,;\qquad (9)$$

et pour l'équation en $y$

$$(A_0B_2-A_2B_0)^2-(A_0B_1-A_1B_0)(A_1B_2-A_2B_1)=0\,;\qquad (10)$$

équation du quatrième degré, et qui s'abaisserait au deuxième si $B_2$ était nul, c'est-à-dire, si la dernière des équations (7) n'était que du premier degré, puisqu'alors tous les termes restans de l'équation (10) seraient divisibles par $A_2$.

Si les proposées étaient

$$\left.\begin{aligned} &C_1x^2+C_2x+C_3=0\,; \quad \text{du } 3.^{\text{me}} \text{ degré}\,,\\ &C_3x^2+C_4x+C_5=0\,, \quad \text{du } 5.^{\text{me}} \text{ degré}\,, \end{aligned}\right\}\qquad (11)$$

la double valeur de $x$ deviendrait

$$x=-\frac{C_1C_5-C_3^2}{C_1C_4-C_2C_3}=-\frac{C_2C_5-C_3C_4}{C_1C_5-C_3^2}\,;\qquad (12)$$

et l'équation en $y$ serait

$$(C_3^2-C_1C_5)^2-(C_1C_4-C_2C_3)(C_2C_5-C_3C_4)=0\,;$$

ou bien, en développant et ordonnant par rapport à $C_3$

$$C_3^4-(C_2C_4+2C_1C_5)C_3^2+(C_1C_4^2+C_2^2C_5)C_3+C_1C_5(C_1C_5-C_2C_4)=0\,;\qquad (13)$$

équation qui ne s'élève qu'au douzième degré seulement, et encore voit-on que si $C_1C_5-C_2C_4$ était divisible par $C_3$, que si l'on avait, par exemple,

$$C_1C_5-C_2C_4=-C_3D_3\ , \qquad (14)$$

tous ses termes étant alors divisibles par $C_3$, elle deviendrait

$$C_3{}^3-(C_2C_4+2C_1C_5)C_3+C_1C_4{}^2+C_2{}^2C_5-C_1C_5D_3=0\ ; \quad (15)$$

de manière qu'elle ne s'éleverait plus qu'au neuvième degré.

## *Troisième Degré.*

Soient les deux proposées, du troisième degré,

$$\left.\begin{array}{l} A_0x^3+A_1x^2+A_2x+A_3=0\ , \\ B_0x^3+B_1x^2+B_2x+B_3=0\ ; \end{array}\right\} \quad (16)$$

si l'on prend, tour à tour, la somme de leurs produits respectifs, d'abord par $-B_0$ et $+A_0$, puis par $+B_3$ et $-A_3$; en divisant par $x$ la dernière des équations résultantes, et posant, pour abréger,

$$\left.\begin{array}{c} A_0B_1-A_1B_0=C_1\ , \quad A_2B_3-A_3B_2=C_5\ , \\ A_0B_2-A_2B_0=C_2\ , \quad A_1B_3-A_3B_1=C_4\ , \\ A_0B_3-A_3B_0=C_3\ , \\ A_1B_2-A_2B_1=D_3\ , \end{array}\right\} \quad (17)$$

d'où

$$C_1C_5-C_2C_4=(A_0B_1-A_1B_0)(A_2B_3-A_3B_2)-(A_0B_2-A_2B_0)(A_1B_3-A_3B_1)\ ;$$

ou, en développant, réduisant et décomposant,

$$C_1C_5-C_2C_4=-(A_0B_3-A_3B_0)(A_1B_2-A_2B_1)=-C_3D_3\ ;$$

elles deviendront précisément les équations (11), avec la condition (14); d'où il suit qu'on obtiendra la double valeur de $x$ et l'équation en $y$, en substituant les valeurs (17) dans les formules (12) et (15); on aura ainsi, pour la double valeur de $x$,

$$\left.\begin{aligned} x&=-\frac{(A_0B_1-A_1B_0)(A_2B_3-A_3B_2)-(A_0B_3-A_3B_0)^2}{(A_0B_1-A_1B_0)(A_1B_3-A_3B_1)-(A_0B_2-A_2B_0)(A_0B_3-A_3B_0)}\,,\\ &=-\frac{(A_0B_2-A_2B_0)(A_2B_3-A_3B_2)-(A_0B_3-A_3B_0)(A_1B_3-A_3B_1)}{(A_0B_1-A_1B_0)(A_2B_3-A_3B_2)-(A_0B_3-A_3B_0)^2}\ ; \end{aligned}\right\}(18)$$

et pour l'équation en $y$

$$\left.\begin{aligned} &(A_0B_3-A_3B_0)^3\\ -\{(A_0B_2-A_2B_0)(A_1B_3-A_3B_1)+2&(A_0B_1-A_1B_0)(A_2B_3-A_3B_2)\}(A_0B_3-A_3B_0)\\ +(A_0B_1-A_1B_0)(A_1B_3-&A_3B_1)^2+(A_2B_3-A_3B_2)(A_0B_2-A_2B_0)^2\\ -(A_0B_1-A_1B_0)&(A_1B_2-A_2B_1)(A_2B_3-A_3B_2)=0\,, \end{aligned}\right\}(19)$$

qui ne s'élève qu'au neuvième degré, comme cela doit être.

Si l'on suppose $B_3$ nul, c'est-à-dire, si l'on suppose que la dernière des équations (16) n'est que du second degré, tous les termes restans, dans l'équation (19), se trouvant divisibles par $A_3$, cette équation ne s'élevera plus qu'au sixième degré seulement. Si, ensuite, on suppose que $B_2$ est nul aussi, c'est-à-dire, si l'on suppose que la dernière des équations (16) n'est que du premier degré, tous les termes restans dans la nouvelle équation seront encore divisibles par $A_3$, de sorte qu'elle ne s'élèvera plus alors qu'au troisième degré.

Si les proposées étaient

$$\left.\begin{aligned} &C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4=0\ , \quad \text{du } 4.^{\text{me}} \text{ degré}\ , \\ &C_4x^3+C_5x^2+C_6x+C_7=0\ , \quad \text{du } 7.^{\text{me}} \text{ degré}\ , \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

la double valeur de $x$ deviendrait

$$\left.\begin{aligned} x&=-\frac{(C_1C_5-C_2C_4)(C_3C_7-C_4C_6)-(C_1C_7-C_4^2)}{(C_1C_5-C_2C_4)(C_2C_7-C_4C_5)-(C_1C_6-C_3C_4)(C_1C_2-C_4^2)}\ ; \\ &=-\frac{(C_1C_6-C_3C_4)(C_3C_7-C_4C_6)-(C_1C_7-C_4^2)(C_2C_7-C_4C_5)}{(C_1C_5-C_2C_4)(C_3C_7-C_4C_6)-(C_1C_7-C_4^2)}\ ; \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

et l'équation en $y$ serait

$$\begin{gathered} (C_1C_7-C_4^2)^3 \\ -\{(C_1C_6-C_3C_4)(C_2C_7-C_4C_5)+2(C_1C_5-C_2C_4)(C_3C_7-C_4C_6\}(C_1C_7-C_4^2) \\ +(C_1C_5-C_2C_4)(C_2C_7-C_4C_5)^2+(C_3C_7-C_4C_6)(C_1C_6-C_3C_4)^2 \\ -(C_1C_5-C_2C_4)(C_2C_6-C_3C_5)(C_3C_7-C_4C_6)=0\ ; \end{gathered}$$

ou bien, en développant et ordonnant par rapport à $C_4$,

$$\left.\begin{gathered} C_4^6-(C_3C_5+C_2C_6+3C_1C_7)C_4^4+(C_2C_5^2+3C_1C_5C_6+3C_2C_3C_7+C_3^2C_6)C_4^3 \\ +\{3C_1^2C_7^2-2(C_1C_3C_6^2+C_2^2C_5C_7)-(C_1C_5^3+C_3^3C_7)+(C_2C_6+C_1C_7)(C_2C_6-C_3C_5)\}C_4^2 \\ +\{C_1(C_6^2-2C_5C_7)(C_1C_6-C_2C_5)-(C_1C_5C_6+C_2C_3C_7)(C_1C_7-C_3C_5)+C_7(C_2^2-2C_1C_3)(C_2C_7-C_3C_6)\}C_4 \\ -C_1C_7\{(C_1C_7-C_3C_5)^2-(C_1C_6-C_2C_5)(C_2C_7-C_3C_6)\}=0\ ; \end{gathered}\right\} \quad (22)$$

équation qui ne s'élève qu'au vingt-quatrième degré seulement, et encore voit-on que, si chacun des trois binomes,

$$C_1C_6-C_2C_5\ , \qquad C_1C_7-C_3C_5\ , \qquad C_2C_6-C_3C_5\ ,$$

était divisible par $C_4$, que si l'on avait, par exemple,

$$C_1C_6-C_2C_5=-C_4D_3\,,\quad C_1C_7-C_3C_5=-C_4D_4\,,\quad C_2C_7-C_3C_6=-C_4D_5\,,\qquad(23)$$

tous ses termes étant alors divisibles par $C_4^2$, elle deviendrait simplement

$$\left.\begin{array}{c}C_4^4-(C_3C_5+2C_2C_6+3C_1C_7)C_4^2+(C_2C_5^2+3C_1C_5C_6+3C_2C_3C_7+C_3^2C_6)C_4\\ +\{3C_1^2C_7^2-2(C_1C_3C_6^2+C_2^2C_5C_7)-(C_1C_5^3+C_3^3C_7)+(C_2C_6+C_1C_7)(C_2C_6-C_3C_5)\}\\ -\{C_1(C_6^2-2C_5C_7)D_3-(C_1C_5C_6+C_2C_3C_7)D_4+C_7(C_2^2-2C_1C_3)D_5\}\\ -C_1C_7(D_4^2-D_3D_5)=0\ ;\end{array}\right\}\quad(24)$$

de manière qu'elle ne s'éleverait plus qu'au seizième degré.

## *Quatrième Degré.*

Soient encore les deux proposées du quatrième degré

$$\left.\begin{array}{l}A_0x^4+A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4=0\ ,\\ B_0x^4+B_1x^3+B_2x^2+B_3x+B_4=0\ ;\end{array}\right\}\quad(25)$$

si l'on prend, tour à tour, la somme de leurs produits respectifs, d'abord par $-B_0$ et $+A_0$, puis par $+B_4$ et $-B_4$ ; en divisant par $x$ la dernière des équations résultantes, et posant, pour abréger

$$\left.\begin{array}{c}A_0B_1-A_1B_0=C_1\ ,\quad A_3B_4-A_4B_3=C_7\ ;\\ A_0B_2-A_2B_0=C_2\ ,\quad A_2B_4-A_4B_2=C_6\ ,\\ A_0B_3-A_3B_0=C_3\ ,\quad A_1B_4-A_4B_1=B_5\ ,\\ A_0B_4-A_4B_0=C_4\ ,\\ A_1B_2-A_2B_1=D_3\ ,\ A_1B_3-A_3B_1=D_4\ ,\ A_2B_3-A_3B_2=B_5\ ;\end{array}\right\}\quad(26)$$

d'où résulte

$$C_1C_6-C_2C_5=(A_0B_1-A_1B_0)(A_2B_4-A_4B_2)-(A_0B_2-A_2B_0)(A_1B_4-A_4B_1)\ ;$$

$$C_1C_7-C_3C_5=(A_0B_1-A_1B_0)(A_3B_4-A_4B_3)-(A_0B_3-A_2B_0)(A_1B_4-A_4B_1)\ ,$$

$$C_2C_7-C_3C_6=(A_0B_2-A_2B_0)(A_3B_4-A_4B_3)-(A_0B_3-A_3B_0)(A_2B_4-A_4B_2)\ ;$$

ou , en développant , reduisant et décomposant ,

$$C_1C_5-C_2C_5=-(A_0B_4-A_4B_0)(A_1B_2-A_2B_1)=-C_4D_3\ ;$$

$$C_1C_7-C_3C_5=-(A_0B_4-A_4B_0)(A_1B_3-A_1B_2)=-C_4D_4\ ;$$

$$C_2C_7-C_3C_6=-(A_0B_4-A_4B_0)(A_2B_3-A_3B_2)=-C_4D_5\ ;$$

elles deviendront précisément les équations (20) , avec les conditions (23) ; on obtiendra donc la double valeur de $x$ et l'équation en $y$ en mettant les valeurs (26) dans les formules (21) et (24) ; et l'on voit que l'équation en $y$ ne sera que du seizième degré seulement.

A l'exemple d'Euler , nous ne pousserons pas plus loin ces recherches qui n'exigent , comme on le voit, que la peine d'écrire. En comparant notre marche à la sienne , on verra aisément combien il aurait pu s'épargner de calculs.

Comme l'équation en $y$ se complique de plus en plus , à mesure que le degré des proposées devient plus élevé , il en devient d'autant plus facile aussi qu'il s'y glisse des erreurs ; et c'est un motif pour désirer d'obtenir , sur les diverses conditions auxquelles cette équation doit satisfaire , quelques lumières qui puissent aider à découvrir les méprises qu'on aurait pu commettre en l'écrivant. C'est un sujet sur lequel nous nous arrêterons d'autant plus volontiers que les auteurs d'élémens ne s'en sont guère occupés , bien qu'il soit d'une assez haute importance pour qui aspire à exécuter sûrement des calculs tant soit peu compliqués.

Reprenons donc les deux équations générales :

$$\left.\begin{array}{l} A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots\ldots+A_{m-2}x^2+A_{m-1}x+A_m=0\ , \\ B_0x^m+B_1x^{m-1}+B_2x^{m-2}+\ldots\ldots+B_{m-2}x^2+B_{m-1}x+B_m=0\ ; \end{array}\right\}(\alpha)$$

la première remarque qui se présente est qu'en y changeant $A$ en $B$ et $B$ en $A$, on a toujours le même problème à résoudre; d'où il suit évidemment que l'équation en $y$ doit être de telle forme qu'on y puisse impunément opérer une semblable permutation.

Ces deux équations peuvent être écrites comme il suit :

$$\left.\begin{array}{l} A_m\left(\frac{1}{x}\right)^m+A_{m-1}\left(\frac{1}{x}\right)^{m-1}+A_{m-2}\left(\frac{1}{x}\right)^{m-2}+\ldots+A_2\left(\frac{1}{x}\right)^2+A_1\left(\frac{1}{x}\right)+A_0=0\ , \\ B_m\left(\frac{1}{x}\right)^m+B_{m-1}\left(\frac{1}{x}\right)^{m-1}+B_{m-2}\left(\frac{1}{x}\right)^{m-2}+\ldots+B_2\left(\frac{1}{x}\right)^2+B_1\left(\frac{1}{x}\right)+B_0=0\ ; \end{array}\right\}(\beta)$$

or, il revient évidemment au même d'éliminer $x$ entre les équations $(\alpha)$, ou d'éliminer $\frac{1}{x}$ entre les équations $(\beta)$ ; donc le résultat de la première des deux éliminations doit être tel que les coefficiens également distants des extrêmes, dans les équations $(\alpha)$, y jouent exactement le même rôle, de manière à pouvoir y être permutés entre eux sans qu'il en résulte aucun changement ; ce qui revient à dire, en d'autres termes, que l'équation en $y$ doit être telle qu'on y puisse impunément remplacer simultanément les indices de $A$ et $B$ par leurs complémens à $m$.

Si, dans les équations $(\alpha)$ on suppose que $x$ représente un nombre purement abstrait, cela ne devra rien changer à la forme de l'équation finale, où cette lettre n'entre plus ; mais alors tous les coefficiens, sous peine d'absurdité, devront être homogènes ; de telle sorte que si, par exemple, $A_0$ représente une longueur et $B_0$ un intervalle de temps, tous les coefficiens de la première équation exprimeront des longueurs, et tous ceux de la seconde des intervalles de temps ; donc aussi, sous peine d'absurdité, il faudra que tous les termes de l'équation en $y$ soient de mêmes dimensions, soit en $A$ soit en $B$ ; à plus forte raison cette équation sera-t-elle homogène par rapport aux lettres qui la composeront (*).

Supposons présentemont que, dans les équations ($\alpha$), $x$ soit le symbole d'une longueur, et que $A_0$ et $B_0$ soient des symboles de nombres abstraits ; il faudra alors, sous peine d'absurdité, que chacun des autres coefficiens exprime un produit d'autant de longueurs qu'il y a d'unités dans son indice ; d'où il suit que l'équation en $y$ devra, sous peine d'une pareille absurdité, être homogène, non seulement par rapport à ses lettres, comme nous venons tout à l'heure de le remarquer, mais aussi par rapport aux indices de ces mêmes lettres dont la somme devra ainsi être la même dans chacun de leurs termes.

Quant aux deux valeurs de $x$, fonctions des coefficiens ; les mêmes considérations prouvent qu'elles devront être telles, 1.° qu'elles restent les mêmes en y changeant les $A$ en $B$ et les $B$ en $A$, sans toucher aux indices ; 2.° qu'en y remplaçant chaque indice par son complément à $m$, leur numérateur se change en leur dénominateur, et *vice versâ* ; 3.° que ce numérateur et ce dénominateur soient des polynomes homogènes, tant par rapport aux lettres que par rapport aux indices de ces lettres ; 4.° qu'enfin les numérateurs soient, par rapport aux lettres,

(*) C'est dans cette vue que nous avons donné aux premiers termes de nos équations des coefficiens, qu'autrement nous aurions bien pu, sans leur rien faire perdre de leur généralité, supposer égaux à l'unité. Nous en usons constamment de même, dans tous les cas analogues, et notamment lorsqu'il s'agit d'exprimer une courbe et une surface par une équation entre ses coordonnées.

de mêmes dimensions que les dénominateurs, et, par rapport aux indices, d'une dimension supérieure d'une unité (*).

Telles sont donc les conditions générales les plus remarquables auxquelles doivent satisfaire, dans tous les cas, tant l'équation qui résultera de l'élimination de $x$ entre les deux proposées, que les valeurs de cette inconnue, fonctions des coefficiens de ces équations. Ce sont là tout autant de points de reconnaissance à l'aide desquels il sera bien difficile qu'une erreur de calcul puisse passer sans être aperçue. A la vérité, des résultats pourraient bien, en toute rigueur, satisfaire à ces diverses conditions sans être exacts; mais, à coup sûr, ceux qui manqueraient de satisfaire à une seule d'entre elles ne le seraient pas.

Nous terminerons par montrer brièvement comment le procédé d'élimination d'Euler pourrait être facilement étendu à un nombre quelconque d'équations entre un pareil nombre d'inconnues; soient les trois équations d'un même degré quelconque en $x$

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots\ldots+A_{m-2}x^2+A_{m-1}+A_m=0\ ;$$

(*) Beaucoup de gens, parmi ceux-là même qui passent pour habiles, pourront trouver tout ceci inintelligible si, même, ils ne le trouvent pas inepte; cela prouvera seulement que, s'ils ont poussé l'art assez loin, ils ne possèdent pas encore la science. Ils invoqueront peut-être contre la loi des homogènes, sur laquelle nous nous appuyons ici, l'autorité de M. Legendre qui a remarqué, dans ses Élémens de géométrie, qu'au moyen d'unités arbitraires, toute quantité concrète était réductible à un nombre abstrait, ce qui est très-vrai; mais, outre qu'en ces matières, l'autorité ne saurait être d'aucun poids, M. Legendre sait mieux que personne à quoi se réduiraient ses élégantes démonstrations par l'algorithme fonctionnel, si la loi des homogènes n'était point admise.

$$B_0x^m+B_1x^{m-1}+B_2x^{m-2}+\ldots\ldots+B_{m-2}x^2+B_{m-1}x+B_m=0\ ;$$

$$C_0x^m+C_1x^{m-1}+C_2x^{m-2}+\ldots\ldots+C_{m-2}x^2+C_{m-1}x+C_m=0\ ;$$

dans lesquelles ont peut supposer, si l'on veut, que les coefficiens sont des fonctions rationnelles et entières de deux autres inconnues $y$ et $z$ des degrés marqués par leurs indices respectifs. Le problème de l'élimination consiste ici à déduire de ces trois équations, en les combinant entre elles, d'une manière convenable, 1.° une valeur rationnelle de $x$, fonction de leurs coefficiens, c'est-à-dire, fonctions des deux autres inconnues $y$ et $z$; 2.° deux équations de relation entre ces mêmes coefficiens, c'est-à-dire, entre $x$ et $y$ seulement; car, dès lors, le problème se trouve ramené au cas de deux équations entre deux inconnues, c'est-à-dire, au cas qui nous a occupé jusqu'ici.

On prescrit ordinairement, pour cela, de combiner, tour à tour, une quelconque des équations proposées avec chacune des deux autres, comme nous l'avons fait dans tout ce qui précède; et l'on a soin d'observer aussitôt que le double emploi que l'on fait arbitrairement de l'une des trois équations, et le défaut de symétrie qui en résulte, a pour effet inévitable d'élever le degré des équations résultantes plus que ne le comporte la nature du problème.

Mais c'est bien gratuitement que l'on fait un double emploi de l'une des équations proposées; on peut très-aisément parvenir au but en les traitant toutes trois de la même manière; et on a même alors l'avantage de rabaisser leur degré de deux unités à chaque opération nouvelle. Si, en effet, on prend, tour à tour, la somme de leurs produits respectifs

1.° par $B_0C_1-B_1C_0$, $\quad C_0A_1-C_1A_0$; $\quad A_0B_1-A_1B_0$;

2.° par $B_0C_m-B_mC_0$, $\quad C_0A_m-C_mA_0$, $\quad A_0B_m-A_mB_0$,

3.° par $B_{m-1}C_m-B_mC_{m-1}$, $\quad C_{m-1}A_m-C_mA_{m-1}$; $\quad A_{m-1}B_m-A_mB_{m-1}$;

en divisant la seconde des équations résultantes par $x$ et la troisième par $x^2$, elles prendront aussitôt la forme

$$D_3x^{m-2}+D_4x^{m-3}+\dots\dots\dots+D_mx+D_{m+1}=0\ ;$$

$$D_{m+1}x^{m-2}+D_{m+2}x^{m-3}+\dots\dots+D_{2m-2}x+D_{2m-1}=0\ ;$$

$$D_{2m-1}x^{m-2}+D_{2m}x^{m-3}+\dots\dots+D_{3m-2}x+D_{3m-1}=0\ ;$$

en opérant de la même manière sur celles-ci, on en déduira trois autres du $(m-4)^{ieme}$ degré en $x$, et ainsi de suite ; de sorte que, si les proposées sont de degré impair, on tombera finalement sur trois équations du premier degré, desquelles on déduira la valeur de $x$ sous trois formes différentes qui, égalées entre elles, donneront en outre la double équation demandée en $y$ et $z$.

Si les proposées sont de degrés pairs, le même calcul conduira à trois équations où $x$ n'entrera plus qu'au second degré seulement. Soient ces trois équations

$$Px^2+Qx+R=0\ ;$$

$$P'x^2+Q'x+R'=0\ ;$$

$$P''x^2+Q''x+R''=0\ ;$$

d'abord, en prenant la somme de leurs produits respectifs par

$$P'Q''-P''Q'\ ,\qquad P''Q-PQ''\ ,\qquad PQ'-P'Q\ ,$$

on obtiendra cette première équation, en $y$ et $z$ seulement,

$$PQ'R''-PR'Q''+RP'Q''-QP'R''+QR'P''-RQ'P''=0\ .$$

Prenant ensuite, tour à tour, la somme de leurs produits respectifs

1.° par $P'-P''$, $P''-P$, $P-P'$,

2.° par $R'-R''$, $R''-R$, $R-R'$;

et divisant par $x$ la dernière des équations résultantes, il viendra

$$\{Q(P'-P'')+Q'(P''-P)+Q''(P-P')\}x+\{R(P'-P'')+R'(P''-P)+R''(P-P')\}=0\,;$$

$$\{P(R'-R'')+P'(R''-R)+P''(R-R')\}x+\{Q(R'-R'')+Q'(R''-R)+Q''(R-R')\}=0\,;$$

équations qui donneront de $x$ deux expressions différentes qui, égales entre elles, formeront la seconde équation en $y$ et $z$.

Si les équations étaient au nombre de quatre, entre quatre inconnues, les multiplicateurs devraient être de six termes chacun; mais aussi, à chaque opération, le degré de ces équations se trouverait abaissé de trois unités. Les multiplicateurs devraient être de vingt-quatre termes chacun, s'il s'agissait de cinq équations entre cinq inconnues; et, à chaque opération, le degré de ces équations se trouverait abaissé de quatre unités, et ainsi de suite. Tout cela ressort manifestement de la théorie développée à la pag. 148 du IV.me volume du présent recueil, théorie qu'on n'avait point encore songé à étendre à l'élimination dans les degrés supérieurs. A la vérité, malgré cette manière de procéder, les résultats se trouveront encore compliqués de facteurs étrangers; mais ici, comme dans le cas de deux inconnues, ces facteurs se reconnaîtront très-aisément.

•

Cramer est le premier qui ait reconnu la loi de construction des valeurs des inconnues, dans les équations du premier degré, et l'on a pu voir, à l'endroit que nous venons de citer, combien la généralité de cette loi est facile à démontrer. Peut-être un jour parviendra-t-on aussi à découvrir la loi qui préside à la formation des valeurs des inconnues dans les équations des degrés supérieurs.

Nous nous estimerions heureux si les considérations qui précèdent pouvaient tendre à rendre un peu moins lointaine l'époque de cette importante découverte.

---

# QUESTIONS RÉSOLUES.

## *Solution de quatre des problèmes de géométrie énoncés à la pag. 315 du précédent volume ;*

Par M. VALLÈS, ingénieur des ponts et chaussées, ancien élève de l'Ecole polytechnique.

---

PROBLÈME I. *Étant données les longueurs des droites qui joignent les trois sommets d'un triangle au centre du cercle inscrit ; construire le triangle ?*

*Solution.* Soient $a$, $b$, $c$ les trois longueurs données, $r$ le rayon du cercle inscrit au triangle, et $2\alpha$, $2\beta$, $2\gamma$ les angles que forment autour du centre de ce cercle les droites qui joignent ce centre aux trois points de contact. En observant que ces angles sont partagés en deux parties égales par les droites données $a$, $b$, $c$, on aura

$$\text{Cos.}\alpha=\frac{r}{a}\ ,\quad \text{Cos.}\beta=\frac{r}{b}\ ,\quad \text{Cos.}\gamma=\frac{r}{c}\ ;$$

d'où

$$\text{Sin.}\alpha=\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{a}\ ,\quad \text{Sin.}\beta=\frac{\sqrt{b^2-r^2}}{b}\ ,\quad \text{Sin.}\gamma=\frac{\sqrt{c^2-r^2}}{c}\ ,$$

or, puisque $2\alpha+2\beta+2\gamma$ vaut quatre angles droits, $\alpha+\beta+\gamma$ doit en valoir deux ; ce qui revient à dire que $\gamma$ est supplément de $\alpha+\beta$, et donne

$$\text{Cos}.\gamma=-\text{Cos}.(\alpha+\beta)=\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.\beta-\text{Cos}.\alpha\text{Cos}.\beta\ ,$$

ou, en transposant,

$$\text{Cos}.\gamma+\text{Cos}.\alpha\text{Cos}.\beta=\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.\beta\ ;$$

on aura donc, en substituant,

$$\frac{r}{c}+\frac{r^2}{ab}=\frac{\sqrt{(a^2-r^2)(b^2-r^2)}}{ab}\ ;$$

d'où en quarrant, chassant les dénominateurs, transposant, réduisant et ordonnant,

$$2abcr^3+(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)r^2-a^2b^2c^2=0\ .$$

Si présentement on représente par $X$, $Y$, $Z$ les trois angles du triangle demandé, en remarquant que ces angles sont divisés en deux parties égales par les droites données $a$, $b$, $c$, et que leurs moitiés sont les complémens respectifs des angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, on aura

$$\text{Sin}.\tfrac{1}{2}X=\text{Cos}.\alpha=\frac{r}{a}\ ,\quad \text{Sin}.\tfrac{1}{2}Y=\text{Cos}.\beta=\frac{r}{b}\ ,\quad \text{Sin}.\tfrac{1}{2}Z=\text{Cos}.\gamma=\frac{r}{c}\ ,$$

d'où

$$1-\text{Cos}.X=\frac{2r^2}{a^2}\ ,\qquad 1-\text{Cos}.Y=\frac{2r^2}{b^2}\ ,\qquad 1-\text{Cos}.Z=\frac{2r^2}{c^2}\ ;$$

et, par suite,

$$\text{Cos}.X=\frac{a^2-2r^2}{a^2}\ ,\qquad \text{Cos}.Y=\frac{b^2-2r^2}{b^2}\ ,\qquad \text{Cos}.Z=\frac{c^2-2r^2}{c^2}\ ,$$

il en résultera

$$\text{Sin}.X = \frac{2r\sqrt{a^2-r^2}}{a^2}, \quad \text{Sin}.Y = \frac{2r\sqrt{b^2-r^2}}{b^2}, \quad \text{Sin}.Z = \frac{2r\sqrt{c^2-r^2}}{c^2}.$$

Si l'on représente par $x, y, z$ les trois côtés de ce même triangle, on aura

$$x = b\text{Sin}.\beta + c\text{Sin}.\gamma,$$

$$y = c\text{Sin}.\gamma + a\text{Sin}.\alpha,$$

$$z = a\text{Sin}.\alpha + b\text{Sin}.\beta;$$

c'est-à-dire,

$$x = \sqrt{b^2-r^2} + \sqrt{c^2-r^2},$$

$$y = \sqrt{c^2-r^2} + \sqrt{a^2-r^2},$$

$$z = \sqrt{a^2-r^2} + \sqrt{b^2-r^2};$$

mais des valeurs des sinus des angles, données ci-dessus, on tire

$$\sqrt{a^2-r^2} = \frac{a^2\text{Sin}.X}{2r}, \quad \sqrt{b^2-x^2} = \frac{b^2\text{Sin}.Y}{2r}, \quad \sqrt{c^2-x^2} = \frac{c^2\text{Sin}.Z}{2r},$$

ce qui donnera, en substituant,

$$x = \frac{b^2\text{Sin}.Y + c^2\text{Sin}.Z}{2r};$$

$$y = \frac{c^2\text{Sin}.Z + a^2\text{Sin}.X}{2r};$$

$$z = \frac{a^2\text{Sin}.X + b^2\text{Sin}.Y}{2r}.$$

Toutes ces valeurs étant fonction de $r$, qui est donné par une équation du troisième degré, il s'ensuit que le problème sera toujours possible, quels que soient les trois longueurs données $a$, $b$, $c$. En mettant l'équation en $r$ sous cette forme

$$\left(\frac{1}{r}\right)^3-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{2}{abc}=0\ ,$$

elle sera sans second terme, et on en déduira que le problème doit avoir une, deux ou trois solutions, suivant que la fonction

$$\frac{27}{a^2b^2c^2}-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^3\ ,$$

est positive, nulle ou négative.

*PROBLÈME II. Etant données les longueurs des perpendiculaires abaissées sur les directions des trois côtés d'un triangle du centre du cercle circonscrit ; construire le triangle ?*

*Solution.* Soient $a$, $b$, $c$ les trois longueurs données, $R$ le rayon du cercle circonscrit, et $2\alpha$, $2\beta$, $2\gamma$ les angles formés autour de son centre par les droites qui joignent ce centre à ses trois sommets. En considérant que ces angles sont divisés en deux parties égales par les droites données $a$, $b$, $c$, on aura

$$\text{Cos}\alpha=\frac{a}{R}\ ,\qquad \text{Cos.}\beta=\frac{b}{R}\ ,\qquad \text{Cos.}\gamma=\frac{c}{R}\ ;$$

et, par suite,

$$\text{Sin.}\alpha=\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\ ,\quad \text{Sin.}\beta=\frac{\sqrt{R^2-b^2}}{R}\ ,\quad \text{Sin.}\gamma=\frac{\sqrt{R^2-c^2}}{R}\ ;$$

on aura d'ailleurs, comme ci-dessus,

$$\text{Cos.}\gamma+\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta=\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\beta\ ;$$

ce qui donnera, en substituant,

$$\frac{c}{R}+\frac{ab}{R^2}=\frac{\sqrt{(R^2-a^2)(R^2-b^2)}}{R^2};$$

d'où en quarrant, chassant les dénominateurs, réduisant, transposant et ordonnant,

$$R^3-(a^2+b^2+c^2)R-2abc=0;$$

Si présentement on représente par $x$, $y$, $z$ les trois côtés du triangle demandé, en remarquant que ces côtés sont divisés en deux parties égales par les droites données $a$, $b$, $c$, on aura

$$x=2\sqrt{R^2-a^2}, \quad y=2\sqrt{R^2-b^2}, \quad z=2\sqrt{R^2-c^2}.$$

Si $X$, $Y$, $Z$ sont les trois angles du triangle, en remarquant que ces angles sont les moitiés respectives des angles $2\alpha$, $2\beta$, $2\gamma$, on aura

$$\text{Cos.}X=\text{Cos.}\alpha=\frac{a}{R}, \quad \text{Cos.}Y=\text{Cos.}\beta=\frac{b}{R}, \quad \text{Cos.}Z=\text{Cos.}\gamma=\frac{c}{R};$$

Toutes ces valeurs étant des fonctions de $R$, qui est donné par une équation du troisième degré, il s'ensuit que le problème est toujours possible quelles que soient les trois longueurs données $a$, $b$, $c$; et, comme cette équation est sans second terme, on voit, sur-le-champ, que le problème aura une, deux ou trois solutions, suivant que la fonction

$$27a^2b^2c^2-(a^2+b^2+c^2)^3,$$

sera positive, nulle ou négative.

*PROBLÈME III. Étant données les longueurs des arcs de grands cercles qui joignent les trois sommets d'un triangle sphérique au pôle du cercle inscrit; contruire le triangle?*

*Solution.* Soient $a$, $b$, $c$ les trois arcs donnés, $r$ le rayon sphérique du cercle inscrit, et $2\alpha$, $2\beta$, $2\gamma$ les angles que forment, autour de son pôle, les arcs de grands cercles qui joignent ce pôle aux trois points de contact. En observant que ces angles sont partagés en deux parties égales par les arcs $a$, $b$, $c$, on aura

$$\mathrm{Cos}.\alpha=\frac{\mathrm{Cot}.a}{\mathrm{Cot}.r}\ ,\quad \mathrm{Cos}.\beta=\frac{\mathrm{Cot}.b}{\mathrm{Cot}.r}\ ,\quad \mathrm{Cos}.\gamma=\frac{\mathrm{Cot}.c}{\mathrm{Cot}.r}\ ;$$

d'où

$$\mathrm{Sin}.\alpha=\frac{\sqrt{\mathrm{Cot}.^2r-\mathrm{Cot}.^2a}}{\mathrm{Cot}.r},\ \mathrm{Sin}.\beta=\frac{\sqrt{\mathrm{Cot}.^2r-\mathrm{Cot}.^2b}}{\mathrm{Cot}.r},\ \mathrm{Sin}.\gamma=\frac{\sqrt{\mathrm{Cot}.^2r-\mathrm{Cot}.^2c}}{\mathrm{Cot}.r}\ ;$$

or, on a ici, comme dans le *Problème I*,

$$\mathrm{Cos}.\gamma+\mathrm{Cos}.\alpha\mathrm{Cos}.\beta=\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Sin}.\beta\ ;$$

il viendra donc, en substituant,

$$\frac{\mathrm{Cot}.c}{\mathrm{Cot}.r}+\frac{\mathrm{Cot}.a\mathrm{Cot}.b}{\mathrm{Cot}.^2r}=\frac{\sqrt{(\mathrm{Cot}.^2r-\mathrm{Cot}.^2a)(\mathrm{Cot}.^2r-\mathrm{Cot}.^2b)}}{\mathrm{Cot}.^2r}\ ;$$

ce qui donnera

$$\mathrm{Cot}.^3r-(\mathrm{Cot}.^2a+\mathrm{Cot}.^2b+\mathrm{Cot}.^2c)\mathrm{Cot}.r-2\mathrm{Cot}.a\mathrm{Cot}.b\mathrm{Cot}.c=0\ .$$

Si présentement on représente par $X$, $Y$, $Z$ les trois angles du triangle demandé ; en remarquant que ces angles sont divisés en deux parties égales par les arcs donnés $a$, $b$, $c$, on aura

$$\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}X=\frac{\mathrm{Sin}.r}{\mathrm{Sin}.a}\ ,\quad \mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}Y=\frac{\mathrm{Sin}.r}{\mathrm{Sin}.b}\ ,\quad \mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}Z=\frac{\mathrm{Sin}.r}{\mathrm{Sin}.c}\ ;$$

et une fois les trois angles du triangle connus, il sera facile d'en conclure les trois côtés.

Ces angles et ces côtés étant des fonctions de $r$, dont la cotangente est donnée par une équation du troisième degré, on peut en conclure que le problème est toujours possible. Il admettra d'ailleurs une, deux ou trois solutions, suivant que la fonction

$$27\text{Cot.}^2a\text{Cot.}^2b\text{Cot.}^2c-(\text{Cot.}^2a+\text{Cot.}^2b+\text{Cot.}^2c)^3\ ,$$

sera positive, nulle ou négative.

*PROBLÈME IV. Étant données les longueurs des arcs perpendiculaires abaissés sur les directions des trois côtés d'un triangle sphérique du pôle du cercle circonscrit ; construire le triangle ?*

*Solution.* Soient $a$, $b$, $c$ les trois longueurs données, $R$ le rayon sphérique du cercle circonscrit, et $2\alpha$, $2\beta$, $2\gamma$ les angles formés autour de son pôle par les arcs de grands cercles qui joignent ce pôle aux trois sommets. En considérant que ces angles sont divisés en deux parties égales par les arcs donnés $a$, $b$, $c$, on aura

$$\text{Cos.}\alpha=\frac{\text{Tang.}a}{\text{Tang.}R}\ ,\quad \text{Cos.}\beta=\frac{\text{Tang.}b}{\text{Tang.}R}\ ,\quad \text{Cos.}\gamma=\frac{\text{Tang.c}}{\text{Tang.}R}\ ;$$

d'où

$$\text{Sin.}\alpha=\frac{\sqrt{\text{Tang.}^2R-\text{Tang.}^2a}}{\text{Tang.}R}\ ,\quad \text{Cos.}\beta=\frac{\sqrt{\text{Tang.}^2R-\text{Tang.}^2b}}{\text{Tang.}R}\ ,\quad \text{Cos.}\gamma=\frac{\sqrt{\text{Tang.}^2R-\text{Tang.}^2c}}{\text{Tang.}R}\ ;$$

mais on aura encore ici, comme dans le *Problème II*,

$$\text{Cos.}\gamma+\text{Cos.}\alpha+\text{Cos.}\beta=\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\beta\ ;$$

ce qui donnera, en substituant,

$$\frac{\text{Tang.}c}{\text{Tang.}R}+\frac{\text{Tang.}a\text{Tang.}b}{\text{Tang.}^2R}=\frac{\sqrt{(\text{Tang.}^2R-\text{Tang.}^2a)(\text{Tang.}^2R-\text{Tang.}^2b)}}{\text{Tang.}^2R}\ ;$$

c'est-à-dire,

$$\text{Tang.}^3R-(\text{Tang.}^2a+\text{Tang.}^2b+\text{Tan.}^2c)\text{Tang.}R-2\text{Tang.}a\text{Tang.}b\text{Tang.}c=0\,.$$

Si ensuite on représente par $x$, $y$, $z$ les trois côtés du triangle ; en remarquant que ces côtés sont divisés en deux parties égales par les arcs $a$, $b$, $c$, on aura

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=\frac{\text{Cos.}R}{\text{Cos.}a}\,,\quad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}y=\frac{\text{Cos.}R}{\text{Cos.}b}\,,\quad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}z=\frac{\text{Cos.}R}{\text{Cos.}c}\,;$$

et, une fois les trois côtés du triangle connus, il sera facile d'en conclure les trois angles.

Ces côtés et ces angles étant ainsi des fonctions de $R$, dont la tangente est donnée par une équation du troisième degré, il en résulte que le problème est toujours possible. Il admettra d'ailleurs une, deux ou trois solutions, suivant que la fonction

$$27\text{Tang.}^2a\text{Tang.}^2b\text{Tang.}^2c-(\text{Tang.}^2a+\text{Tang.}^2b+\text{Tang.}^2c)^3\,,$$

sera positive, nulle on négative.

Si, dans les deux derniers problèmes, on suppose le rayon de la sphère infini, ils deviendront respectivement les deux premiers, que nous aurions pu ainsi nous dispenser de traiter en particulier.

---

# QUESTIONS PROPOSÉES.

## *Problèmes de Géométrie.*

I. MENER, dans l'intérieur d'un triangle, deux droites telles que chacune d'elles contienne les centres de gravité des aires des deux segmens du triangle, déterminés par l'autre?

II. Conduire, dans l'intérieur d'un tétraèdre, trois plans tels que l'intersection de deux quelconques contienne les centres de gravité des volumes des deux segmens du tétraèdre, déterminés par le troisième?

# ANALYSE TRANSCENDANTE.

## *Essai sur une méthode générale d'intégration ;*

Par M. Le Barbier.

Nous avons présenté, à la pag. 117 du précédent volume, l'essai d'une méthode générale d'intégration qui, appliquée aux fonctions qui sont le produit de deux facteurs, nous a conduit à des séries régulières, desquelles nous avons déduit, pour le cas de $m=1$, les fonctions finies dont elles sont le développement. On peut en inférer, à ce qu'il nous paraît, que cette méthode ne peut sembler illusoire, dans certains cas, que parce qu'on ne sait pas généralement remonter d'une série à sa fonction génératrice, ou bien parce que la série à laquelle on parvient n'est pas convergente; mais ces inconvéniens ne sont pas particuliers à cette méthode, puisqu'en général les intégrales qui sont du genre des transcendantes ne peuvent s'obtenir que par des séries.

Pour faire mieux apprécier ce qu'on peut se promettre de cette méthode, nous allons en présenter encore ici quelques nouvelles applications.

Reprenons la formule du bas de la page 122 du précédent volume ; savoir :

$$\frac{d^m.PQ}{dx^m}=P\frac{d^mQ}{dx^m}+\frac{m}{1}\,\frac{dP}{dx}\cdot\frac{d^{m-1}Q}{dx^{m-1}}+\frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2}\,\frac{d^2P}{dx^2}\,\frac{d^{m-2}Q}{dx^{m-2}}+\ldots;(1)$$

en y changeant le signe de $m$, elle deviendra

$$\int^m PQ\mathrm{d}x^m = P\int^m Q\mathrm{d}x^m - \frac{m}{1}\,\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\int^{m+1} Q\mathrm{d}x^{m+1} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\,\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}x^2}\int^{m+2} Q\mathrm{d}x^{m+2} + \ldots\ldots \qquad (2)$$

Si l'on pose

$$P=(x+a)^r\ ; \qquad Q=(x+b)^r\ ;$$

on aura

$$\frac{\mathrm{d}^\mu(x+b)^r}{\mathrm{d}x^\mu} = r^{\mu|-1}\cdot(x+b)^{r-\mu}\ ;$$

si, dans cette dernière formule, on change le signe de $\mu$, en se rappelant que

$$r^{-\mu|-1} = \frac{1}{(r+\mu)^{\mu|-1}}\ ;$$

il viendra

$$\int^\mu (x+b)^r\mathrm{d}x^\mu = \frac{(x+b)^{r+\mu}}{(r+\mu)^{\mu|-1}}\ ;$$

on a d'ailleurs

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = r(x+a)^{r-1}\ ;$$

$$\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}^2x} = r(r-1)(x+a)^{r-2} = r^{2|-1}(x+a)^{r-2}\ ;$$

$$\frac{\mathrm{d}^3P}{\mathrm{d}x^3} = r(r-1)(r-2)(x+a)^{r-3} = r^{3|-1}(x+a)^{r-3}\ ;$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ;

Il viendra donc, en remplaçant successivement $\mu$ par $m$, $m+1$; $m+2$, ..... et substituant dans (2),

$$\int^m \{(x+a)(x+b)\}^r dx^m = \frac{1}{(r+m)^{m|-1}}(x+a)^r(x+b)^{r+m}$$

$$-\frac{m}{1}\,\frac{r}{(r+m+2)^{m+1|-1}}(x+a)^{r-1}(x+b)^{r+m+1}$$

$$+\frac{m}{1}\,\frac{m+1}{2}\,\frac{r^{2|-1}}{(r+m+2)^{m+2|-1}}(x+a)^{r-2}(x+b)^{r+m+2}$$

$$-\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\,\frac{r^{3|-1}}{(r+m+3)^{m+3|-1}}(x+a)^{r-3}(x+b)^{r+m+3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \qquad (3)$$

ou bien encore

$$\int^m \{(x+a)(x+b)\}^r dx^m = \frac{(x+a)^r(x+b)^{r+m}}{(r+m)^{m|-1}}\Big\{1-\frac{mr}{r+m+1}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)$$

$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\,\frac{r^{2|-1}}{(r+m+2)^{2|-1}}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^2-\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\,\frac{r^{3|-1}}{(r+m+3)^{3|-1}}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^3+\ldots\ldots\Big\}. \qquad (4)$$

Posant $m=1$, il vient

$$\int\{(x+a)(x+b)\}^r dx = \frac{(x+a)^r(x+b)^{r+1}}{r+1}\Big\{1-\frac{r}{r+2}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)+\frac{r^{2|-1}}{(r+3)^{2|-1}}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^2$$

$$-\frac{r^{3|-1}}{(r+4)^{3|-1}}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^3+\frac{r^{4|-1}}{(r+5)^{4|-1}}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^4+\ldots\ldots\Big\}. \qquad (5)$$

Dans le cas particulier de $r=-\frac{1}{2}$, on trouve

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = 2\sqrt{\frac{x+a}{x+b}}\Big\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2+\frac{1}{7}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^3+\ldots\ldots\Big\},$$

ou bien encore

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}=2\left\{\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{5}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{7}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{\frac{7}{2}}+\ldots\ldots\right\}. \quad (6)$$

Or on a, dans le système Népérien,

$$\text{Log.}\left(\frac{1+u}{1-u}\right)=2\left(\frac{u}{1}+\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+\frac{u^7}{7}+\ldots\ldots\right);$$

posant donc

$$\frac{1+u}{1-u}=z, \quad \text{d'où} \quad u=\frac{z-1}{z+1};$$

on aura

$$\text{Log.}z=2\left\{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^7+\ldots\right\};$$

donc, si l'on pose

$$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{z-1}{z+1}; \qquad (7)$$

on aura

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}=\text{Log.}z;$$

mais on tire de la formule (7)

$$z=\frac{\sqrt{x+b}+\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+b}-\sqrt{x+a}};$$

donc finalement

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}=\text{Log.}\frac{\sqrt{x+b}+\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+b}-\sqrt{x+a}}. \quad (8)$$

La formule (5) peut encore être écrite ainsi

$$\int\{(x+a)(x+b)\}^r\mathrm{d}x=\frac{\{(x+a)(x+b)\}^r(x+b)}{r+1}\left\{1-\frac{r}{r+2}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)+\frac{r^{2|-1}}{(r+3)^{2|-1}}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^2\right.$$

$$\left.-\frac{r^{3|-1}}{(r+4)^{3|-1}}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^3+\frac{r^{4|-1}}{(r+5)^{4|-1}}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^4-\ldots\ldots\right\}.$$

Si l'on change, dans cette dernière formule, d'abord $x+b$ en $-(x+b)$, puis ensuite $b$ en $-b$, et qu'on pose en outre $r=-\frac{1}{2}$, elle deviendra

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a+x)(b-x)}}=-2\left\{\left(\frac{b-x}{a+x}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\left(\frac{b-x}{a+x}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{5}\left(\frac{b-x}{a+x}\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{7}\left(\frac{l-x}{a+x}\right)^{\frac{7}{2}}+\ldots\ldots\right\};$$

or, on a généralement

$$x=\mathrm{Tang.}x-\frac{1}{3}\mathrm{Tang.}^3x+\frac{1}{5}\mathrm{Tang.}^5x-\frac{1}{7}\mathrm{Tang.}^7x+\ldots.;$$

donc

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a+x)(b-x)}}=-2\,\mathrm{Arc}\left(\mathrm{Tang.}=\sqrt{\frac{b-x}{a+x}}\right). \qquad (9)$$

On voit que cette méthode d'intégration s'applique immédiatement aux deux différentielles

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A+Bx-Cx^2}},$$

par un simple changement de signe, tandis que les méthodes ordinaires exigent un procédé propre pour chacune d'elles.

On peut remarquer en outre que les formules (4) et (5) renferment une infinité de cas particuliers qu'il ne serait pas facile de traiter sans le secours de la formule (2) ; car $r$ est une grandeur quelconque, et $m$ un nombre entier positif quelconque. De plus, la formule (4) finit toujours par devenir convergente. En effet, ses termes des $(\mu+1)^{ième}$ et $(\mu+2)^{ième}$ rangs sont respectivement

$$\frac{m^{\mu|1}}{1^{\mu|1}}\cdot\frac{r^{\mu|-1}}{(r+m+\mu)^{\mu|-1}}\cdot\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^{\mu}\ ,$$

$$\frac{m^{\mu+1|1}}{1^{\mu+1|1}}\cdot\frac{r^{\mu+1|-1}}{(r+m+\mu+1)^{\mu+1|-1}}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^{\mu+1}\ ;$$

de sorte que le quotient de la division du second par le premier est

$$\frac{m^{\mu+1|1}}{m^{\mu|1}}\cdot\frac{1^{\mu|1}}{1^{\mu+1|1}}\cdot\frac{r^{\mu+1|-1}}{r^{\mu|-1}}\cdot\frac{(r+m+\mu)^{\mu|-1}}{(r+m+\mu+1)^{\mu+1|-1}}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)\ ;$$

or, on trouve aisément

$$\frac{m^{\mu+1|1}}{m^{\mu|1}}=m+\mu\ ,$$

$$\frac{1^{\mu|1}}{1^{\mu+1|1}}=\frac{1}{\mu+1}\ ,$$

$$\frac{r^{\mu+1|-1}}{r^{\mu|-1}}=r-\mu\ ,$$

$$\frac{(r+m+\mu)^{\mu|-1}}{(r+m+\mu+1)^{\mu+1|-1}}=\frac{1}{r+m+\mu+1}\ ;$$

au moyen de quoi ce quotient se réduit simplement à

$$\frac{m+\mu}{1+\mu}\cdot\frac{r-\mu}{r+m+\mu+1}\cdot\frac{x+b}{x+a}\ ;$$

or, on peut toujours prendre $\mu$ assez grand pour qu'on ait

$$(1+\mu)(r+m+\mu+1)>(m+\mu)(r-\mu)\ ;$$

car, en développant et réduisant, cette inégalité revient à

$$2\mu^2+2(m+1)\mu+(m+r-mr)>0\ ;$$

à laquelle on peut toujours satisfaire par une détermination convenable de $\mu$, quels que soient $m$ et $r$.

La série (4) est celle qu'il conviendra d'employer de préférence si l'on a $a>b$; car alors on aura $\frac{x+b}{x+a}<1$ ; mais, si le contraire a lieu, il faudra substituer a cette série celle qu'on en déduit en y mettant $a$ pour $b$ et $b$ pour $a$.

M. Wronski, dans son *Introduction à la philosophie des mathématiques*, publiée en 1811, a présenté les formules (1) et (2) comme renfermant la loi fondamentale, l'une du calcul différentiel et l'autre du calcul intégral ; nous ignorons si une branche de calcul, quelle qu'elle soit, peut avoir d'autre loi fondamentale que sa définition ; mais du moins est-il vrai de dire que si, sous le rapport des applications, un usage trop exclusif de ces formules semble devoir entraîner souvent dans des calculs beaucoup plus longs que ceux qu'exigent les autres procédés connus, ces mêmes formules n'en résolvent pas moins une infinité de cas qu'il serait très-difficile, pour ne pas dire impossible, de traiter par les procédés connus.

Pour montrer mieux encore l'usage de ces formules, nous en ferons deux autres applications. Nous prendrons pour la première la différentielle

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[x]{e}} \quad \text{ou} \quad e^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x\ ;$$

traitée par M. Wronski, dans son dernier ouvrage publié en 1816, ayant pour objet le *Développement des lois des séries*. Posons $x=\frac{1}{y}$, il en résultera

$$\frac{1}{x}=y \;, \qquad \mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}y}{y^2} \;;$$

et par conséquent

$$e^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{y^2}e^{-y}\mathrm{d}y=-y^{-2}.e^{-y}\mathrm{d}y.$$

Posant alors

$$P=y^{-2} \;, \qquad Q=e^{-y} \;,$$

nous aurons d'une part

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=-2y^{-3} \;,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}y^2}=+2.3y^{-4} \;,$$

$$\frac{\mathrm{d}^3P}{\mathrm{d}y^3}=-2.3.4y^{-5} \;,$$

. . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{\mathrm{d}^\mu P}{\mathrm{d}y^\mu}=(-1)^\mu.2^{\mu|1}.y^{-(\mu+2)}. \qquad (10)$$

D'une autre part, nous aurons

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}y}=-e^{-y} \;,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}y^2}=+e^{-y} \;,$$

$$\frac{\mathrm{d}^3Q}{\mathrm{d}y^3}=-e^{-y} \;,$$

. . . . . . . . .

$$\frac{\mathrm{d}^\mu Q}{\mathrm{d}y^\mu}=(-1)^\mu.e^{-y} \;; \qquad (11)$$

en changeant le signe de $\mu$ et observant que

$$2^{-\mu|1} = \frac{1}{(2-\mu)^{\mu|1}},$$

on trouvera

$$\int^{\mu} P dy^{\mu} = \frac{(-1)^{\mu}}{(2-\mu)^{\mu|1}} y^{\mu-2}, \quad (12) \qquad \int^{\mu} Q dy^{\mu} = (-1)^{\mu} e^{-y}. \quad (13)$$

Au moyen des formules (10) et (13), la formule (2) donnera la série suivante

$$\int^{m} \frac{e^{-y}}{y^2} dy = (-1)^m e^{-y} \left\{ \frac{1}{y^2} - 2\frac{m}{y^3} + 3\frac{m(m+1)}{y^4} - 4\frac{m(m+1)(m+2)}{y^5} + \ldots\ldots\ldots \right\},$$

d'où, en faisant $m=1$

$$\int \frac{e^{-y}}{y^2} dy = -e^{-y} \left\{ \frac{1}{y^2} - \frac{1^{2|1}}{y^3} + \frac{1^{3|1}}{y^4} - \frac{1^{4|1}}{y^5} + \frac{1^{5|1}}{y^6} - \ldots\ldots \right\};$$

ou enfin, en remettant pour $y$ sa valeur $\frac{1}{x}$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[x]{e}} = \frac{1}{\sqrt[x]{e}} (x^2 - 1.2x^3 + 1.2.3x^4 - 1.2.3\,4x^5 + 1.2.3.4.5x^6 - \ldots\ldots\ldots); \quad (14)$$

cette dernière intégrale avait déjà été traitée par Euler, à la page 282 de son *Calcul intégral.*

Nous prendrons, pour second exemple, la différentielle

$$\frac{dt}{e^{t^2}} \quad \text{ou} \quad e^{t^2} dt,$$

traitée par Laplace, dans ses réfractions astronomiques ( *Mécanique céleste*, tom. IV, pag. 255 ).

Posons $t^2 = x$, il en résultera

$$t=\sqrt{x}\;,\quad 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x\;,\quad \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{2t}=\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}\;;$$

et par suite

$$e^{-t^2}\mathrm{d}t=e^{-x}\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}=\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.e^{-x}\mathrm{d}x\;;$$

posant alors

$$P=x^{-\frac{1}{2}}\;,\qquad Q=e^{-x}\;,$$

on trouvera

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=-\tfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\;,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}x^2}=+\frac{1.3}{2.2}x^{-\frac{5}{2}}\;,$$

$$\frac{\mathrm{d}^3P}{\mathrm{d}x^3}=-\frac{1.3.5}{2.2.2}x^{-\frac{7}{2}}\;,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\mathrm{d}^\mu P}{\mathrm{d}x^\mu}=(-1)^\mu\frac{1^{\mu|2}}{2^\mu}x^{-\frac{2\mu+1}{2}}\;;$$

on aura d'ailleurs

$$\int^\mu Q\mathrm{d}x^\mu=(-1)^\mu e^{-x}\;;$$

substituant donc dans la formule (2), on aura

$$\tfrac{1}{2}\int^m\frac{\mathrm{d}x^m}{e^x\sqrt{x}}=\frac{(-1)^m}{e^x}\left\{x^{-\frac{1}{2}}-\frac{m}{1}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.2}x^{-\frac{5}{2}}-\ldots\right\}\;;$$

d'où, en posant $m=1$ et en remettant pour $x$ sa valeur $t^2$,

$$\int e^{-t^2}dt = -e^{-t^2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^3}+\frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{1}{t^5}-\frac{1.3.5}{2.2.2}\cdot\frac{1}{t^7}+\ldots\ldots\right).$$

Nous pourrons revenir, dans une autre occasion, sur ces sortes d'applications.

---

# ARITHMÉTIQUE.

## *Note sur un théorème d'arithmétique;*

### Par M. GERGONNE.

En considérant que, dans un demi-cercle, la perpendiculaire abaissée de l'un quelconque des points de la demi-circonférence sur le diamètre est moyenne par quotient entre les deux segmens qu'elle détermine sur ce diamètre, tandis que le rayon du cercle est moyen par différence entre ces deux mêmes segmens, on voit, sur-le-champ, que la moyenne par quotiens, entre deux grandeurs inégales, est constamment moindre que la moyenne par différences entre les mêmes grandeurs, et d'autant moindre, par rapport à l'autre, qu'elles sont plus inégales. On aperçoit aussi, fort aisément, à l'aide des mêmes considérations géométriques, qu'il suffit que ces deux grandeurs ne soient pas très-inégales pour que la moyenne par quotient entre elles soient très-sensiblement égale à la moyenne par différence.

Il est connu, en effet, et on démontre même facilement (tom. XVII, pag. 150), que, lorsque la différence entre deux nombres entiers a moins de la moitié des chiffres du plus petit, la moyenne par différences entre eux n'excède pas la moyenne par quotient d'une demi-unité. Mais il ne paraît pas qu'il ait été remarqué jusqu'ici que cet excès n'est pas même *d'un huitième d'unité ;* et voici à peu près comment M. Lenthéric démontre cette proposition.

Soient $a$ et $b$ les deux nombres dont il s'agit, et soit $a>b$. Par hypothèse, le nombre des chiffres de $a-b$ est moindre que la moitié du nombre des chiffres de $b$ ; or, comme le quarré d'un nombre a au plus le double du nombre de ses chiffres, il s'ensuit que $(a-b)^2$ n'aura pas autant de chiffres que $b$ ; de sorte qu'on aura

$$(a-b)^2<b\;. \qquad (1)$$

Cela posé, à cause de $b<a$, on a $\sqrt{b}<\sqrt{a}$, d'où $\sqrt{a}+\sqrt{b}>2\sqrt{b}$ ; d'où, en quarrant, divisant par 4 et renversant

$$b<\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2\;; \qquad (2)$$

donc, en comparant (1) à (2),

$$(a-b)^2<\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2\;,$$

et par suite

$$a-b<\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\;,$$

ou encore

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})<\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\;;$$

ce qui donne, en simplifiant,

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\tfrac{1}{2}\;, \qquad (3)$$

puis en quarrant

$$a-2\sqrt{ab}+b<\tfrac{1}{4}\ ;$$

inégalité qui, en divisant par 2, peut être ensuite écrite comme il suit :

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{1}{8}\ ;$$

ce qui démontre le théorème annoncé.

Ce théorème s'applique évidemment à deux nombres décimaux dans lesquels le nombre des chiffres décimaux serait le même, et qui, abstraction faite de la virgule, tomberaient dans le cas des deux nombres entiers dont il vient d'être question ; l'excès de leur demi-somme sur la racine quarrée de leur produit serait moindre que *le huitième* d'une unité décimale du dernier ordre.

L'inégalité (3) prouve, en passant, que lorsqu'on a à extraire la racine quarrée d'un nombre, on peut modifier des chiffres sur la droite de ce nombre, sans altérer la racine d'une demi-unité du dernier ordre, pourvu que le nombre des chiffres modifiés soit moindre que la moitié du nombre total des chiffres du nombre dont il s'agit.

Il résulte encore de tout ceci que si l'on a à extraire la racine quarrée d'un nombre exprimé par l'unité, plus une fraction décimale, dans laquelle le premier chiffre décimal significatif est précédé d'autant de zéros au moins qu'il a de chiffres décimaux significatifs, on aura cette racine avec le même degré d'approximation qu'offre le nombre proposé, en remplaçant simplement la partie décimale par sa moitié. En effet, extraire, par exemple, la racine quarrée de 1,000512, c'est extraire la racine quarrée du produit $1{,}000512\times1{,}000000$, laquelle, par ce qui précède, sera, à moins d'un *huitième* de millionième près, la même chose que la moitié de 2,000512, c'est-à-dire, 1,000256.

Donc, plus généralement, pour extraire la racine $(2^n)^{ieme}$ d'un tel nombre, il suffira de diviser sa partie décimale par $2^n$. Cette remarque peut recevoir une utile application dans la construction des tables de logarithmes.

---

# QUESTIONS RÉSOLUES.

## *Solution des trois problèmes de* maxima *proposés à la pag. 246 du précédent volume;*

Par M. P. S.

PROBLÈME I. *Quel est le plus grand de tous les quadrilatères plans qu'il soit possible de former, avec les trois mêmes côtés consécutifs, en variant la grandeur des deux angles compris* (*)?

*Solution.* Soient $c$ le côté intermédiaire du quadrilatère, $a$, $b$ les deux côtés extrêmes, $\alpha$, $\beta$ les angles variables qu'ils forment respectivement avec celui-là.

Pour fixer les idées, supposons les angles $\alpha$, $\beta$ obtus. Prolongeons les côtés $a$, $b$ jusqu'à leur point de concours, et soient $a'$, $b'$ les longueurs respectives de leurs prolongemens jusqu'à ce point. Il est visible que ces prolongemens comprendront entre eux un angle $(\alpha+\beta)-\varpi$ dont les sinus et cosinus seront les sinus et cosinus de $\alpha+\beta$, pris négativement.

---

(*) Nous avons aussi reçu de M. Marc Secretan, licencié en droit, à Lausanne, une solution de ce problème sur laquelle celle que nous publions n'a d'autre avantage qu'un peu plus de symétrie dans les calculs.

*J. D. G.*

Cet angle sera commun à deux triangles dans lesquels les côtés adjacens seront $a+a'$, $b+b'$ pour le plus grand, et $a'$, $b'$ pour le plus petit. En vertu d'une proposition connue, les aires de ce triangle seront respectivement

$$-\tfrac{1}{2}(a+a')(b+b')\text{Sin.}(\alpha+\beta) \; ; \qquad -\tfrac{1}{2}a'b'\text{Sin.}(\alpha+\beta) \; .$$

L'aire du quadrilatère étant la différence des aires de ces deux triangles, en représentant cette aire par $Q$, on aura

$$Q=-\tfrac{1}{2}\{(a+a')(b+b')-a'b'\}\text{Sin.}(\alpha+\beta) \; ;$$

c'est-à-dire, en développant et réduisant,

$$Q=-\tfrac{1}{2}\{(ab'+ba')+ab\}\text{Sin.}(\alpha+\beta) \; . \qquad (1)$$

D'un autre côté, le plus petit des deux triangles donne

$$a'=-c\frac{\text{Sin.}\beta}{\text{Sin.}(\alpha+\beta)} \; , \qquad b'=-c\frac{\text{Sin.}\alpha}{\text{Sin.}(\alpha+\beta)} \; ; \qquad (2)$$

d'où

$$ab'+ba'=-c\frac{a\text{Sin.}\alpha+b\text{Sin.}\beta}{\text{Sin.}(\alpha+\beta)} \; ;$$

substituant donc dans la formule (1), elle deviendra

$$Q=\tfrac{1}{2}\{c(a\text{Sin.}\alpha+b\text{Sin.}\beta)-ab\text{Sin.}(\alpha+\beta)\} \; . \qquad (3)$$

Le problème consiste donc à profiter de la variabilité des deux angles $\alpha$, $\beta$ pour rendre cette fonction *maximum*.

On tire de là

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\alpha}=\tfrac{1}{2}a\{c\text{Cos.}\alpha-b\text{Cos.}(\alpha+\beta)\} \; , \quad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\beta}=\tfrac{1}{2}b\{c\text{Cos.}\beta-a\text{Cos.}(\alpha+\beta)\} \; ,$$

$$\frac{d^2Q}{d\alpha^2}=\tfrac{1}{2}a\{b\text{Sin}.(\alpha+\beta)-c\text{Sin}.\alpha\}\ ,\quad \frac{d^2Q}{d\beta^2}=\tfrac{1}{2}b\{a\text{Sin}.(\alpha+\beta)-c\text{Sin}.\beta\}\ ,$$

$$\frac{d^2Q}{d\alpha d\beta}=\tfrac{1}{2}ab\text{Sin}.(\alpha+\beta)\ ;$$

ce qui donne

$$\left(\frac{d^2Q}{d\alpha d\beta}\right)^2-\frac{d^2Q}{d\alpha^2}\cdot\frac{d^2Q}{d\beta^2}=\tfrac{1}{4}abc\{(a\text{Sin}.\alpha+b\text{Sin}.\beta)\text{Sin}.(\alpha+\beta)-c\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.\beta\}\ .\quad (4)$$

En conséquence les conditions communes au *maximum* et au *minimum* seront

$$c\text{Cos}.\alpha=b\text{Cos}.(\alpha+\beta)\ ,\qquad c\text{Cos}.\beta=a\text{Cos}.(\alpha+\beta)\ ;\quad (5)$$

on en conclut, sur-le-champ,

$$a\text{Cos}.\alpha=b\text{Cos}.\beta\ ;\qquad (6)$$

ce qui veut dire qu'*il faut que les projections des deux côtés extrêmes, sur la direction du côté intermédiaire, soient de même longueur, mais tournées en sens inverse ;* cela exige que les angles $\alpha$, $\beta$ soient tous deux obtus ou tous deux aigus.

Posons $\alpha+\beta=x$, il en résultera

$$\text{Cos}.\alpha\text{Cos}.\beta-\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.\beta=\text{Cos}.x\ ;$$

ou bien

$$\text{Cos}.\alpha\text{Cos}.\beta-\text{Cos}.x=\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.\beta\ ;$$

d'où, en quarrant et en remplaçant ensuite les sinus par des fonctions équivalentes des cosinus,

$$2\text{Cos}.\alpha\text{Cos}.\beta\text{Cos}.x-\text{Cos}.^2x-\text{Cos}.^2\alpha-\text{Cos}.^2\beta+1=0\ ;$$

mais, dans le cas actuel, les équations (5) deviennent simplement

$$c\text{Cos}.\alpha = b\text{Cos}.x\ , \qquad c\text{Cos}.\beta = a\text{Cos}.x\ ; \qquad (7)$$

éléminant donc Cos.$\alpha$ et Cos.$\beta$ de la précédente, à l'aide de celle-ci, il deviendra

$$2ab\text{Cos}.^3x-(a^2+b^2+c^2)\text{Cos}.^2x+c^2=0\ ; \qquad (9)$$

ou bien encore

$$c^2\text{Séc}.^3x-(a^2+b^2+c^2)\text{Séc}.x+2ab=0\ ; \qquad (10)$$

équation du troisième degré, sans second terme, que l'on résoudra par les fonctions circulaires. Lorsqu'on aura déterminé $x$, on en conclura $\alpha$ et $\beta$, au moyen des équations (7). Il est d'ailleurs aisé de voir que le problème, toujours possible, admettra une, deux ou trois solutions, suivant que la fonction

$$27a^2b^2c^2-(a^2+b^2+c^2)^3\ ,$$

sera positive, nulle ou négative. On reconnaîtra ensuite, au moyen de la formule (4), si chacune de ces solutions appartient à un *maximum* ou à un *minimum*.

Si l'on désigne respectivement par $\alpha'$ et $\beta'$ les angles du quadrilatère respectivement opposés à $\alpha$ et $\beta$, on aura, en faisant usage des formules (2)

$$\frac{\text{Sin}.\alpha'}{\text{Sin}.\beta'}=\frac{a+a'}{b+b'}=\frac{a\text{Sin}.(\alpha+\beta)-c\text{Sin}.\beta}{b\text{Sin}.(\alpha+\beta)-c\text{Sin}.\alpha}\ ;$$

d'où, en mettant pour $a$ et $b$ leurs valeurs données par les formules (5)

$$\frac{\text{Sin}.\alpha'}{\text{Sin}.\beta'}=\frac{\text{Sin}.(\alpha+\beta)\text{Cos}.\beta-\text{Cos}.(\alpha+\beta)\text{Sin}.\beta}{\text{Sin}.(\alpha+\beta)\text{Cos}.\alpha-\text{Cos}.(\alpha+\beta)\text{Sin}.\alpha}=\frac{\text{Sin}.\alpha}{\text{Sin}.\beta}\ ;$$

d'où on conclura facilement que, si le quadrilatère est convexe, les angles $\alpha'$ et $\beta'$ devront être les supplémens respectifs des angles $\alpha$ et $\beta$ ; et que conséquemment ce quadrilatère doit être inscriptible au cercle ; proposition qui n'est, au surplus, qu'un cas particulier de cette autre proposition bien connue : *De tous les polygones formés avec les mêmes côtés, tous donnés, excepté un seul, le plus grand est le polygone inscriptible au cercle.*

Sortons présentement de ces généralités, et posons $b=a$ ; en vertu de la relation (6) il en résultera $\beta=\alpha$ ; de sorte qu'alors le quadrilatère devra être un trapèze isocèle. Dans cette hypothèse, on aura simplement

$$Q=a(c-a\text{Cos}.\alpha)\text{Sin}.\alpha\ ; \qquad (11)$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\alpha}=a(a+c\text{Cos}.\alpha-2a\text{Cos}.^2\alpha)\ ; \qquad (12)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\alpha^2}=a(4a\text{Cos}.\alpha-c)\text{Sin}.\alpha\ ; \qquad (13)$$

la condition commune au *maximum* et au *minimum* sera donc

$$2a\text{Cos}.^2\alpha-c\text{Cos}.\alpha-a=0\ ; \qquad (14)$$

ce qui donnera

$$\text{Cos}.\alpha=\frac{c\pm\sqrt{c^2+8a^2}}{4a}=-\frac{2a}{c\mp\sqrt{c^2+8a^2}}\ ;$$

d'où résulte

$$4a\text{Cos}.\alpha-c=\pm\sqrt{c^2+8a^2}\ ;$$

et, comme Sin.$\alpha$ est nécessairement positif, on voit que $\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\alpha^2}$

aura même signe que le radical, de sorte que son signe *inférieur* répondra à un *maximum*, et son signe *supérieur* à un *minimum*, lequel même ne sera possible qu'autant que $c$ ne sera pas $>a$; puisqu'autrement on aurait $\text{Cos}.x>1$.

Dans le cas du *maximum*, ou du signe négatif, on voit 1.° que, si l'on a $c$ infini, il viendra $\text{Cos}.x=0$, d'où $\alpha=90°$; 2.° que, si l'on a $c=a$, il viendra $\text{Cos}.x=-\frac{1}{2}$, d'où $\alpha=120°$; 3.° qu'enfin, si l'on a $c=0$, il viendra $\text{Cos}.x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, d'où $\alpha=135°$. Ainsi, dans le cas de $c$ infini, les deux côtés extrêmes du trapèze devront être parallèles; ils devront ensuite diverger de plus en plus, à mesure que $c$ deviendra plus petit, par rapport à $a$; de telle sorte que, lorsque $c$ sera égal à $a$, ces deux côtés extrêmes devront déjà faire l'un avec l'autre un angle de 60°; enfin cet angle devra être droit, lorsque $c$ sera devenu tout à fait nul (*).

---

(*) Le bois de chauffage, qui se pèse dans le midi de la France, se mesure, au contraire, dans le nord, en le disposant dans des cadres ou chassis, formés d'une pièce de bois horizontale, des deux extrémités de laquelle s'élèvent deux montans verticaux. On voit que, de la sorte, la surface rectangulaire du chassis détermine la surface transversale de la masse de bois qu'on achète; et, comme les bûches ont une longueur invariable, on peut faire abstraction de cette longueur et payer le bois à raison de la surface de la section transversale, qui est la même que celle du chassis; tout comme on mesure les étoffes, à cause de leur largeur constante, avec l'unité linéaire.

Ordinairement les montans verticaux de ce chassis sont maintenus en situation, au moyen d'arcs-boutans extérieurs, placés à leur partie inférieure. Mais quelquefois aussi ces arcs-boutans sortent de place, par vétusté, et alors, par l'effet du poids des bûches placées dans le cadre, les montans cèdent et s'inclinent plus ou moins en dehors.

Or, on voit, par l'analyse qui précède, que, pourvu que l'inclinaison ne soit pas très-considérable, elle procurera toujours un plus ou moins grand

*PROBLÈME II. En portant successivement une certaine taxe à* $a$, $a'$, $a''$, $a'''$, ....... *ses produits sont devenus respectivement* $A$, $A'$, $A''$, $A'''$, ........ ; *à combien faut-il porter cette taxe, pour en obtenir un produit* maximum ?

*Solution.* Soient posés

---

avantage à l'acheteur ; et que conséquemment ce n'est point lui mais bien le vendeur qui est intéressé au rétablissement des arcs-boutans.

C'est encore dans la même analyse que rentre la question de savoir quelle est la disposition des pieds de l'homme debout, la plus favorable à la stabilité de son corps. On voit en effet que le plus petit polygone convexe, comprenant la surface des pieds en contacts avec le sol, sera le plus grand possible quand le quadrilatère formé par les axes de ces pieds et par les droites qui joignent les extrémités de ces axes sera lui-même le plus grand possible ; d'où l'on voit d'abord qu'en supposant les deux pieds de même longueur, ils devront être également en dehors. On voit ensuite que, plus les pieds seront écartés l'un de l'autre et plus petit devra être aussi l'angle formé par leurs axes ; que, si la distance entre les extrémités antérieures de ces axes est égale à la longueur de l'un d'eux, cet angle devra être de 60° ; qu'il devra croître ensuite de plus en plus, à mesure que les talons se rapprocheront, mais sans jamais atteindre 90°, attendu qu'il faudrait pour cela que les extrémités antérieures des axes des deux pieds coïncidassent, ce à quoi s'oppose nécessairement l'épaisseur des talons.

Dans sa *Nouvelle mécanique des mouvemens de l'homme et des animaux*, Barthez, qui passait pour un grand géomètre auprès de ses confrères, parce qu'il était allé un peu au-delà des élémens, critique la solution de Parent, qui s'est le premier occupé de ce problème, et donne pour l'angle que doivent former entre eux les axes des deux pieds 38.°56′ ; mais, comme il ne dit pas à quelle distance l'un de l'autre il suppose les talons, ce qu'il a écrit sur ce sujet est tout à fait inintelligible. Pour que sa solution fût exacte, il faudrait que la distance entre les talons fût plus que double de la longueur de l'un des pieds ; ce qu'il ne paraît pas supposer.

*J. D. G.*

$$\frac{A'-A}{a'-a}=B\ ,\quad \frac{B'-B}{a''-a}=C\ ,\quad \frac{C'-C}{a'''-a}=D\ ,\ \ldots\ldots,$$

$$\frac{A''-A'}{a''-a'}=B'\ ,\quad \frac{B''-B'}{a'''-a'}=C'\ ,\ \ldots\ldots,$$

$$\frac{A'''-A''}{a'''-a''}=B''\ ,\ \ldots\ldots;$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

on sait qu'alors si $a$ , $a'$ , $a''$ , $a'''$ , ....... sont des quantités peu différentes les unes des autres , en représentant par $T$ le produit total de la taxe , supposée portée à $t$, on aura

$$T=A+(t-a)B+(t-a)(t-a')C+(t-a)(t-a')(t-a'')D+\ldots\ldots\ ;$$

telle est donc la fonction qu'il faudra rendre *maximum*, au moyen de la variabilité de $t$.

On tire de là

$$\frac{dT}{dt}=B+[2t-(a+a')]C+[3t^2-2(a+a'+a'')t+(aa'+aa''+a'a'')]D+\ldots.\ ,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2T}{dt^2}=C+[(3t-(a+a'+a'')]D+\ldots\ldots.\ ;$$

de sorte que la condition commune au *maximum* et au *minimum* sera

$$0=B+[2t-(a+a')]C+[3t^2-2(a+a'+a'')t+(aa'+aa''+a'a'')]D+\ldots..$$

et une des racines de cette équation répondra à l'un ou à l'autre , suivant qu'elle rendra la fonction

$$C+[3t-(a+a'+a')]D+\ldots\ldots$$

négative ou positive.

On voit par là que le problème ne sera résoluble qu'autant qu'on aura en sa possession les résultats de trois expériences au moins. En supposant qu'on n'en ait pas davantage ; on trouvera

$$t=\frac{(a+a')C-B}{2C}\;;$$

d'où

$$T=A+\frac{(a'-a)C-B}{2C}-\frac{(a'-a)^2C^2-B^2}{4C}\;;$$

et cette valeur sera *maximum* ou *minimum*, suivant que $C$ sera *négatif* ou *positif*.

*PROBLÈME III. On s'est assuré, par l'expérience, qu'un seul dévidoir, tant que le fil ne rompait pas, pouvait dévider à raison d'une longueur* a *de fil, par unité de temps.*

*On s'est également assuré, par expérience, que le fil d'un seul dévidoir se rompait, terme moyen, à chaque* m *unités de temps, et qu'il fallait alors* n *unités de temps pour réparer l'accident.*

*On demande, d'après ces données, quel est le nombre des dévidoirs qu'il faut faire marcher, par un même mécanisme, pour obtenir, dans un temps donné, le plus grand produit possible ?*

*Solution.* Cherchons quelle sera la longueur de fil effectivement dévidée par $x$ dévidoirs, dans un temps donné $t$.

Puisqu'avec une seule bobine il se fait une rupture de fil au bout de $m$ unités de temps ; lorsque les bobines seront au nombre de $x$, elles ne fonctionneront que $\frac{m}{x}$ unités de temps avant une rupture de fil ; et, durant ce temps, chacune d'elles dévidant une longueur de fil exprimée par $\frac{m}{x}a$, ces $x$ bobines auront dévidé une longueur de fil exprimée par $ma$ ; mais comme, au bout de ce temps $\frac{m}{x}$, il y aura une interruption du travail de toutes les bobines durant le temps $n$, pour le raccommodage du fil rompu, il s'ensuit que, durant chaque intervalle de temps $\frac{m}{x}+n$, il ne se dévidera également de toutes les bobines qu'une longueur totale de fil exprimée par $ma$, ce qui fera, pour chaque unité de temps, une longueur

$$\frac{ma}{\frac{m}{x}+n} \quad \text{ou} \quad \frac{max}{m+nx};$$

si donc on représente par $A$ la longueur totale de fil dévidée par toutes les bobines, au bout du temps $t$, on aura

$$A=\frac{matx}{m+nx},$$

fonction qui, tant qu'on supposera $x$ positif, comme on est obligé de le faire ici, n'est point susceptible d'un *maximum* proprement dit, mais seulement d'une *limite* répondant à $x$ infini, et qui est

$$A=\frac{mat}{n}.$$

Ainsi, bien que le produit croisse avec le nombre des bobines; jamais on obtiendra un produit $\frac{m}{n}a$ par unités de temps, quel que soit le nombre fini de ces bobines (*).

---

(*) L'idée de ce problème nous a été suggérée par M. Sarrus; mais il paraît que son véritable énoncé se sera échappé de notre mémoire, et qu'avec lui se sera évanoui le *maximum* dont M. Sarrus le disait susceptible.

J. D. G.

# *Note sur quelques problèmes proposés dans les* Annales;

## Extraite d'une lettre au RÉDACTEUR;

Par M. ***

LA démonstration donnée par M. Lenthéric, à la pag. 379 du XX.me volume des Annales, de la divisibilité par *soixante* du produit des trois côtés de tout triangle rectangle, en nombres entiers, semble réclamer un léger complément au défaut duquel elle manquerait de généralité. Il est très-vrai que tout triangle dont les trois côtés sont

$$m^2+n^2\,,\qquad m^2-n^2\,,\qquad 2mn\,;$$

est rectangle, quels que puissent être les deux nombres entiers $m$ et $n$; mais comme tout triangle semblable à un triangle rectangle est rectangle lui-même, il s'ensuit que le triangle dont les trois côtés sont

$$\lambda(m^2+n^2)\,,\qquad \lambda(m^2-n^2)\,,\qquad 2\lambda mn\,;$$

sera également rectangle, quels que soient les trois nombres entiers $m$, $n$, $\lambda$, qu'on peut bien prendre tels que le second triangle ne puisse pas rentrer dans la première forme; comme il arrive, par exemple, en prenant $m=2$, $n=1$, $\lambda=3$; d'où résulte un triangle dont les trois côtés sont 15, 9, 12. Mais, comme le produit des trois côtés du second triangle n'est autre que le produit des trois côtés du premier, multiplié par le facteur $\lambda^3$, il s'ensuit que, si le produit des trois côtés du premier est divisible par *soixante*, le produit des trois côtés du second le sera à plus forte raison, de sorte que le raisonnement de M. Lenthéric s'applique à celui-ci comme à l'autre.

Du reste, dans un intéressant mémoire faisant partie du tom. V.^e des *Anciens mémoires de l'Académie royale des sciences* (1666—1699), Frenicle s'était déjà occupé de ce sujet. Il avait remarqué que, lorsque les trois côtés d'un triangle rectangle, en nombres entiers, ne sont pas premiers entre eux, en les divisant par leur plus grand commun diviseur, on obtient pour quotiens les trois côtés de ce qu'il appelle le *triangle rectangle primitif* qui rentre nécessairement dans la première des deux formes ci-dessus.

En classant les nombres, suivant leurs formes diverses, comme le fait Euler, en plusieurs endroits, et notamment dans son *Algèbre* (tom. I, chap. 6 et tom. II, chap. 5) (*). Frenicle

---

(*) Ceci me rappelle que, dans les *Œuvres de Leibnitz*, que je n'ai pas présentement sous la main, on rencontre une lettre de cet illustre géomètre à l'un de ses amis, où il s'exprime à peu près en ces termes : « Je viens » de découvrir une propriété fort singulière des nombres premiers plus grands » que *trois*. Elle consiste en ce que ces nombres, augmentés ou diminués » d'une unité, deviennent nécessairement divisibles par *six*. Bien que je » n'ai pu me démontrer cette propriété, je l'ai vérifiée sur tant de nombres » premiers, que je ne fais aucun doute de sa généralité. Il est seulement » fâcheux que des nombres qui ne sont pas premiers la partagent avec ceux » qui le sont ; car autrement on aurait là un moyen bien simple de distin- » guer les nombres qui sont premiers de ceux qui ne le sont pas » Il est vraiment surprenant qu'un homme de la force de Leibnitz n'ait pas aperçu, sur-le-champ, que tout nombre entier est de l'une des quatre formes $6n$, $6n\pm1$, $6n\pm2$, $6n\pm3$ ; et que les nombres premiers plus grands que 3 sont nécessairement des nombres de la seconde forme, qui deviennent tous divisibles par 6 en leur ajoutant ou en leur retranchant une unité.

*J. D. G.*

avait aussi reconnu que, dans tout triangle rectangle, en nombres entiers, 1.° l'un des côtés de l'angle droit doit être divisible par 4; 2.° l'un des côtés de l'angle droit doit être aussi divisible par 3; enfin, l'un des trois côtés doit être divisible par 5. Or, les trois nombres 3, 4, 5 étant premiers entre eux, il en résulte évidemment que le produit des trois côtés doit être divisible par leur produit, c'est-à-dire, par 60.

Peut-être à l'heure qu'il est aurez-vous déjà reçu, Monsieur, quelque solution directe, bien élégante, des deux premiers problèmes de la page 315 de votre XX.me volume (*); et j'arriverai, sans doute, trop tard pour faire remarquer que ces deux problèmes se ramènent fort simplement à un autre problème traité par Newton, dans son *Arithmétique universelle* (édit. de Leyde, 1732, pag. 84), problème passé présentement dans les traités élémentaires, notamment dans la *Géométrie analytique* de M. Lefebure, et dont voici l'énoncé :

*Connaissant les longueurs des cordes de trois arcs d'un même cercle qui réunis composent la moitié de sa circonférence, déterminer le diamètre de ce cercle?*

Voici comment on en déduit la solution de ces deux problèmes :

1.° Soient O le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC; soient OA′, OB′, OC′ les perpendiculaires abaissées respectivement de ce centre sur les directions BC, CA, AB, de ces trois côtés; et supposons que ces perpendiculaires étant seules données, il soit question d'assigner la grandeur du rayon du cercle circonscrit.

Concevons que, sur les rayons OA, OB, OC, pris tour à tour pour diamètres, on décrive trois cercles; ces cercles se couperont évidemment deux à deux aux trois points A′, B′, C′. Alors OA′, OB′, OC′ deviendront des cordes d'arcs de ces cercles, mesurant

(*) Voy. la pag. 65.

des angles respectivement doubles des angles OBA′, OCB′, OAC′, c'est-à-dire, mesurant respectivement les angles B, C, A du triangle dont il s'agit. Puis donc que ces trois angles sont mesurés par une demi-circonférence, il s'ensuit que les trois droites OA′, OB′, OC′, portées consécutivement comme cordes sur l'une de nos trois circonférences, se trouveront en embrasser la moitié. Ainsi, *le rayon du cercle cherché est le diamètre d'un cercle dans la moitié duquel peuvent être inscrites les trois longueurs données.* On pourra donc, par le problème de Newton, assigner la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle dont il s'agit; et dès lors la détermination des longueurs de ses côtés n'offrira plus aucune difficulté.

2.° Soit, en second lieu, O le centre du cercle inscrit à un triangle ABC; soient données les trois longueurs OA, OB, OC, et qu'il soit question de déterminer le rayon du cercle.

Soient A′, B′, C′ les points de contact respectifs de ce cercle avec les côtés BC, CA, AB du triangle; soient menées B′C′, C′A′, A′B′, coupant respectivement OA, OB, OC, en A″, B″, C″. Si, sur OA′, OB′, OC′, pris tour à tour pour diamètres, on décrit trois cercles, ces cercles se couperont deux à deux aux points A″, B″, C″; et OA″, OB″, OC″ seront les longueurs de trois cordes de l'un d'eux, dont les arcs composeront entre eux la moitié de sa circonférence.

Cela posé, soient faits

$$\mathrm{OA}=a\ ,\quad \mathrm{OB}=b\ ,\quad \mathrm{OC}=c\ ,\quad \mathrm{OA}'=\mathrm{OB}'=\mathrm{OC}'=r\ ;$$

il en résultera

$$\mathrm{OA}''=\frac{\overline{\mathrm{OB}'}^2}{\mathrm{OA}}=\frac{r^2}{a}\ ,\quad \mathrm{OB}''=\frac{\overline{\mathrm{OC}'}^2}{\mathrm{OB}}=\frac{r^2}{b}\ ,\quad \mathrm{OC}''=\frac{\overline{\mathrm{OA}'}^2}{\mathrm{OC}}=\frac{r^2}{c}\ ;$$

or, puisque les trois cordes

$$\frac{r^2}{a}\,,\quad\frac{r^2}{b}\,,\quad\frac{r^2}{c}\,,$$

sont inscriptibles à un demi-cercle dont le diamètre est $r$, les trois cordes

$$\lambda\frac{r^2}{a}\,,\quad\lambda\frac{r^2}{b}\,,\quad\lambda\frac{r^2}{c}\,,$$

doivent être inscriptibles, quel que soit $\lambda$, à un demi-cercle ayant $\lambda r$ pour diamètre. Prenant donc $\lambda=\frac{k^2}{r^2}$, $k$ étant une longueur arbitraire, nous pouvons dire que les trois cordes de longueur connue

$$\frac{k^2}{a}\,,\quad\frac{k^2}{b}\,,\quad\frac{k^2}{c}\,,$$

sont inscriptibles à un demi-cercle dont le diamètre est $\frac{k^2}{r}$. Ayant donc déterminé, par le problème de Newton, ce diamètre $d$, nous aurons $d=\frac{k^2}{r}$; d'où $r=\frac{k^2}{d}$; nous aurons donc, de la sorte, le rayon du cercle inscrit au triangle dont il s'agit, et dès lors la détermination de la longueur de ses côtés n'offrira plus de difficulté.

Rennes, le 25 juin 1830.

---

# QUESTIONS PROPOSÉES.

## *Théorème de géométrie.*

La somme des distances de chacun des points d'une parabole à son foyer et à une perpendiculaire fixe à l'axe de la courbe est une quantité constante.

# ANALYSE ÉLÉMENTAIRE.

## *Résolution de quelques cas de l'équation à deux termes ;*

Par M. Lenthéric, docteur ès sciences, professeur au collége royal de Montpellier.

1. On a appelé *équation à deux termes* toute équation à une inconnue qui ne renferme qu'une seule puissance de cette inconnue, et dont la forme générale est conséquemment

$$Ay^m+B=0\ ,$$

où il est permis de supposer les nombres $A$ et $B$ entiers et le premier positif, tandis que le second peut être indistinctement positif ou négatif (*).

(*) Les équations à deux termes ont leurs analogues dans les problèmes à plusieurs inconnues ; ce que les auteurs d'élémens ne devraient pas, ce nous semble, négliger de faire remarquer. On peut avoir, par exemple, entre $x$ et $y$, les deux équations

$$ax^m+by^n+c=0\ ,\qquad a'x^m+b'y^n+c'=0\ ;$$

lesquelles, par l'élimination de $y^n$, donnent l'équation à deux termes en $x$

$$(ab'-ba')x^m-(bc'-cb')=0\ .$$

J. D. G.

2. Si l'on fait $\frac{B}{A}=\mp P$, de manière que $P$ représente constamment un nombre positif, et si $p$ est la racine $m.^{ieme}$ arithmétique de ce nombre, l'équation prendra la forme

$$y^m\mp p^m=0 \ .$$

Posant alors $y=px$, substituant et divisant par $p^m$, on aura

$$x^m\mp 1=0 \ .$$

Équation qui répond au problème où il s'agirait d'extraire la racine $m.^{ime}$ de $\pm 1$ ; de sorte que l'extraction de la racine $m.^{ieme}$ de quelque nombre que ce soit, et par suite la résolution de toute équation à deux termes, se réduit toujours finalement à extraire une racine arithmétique d'un nombre positif, et à multiplier tour à tour cette racine par toutes les valeurs de la racine $m.^{ieme}$ de $\mp 1$.

3. On sait, par la théorie générale des équations, que ces racines, au nombre de $m$, sont toutes inégales. On sait même, depuis long-temps, les exprimer, sous forme finie, par des fonctions circulaires; et cette manière de les représenter prouve, quand bien même on ne le saurait pas d'ailleurs, que, lorsqu'elles sont imaginaires, elles peuvent être rangées par couples, comprises dans la formule $a\pm b\sqrt{-1}$, où $a$ et $b$ sont des quantités réelles. Dans des temps plus voisins de nous, Lagrange, mettant à profit les savantes théories de M. Gauss, a prouvé ( *Résolut. des équat. numériques*, 2.$^{me}$ édit., note XIV ) que ces mêmes racines étaient toujours exprimables algébriquement sous forme finie. Tout ce que nous nous proposons ici est simplement d'indiquer des procédés élémentaires et uniformes pour obtenir les expressions de ces racines, dans les cas les plus aisés à traiter. Mais rappelons d'abord quelques principes généraux propres à nous guider sûrement dans cette recherche.

4. Lorsque $m$ est un nombre impair, les racines des deux équations

$$x^m-1=0\ ,\qquad x^m+1=0\ ,$$

ne diffèrent uniquement les unes des autres que par le signe: car alors on peut passer d'une équation à l'autre, en changeant simplement $x$ en $-x$.

Si $m$ est un nombre impairement pair, les racines de l'une de de ces équations ne seront que les racines de l'autre multipliées par $\sqrt{-1}$; car alors on passera d'une équation à l'autre par le simple changement de $x$ en $x\sqrt{-1}$.

Si $m$ est un nombre pair de la forme $4(2n+1)$, les racines de l'une des équations ne différeront de celles de l'autre que par le facteur $\sqrt[4]{-1}$ : car alors le passage d'une équation à l'autre pourra s'opérer par le simple changement de $x$ en $x\sqrt[4]{-1}$.

Généralement, si $m$ est un nombre pair de la forme

$$2^k(2n+1)\ ,$$

les racines de la seconde équation se déduiront de celles de la première, en multipliant celles-ci par $\sqrt[2^k]{-1}$ : car alors la première équation devient la seconde en y changeant simplement $x$ en $x\sqrt[2^k]{-1}$.

Le premier pas à faire dans la recherche qui nous occupe est donc de savoir d'abord ce que valent les multiplicateurs successifs

$$-1\ ,\quad \sqrt{-1}\ ,\quad \sqrt[4]{-1}\ ,\quad \sqrt[8]{-1}\ ,\quad \sqrt[16]{-1}\ ,\quad \ldots\ldots\quad \sqrt[2^k]{-1}\ ,\ \ldots.$$

Pour y parvenir, remarquons d'abord que chacun d'eux étant la racine quarrée du précédent, tout se réduit à savoir passer de $\sqrt[2^k]{-1}$ à $\sqrt[2^{k+1}]{-1}$.

Supposons donc qu'on ait trouvé

$$\sqrt[2^k]{-1}=a+b\sqrt{-1}\ ;$$

$a$ et $b$ étant deux quantités réelles, on aura

$$\sqrt[2^{k+1}]{-1}=\sqrt{a+b\sqrt{-1}}\ ;$$

Posons donc

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}=x+y\sqrt{-1}\ ;$$

d'où, en quarrant,

$$a+b\sqrt{-1}=(x^2-y^2)+2xy\sqrt{-1}\ ;$$

ce qui donnera, en égalant séparément le réel et l'imaginaire,

$$x^2-y^2=a\ , \qquad 2xy=b\ ;$$

en extrayant la racine quarrée de la somme des quarrés de ces deux équations, on aura

$$x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}\ ;$$

cela donnera

$$2x^2=a+\sqrt{a^2+b^2}\ , \qquad 2y^2=a-\sqrt{a^2+b^2}\ ;$$

et conséquemment

$$x=\tfrac{1}{2}\sqrt{2(a+\sqrt{a^2+b^2})}\ , \qquad y=\tfrac{1}{2}\sqrt{2(a-\sqrt{a^2+b^2})}\ ;$$

ce qui donnera, en substituant,

$$\sqrt[2^{k+1}]{-1}=\sqrt{a+b\sqrt{-1}}=\tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}+\sqrt{a-\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sqrt{-1}\right\}\sqrt{2}\ ;$$

au moyen de cette formule générale, et en observant que, pour le premier terme de notre série de racines, on a $a=-1$ et $b=0$, tandis que, pour le second, on a $a=0$ et $b=1$, on trouvera successivement

$$\sqrt{-1}=\sqrt{-1}\ ;$$

$$\sqrt[4]{-1}=\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2}.\sqrt{-1})\ ;$$

$$\sqrt[8]{-1}=\tfrac{1}{2}(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}.\sqrt{-1})\ ;$$

$$\sqrt[16]{-1}=\tfrac{1}{2}(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\sqrt{-1})\ ;$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ;

au moyen de ces résultats, nous n'avons plus à nous occuper que de la recherche des racines de l'équation

$$x^m-1=0\ .$$

5. Si $\alpha$ est une racine de cette équation $\alpha^p$ en sera une aussi, quel que soit le nombre entier positif $p$. En effet, à cause que $\alpha$ est racine

$$\alpha^m=1\ ,\quad \text{d'où}\quad \alpha^{mp}=(\alpha^p)^m=1\quad \text{et}\quad (\alpha^p)^m-1=0\ ;$$

ce qui prouve la proposition annoncée.

Si, de plus, $m$ est un nombre premier, et que $\alpha$ soit différent de l'unité, la totalité des racines de la proposée sera

$$\alpha\ ,\quad \alpha^2\ ,\quad \alpha^3\ ,\quad \alpha^4\ ,\quad \ldots\ldots\ldots\ \alpha^m\ .$$

En effet, d'abord, par ce qui précède, chaque terme de cette suite sera une racine de l'équation dont il s'agit; en outre elle ne pourra renfermer deux termes égaux; car si, par exemple, on pouvait avoir $\alpha^p=\alpha^q$, avec $q<p$ et $p<m$, il en résulterait $\alpha^{p-q}=1$, avec la condition $p-q<m$, et, comme on a aussi $\alpha^m=1$, il s'ensuivrait que les équations

$$x^m-1=0\ ,\qquad x^{p-q}-1=0\ ,$$

devrait avoir une racine commune, autre que l'unité, et conséquemment un facteur commun différent de $x-1$, ce qui est impossible, lorsque $m$ est premier et qu'on a $p-q<m$.

6. Si $m$ est le produit de deux facteurs premiers $a$ et $b$ et que $\alpha$ et $\beta$ soient respectivement des racines des équations

$$x^a-1=0\ ,\qquad x^b-1=0\ ,$$

différentes de l'unité; les racines de l'équation $x^m-1=0$ seront tous les termes du produit

$$(1+\alpha+\alpha^2+\ldots\ldots+\alpha^{a-1})(1+\beta+\beta^2+\ldots\ldots+\beta^{b-1})\ .$$

En effet, d'abord, ces termes seront au nombre de $ab=m$; en second lieu, ils seront tous inégaux; enfin un quelconque des termes de ce produit étant de la forme $\alpha^p\beta^q$; comme on a (5)

$$(\alpha^p)^a=\alpha^{pa}=1\ ,\quad (\beta^q)^b=\beta^{qb}=1\ ,$$

on aura aussi

$$\alpha^{pab}=1\ ,\qquad \beta^{qab}=1\ ;$$

d'où, en multipliant,

$$\alpha^{pab}.\beta^{qab}=(\alpha^p.\beta^q)^{ab}=(\alpha^p\beta^q)^m=1\ ;$$

ce qui prouve que $\alpha^p.\beta^q$ est racine de l'équation.

En raisonnant de la même manière il sera facile de prouver que, généralement, si l'on a $m=a.b.c.\ldots..$, $a$, $b$, $c$, ..... étant des nombres premiers tous différens les uns des autres, et que $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ...... soient respectivement des racines des équations

$$x^a-1=0\ ,\quad x^b-1=0\ ,\quad x^c-1=0\ ,\ \ldots\ldots$$

différentes de l'unité, les racines de la proposée seront les termes du produit

$$(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{a-1})(1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{b-1})(1+\gamma+\gamma^2+\ldots+\gamma^{c-1})\ldots$$

7. Ces choses ainsi entendues, soit d'abord $m=1$ ; les équations à résoudre seront

$$x-1=0\,,\qquad x+1=0\,;$$

lesquelles donnent immédiatement

$$x=+1\,,\qquad x=-1\,.$$

8. Soit, en second lieu, $m=2$ ; les équations à résoudre seront

$$x^2-1=0\,,\qquad x^2+1=0\,;$$

la première revient à

$$(x-1)(x+1)=0\,;$$

qui donne (7)

$$x=+1\,,\qquad x=-1\,;$$

les racines de l'autre seront donc (4)

$$x=+\sqrt{-1}\,,\qquad x=-\sqrt{-1}\,.$$

9. Soit ensuite $m=3$ ; les équations à résoudre seront

$$x^3-1=0\,,\qquad x^3+1=0\,;$$

la première revient à

$$(x-1)(x^2+x+1)=0\,;$$

et donne conséquemment

$$x=+1\ ,\qquad x=\tfrac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}.\sqrt{-1})\ ;$$

les racines de l'autre seront donc (4)

$$x=-1\ ,\qquad x=\tfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}.\sqrt{-1})\ ;$$

10. Soit $m=4$ ; les équations à résoudre seront

$$x^4-1=0\ ,\qquad x^4+1=0\ ;$$

la première revient à

$$(x^2-1)(x^2+1)=0\ ;$$

et donne (8)

$$x=\pm 1\ ,\qquad x=\pm\sqrt{-1}\ ;$$

les racines de l'autre seront donc (4)

$$x=+\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}\pm\sqrt{2}.\sqrt{-1})\ ,\qquad x=-\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}\pm\sqrt{2}.\sqrt{-1})\ ;$$

11. Soit $m=5$ ; les équations à résoudre seront

$$x^5-1=0\ ,\qquad x^5+1=0\ ;$$

la première revient à

$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0\ ;$$

qui donne d'abord la racine $+1$, tandis que ses quatre autres racines sont données par une équation réciproque qui peut être écrite ainsi

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0\ ;$$

posant alors

$$x+\frac{1}{x}=y\ ,\qquad \text{d'où}\qquad x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2\ ;$$

il viendra, en substituant,

$$y^2+y-1=0\ ,$$

d'où on tirera

$$y-2=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}\ ,\qquad y+2=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\ ,$$

et par suite

$$y^2-4=(y-2)(y+2)=\frac{-5\mp\sqrt{5}}{2}\ ;$$

mais l'équation de relation entre $x$ et $y$ donne

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2}\ ;$$

en substituant donc pour $y$ et $y^2-4$ leurs valeurs, on trouvera finalement, pour les cinq racines de la proposée,

$$x=+1\ ,\qquad \begin{cases} x=\frac{1}{4}\{(-1+\sqrt{5})\pm\sqrt{2(5+\sqrt{5})}\cdot\sqrt{-1}\}\ , \\ x=\frac{1}{4}\{(-1-\sqrt{5})\pm\sqrt{2(5-\sqrt{5})}\cdot\sqrt{-1}\}\ ; \end{cases}$$

les cinq racines de l'autre équation seront donc (4)

$$x=-1\ ,\qquad \begin{cases} x=\frac{1}{4}\{(1-\sqrt{5})\pm\sqrt{2(5+\sqrt{5})}\cdot\sqrt{-1}\}\ , \\ x=\frac{1}{4}\{(1+\sqrt{5})\pm\sqrt{2(5-\sqrt{5})}\cdot\sqrt{-1}\}\ . \end{cases}$$

12. **Soit** $m=6$ ; les équations à résoudre seront

$$x^6-1=0\ ,\qquad x^6+1=0\ ;$$

la première revient à

$$(x^3-1)(x^3+1)=0\ ,$$

et donne (9)

$$x=\pm 1\ ,\qquad \begin{array}{l} x=\tfrac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}.\sqrt{-1})\ ; \\ x=\tfrac{1}{2}(+1\pm\sqrt{3}.\sqrt{-1})\ ; \end{array}$$

les racines de l'autre seront donc (4)

$$x=\pm\sqrt{-1}\ ,\qquad \begin{array}{l} x=+\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}\pm\sqrt{-1})\ ; \\ x=-\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}\pm\sqrt{-1})\ . \end{array}$$

13. Dans le dessein où nous sommes de ne considérer que les formules qui ne contiennent pas de radicaux des degrés supérieurs au second, nous passerons de suite à la supposition de $m=8$; les équations à résoudre seront ainsi

$$x^8-1=0\ ,\qquad x^8+1=0\ ;$$

la première revient à

$$(x^4-1)(x^4+1)=0\ ,$$

et donne (10) pour ses racines

$$\begin{array}{ll} x=\pm 1\ , & x=+\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}\pm\sqrt{2}.\sqrt{-1})\ ; \\ x=\pm\sqrt{-1}\ , & x=-\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}\pm\sqrt{2}.\sqrt{-1})\ ; \end{array}$$

les racines de l'autre seront donc (4)

$$x=+\tfrac{1}{2}(\sqrt{2+\sqrt{2}}\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}.\sqrt{-1})\ ,$$

$$x=-\tfrac{1}{2}(\sqrt{2+\sqrt{2}}\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}.\sqrt{-1})\ ,$$

$$x=+\tfrac{1}{2}(\sqrt{2-\sqrt{2}}\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}.\sqrt{-1})\ ;$$

$$x=-\tfrac{1}{2}(\sqrt{2-\sqrt{2}}\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}.\sqrt{-1})\ .$$

14. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, nous passerons de suite à la supposition $m=10$ ; les équations à résoudre seront ainsi

$$x^{10}-1=0\ , \qquad x^{10}+1=0\ ;$$

la première revient à

$$(x^5-1)(x^5+1)=0\ ;$$

et donne (11) pour ses racines

$$x=\pm1\ , \quad \begin{cases} x=+\tfrac{1}{4}\{(1+\sqrt{5})\pm\sqrt{2(5-\sqrt{5})}.\sqrt{-1}\}\ ; \\ x=-\tfrac{1}{4}\{(1+\sqrt{5})\pm\sqrt{2(5-\sqrt{5})}.\sqrt{-1}\}\ , \\ x=+\tfrac{1}{4}\{(1-\sqrt{5})\pm\sqrt{2(5+\sqrt{5})}.\sqrt{-1}\}\ ; \\ x=-\tfrac{1}{4}\{(1-\sqrt{5})\pm\sqrt{2(5+\sqrt{5})}.\sqrt{-1}\ ; \end{cases}$$

les racines de l'autre seront donc (4)

$$x=\pm\sqrt{-1}\ , \quad \begin{cases} x=+\tfrac{1}{4}\{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}\pm(1-\sqrt{5}).\sqrt{-1}\}\ ; \\ x=-\tfrac{1}{4}\{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}\pm(1-\sqrt{5}).\sqrt{-1}\}\ , \\ x=+\tfrac{1}{4}\{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}\pm(1+\sqrt{5}).\sqrt{-1}\}\ , \\ x=-\tfrac{1}{4}\{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}\pm(1+\sqrt{5}).\sqrt{-1}\}\ . \end{cases}$$

15. Soit $m=12$ ; les équations à résoudre seront

$$x^{12}-1=0\ ,\qquad x^{12}+1=0\ ;$$

la première revient à

$$(x^6-1)(x^6+1)=0\ ,$$

donc les racines sont (12)

$$x=+\tfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}.\sqrt{-1})\ ;$$

$$x=\pm 1\ ,\qquad x=-\tfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}.\sqrt{-1})\ ,$$

$$x=\pm\sqrt{-1}\ ,\qquad x=+\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}\pm\sqrt{-1})\ ,$$

$$x=-\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}\pm\sqrt{-1})\ ;$$

les racines de l'autre seront donc (4)

$$x=+\tfrac{1}{4}\{(\sqrt{2}+\sqrt{6})\pm(\sqrt{2}-\sqrt{6})\sqrt{-1}\}\ ,$$

$$x=+\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}\pm\sqrt{2}.\sqrt{-1})\ ,\qquad x=-\tfrac{1}{4}\{(\sqrt{2}+\sqrt{6})\pm(\sqrt{2}-\sqrt{6})\sqrt{-1}\}\ ,$$

$$x=-\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}\pm\sqrt{2}.\sqrt{-1})\ ,\qquad x=+\tfrac{1}{4}\{(\sqrt{2}-\sqrt{6})\pm(\sqrt{2}+\sqrt{6})\sqrt{-1}\}\ ,$$

$$x=-\tfrac{1}{4}\{(\sqrt{2}-\sqrt{6})\pm(\sqrt{2}+\sqrt{6})\sqrt{-1}\}\ .$$

16. Soit $m=15$; les équations à résoudre seront

$$x^{15}-1=0\ ,\qquad x^{15}+1=0\ .$$

Les racines de la première s'obtiendront (6) en multipliant deux à deux, de toutes les manières possibles, les racines des deux équations

$$x^3-1=0\ ,\qquad x^5-1=0\ ,$$

ce qui donnera (9) et (11),

$$x=1\,,\qquad x=-\tfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}.\sqrt{-1})\,;$$

$$x=-\tfrac{1}{4}\{(1+\sqrt{5})\pm\sqrt{2(5-\sqrt{5})}.\sqrt{-1}\}\,,$$

$$x=-\tfrac{1}{4}\{(1-\sqrt{5})\pm\sqrt{2(5+\sqrt{5})}.\sqrt{-1}\}\,,$$

$$x=\tfrac{1}{8}\{[1+\sqrt{5}+\sqrt{6(5-\sqrt{5})}]\pm[(1+\sqrt{5})\sqrt{3}-\sqrt{2(5-\sqrt{5})}]\sqrt{-1}\}\,,$$

$$x=\tfrac{1}{8}\{[1+\sqrt{5}-\sqrt{6(5-\sqrt{5})}]\pm[(1+\sqrt{5})\sqrt{3}+\sqrt{2(5-\sqrt{5})}]\sqrt{-1}\}\,,$$

$$x=\tfrac{1}{8}\{[1-\sqrt{5}+\sqrt{6(5+\sqrt{5})}]\pm[(1-\sqrt{5})\sqrt{3}-\sqrt{2(5+\sqrt{5})}]\sqrt{-1}\}\,,$$

$$x=\tfrac{1}{8}\{[1-\sqrt{5}-\sqrt{6(5+\sqrt{5})}]\pm[(1-\sqrt{5})\sqrt{3}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}]\sqrt{-1}\}\,.$$

Quant aux racines de l'autre équation, comme elles ne diffèrent (4) de celles-ci que par le signe, nous nous dispenserons de les écrire.

17. Soit encore $m=16$; les équations à résoudre seront

$$x^{16}-1=0\,,\qquad x^{16}+1=0\,;$$

la première revient à

$$(x^8-1)(x^8+1)=0\,;$$

dont les racines sont (13)

$$x=\pm1\,,\qquad x=+\tfrac{1}{2}(\sqrt{2+\sqrt{2}}\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}.\sqrt{-1})\,,$$

$$x=\pm\sqrt{-1}\,,\qquad x=-\tfrac{1}{2}(\sqrt{2+\sqrt{2}}\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}.\sqrt{-1})\,,$$

$$x=+\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}\pm\sqrt{2}.\sqrt{-1})\,,\qquad x=+\tfrac{1}{2}(\sqrt{2-\sqrt{2}}\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}.\sqrt{-1})\,;$$

$$x=-\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}\pm\sqrt{2}.\sqrt{-1})\,,\qquad x=-\tfrac{1}{2}(\sqrt{2-\sqrt{2}}\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}.\sqrt{-1})\,,$$

les racines de l'autre seront donc (4)

$$x=+\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\pm\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{-1}\right),$$

$$x=-\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\pm\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{-1}\right);$$

$$x=+\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\pm\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{-1}\right);$$

$$x=-\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\pm\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{-1}\right);$$

$$x=+\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\pm\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{-1}\right);$$

$$x=-\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\pm\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{-1}\right);$$

$$x=+\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\pm\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{-1}\right);$$

$$x=-\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\pm\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{-1}\right).$$

18. Lorsque $m=17$, les racines sont encore exprimables par des radicaux du second degré ; mais les moyens de les obtenir, dans ce cas, sortent tout à fait des élémens, et tout ce qu'on peut faire alors en s'y renfermant, est de faire dépendre la recherche de ces racines de la résolution d'une équation complète du huitième degré. Il serait fort désirable que l'on découvrît quelque procédé bien simple et bien uniforme pour résoudre toutes les équations à deux termes dans lesquelles l'exposant de l'inconnue est un quelconque des nombres de la série

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 5,\quad 17,\quad 257,\quad 65537,\quad \ldots\ldots;$$

c'est-à-dire un des nombres de la série

$$1,\quad 1+2,\quad 1+2^{2},\quad 1+2^{2^{2}},\quad 1+2^{2^{2^{2}}},\quad \ldots\ldots;$$

19. Toutefois, avec les résultats que nous venons d'obtenir, il est facile, sans beaucoup de calcul, d'en obtenir une multitude d'autres d'un ordre beaucoup plus élevé. Qu'il soit question, par exemple, de résoudre l'équation

$$x^{120}-1=0\ ;$$

on la mettra d'abord sous cette forme

$$(x^{60}-1)(x^{60}+1)=0\ ;$$

ce qui ramenera la question à résoudre les deux équations

$$x^{60}-1=0\ , \qquad x^{60}+1=0\ ,$$

ou plutôt la première seulement; les racines de l'autre se déduisant des siennes (4), en multipliant celles-ci par $\frac{1}{2}(1+\sqrt{-1})\sqrt{2}$. Cette première équation peut, à son tour, être mise sous cette forme

$$(x^{30}-1)(x^{30}+1)=0\ ;$$

ce qui réduit le problème à résoudre les deux équations

$$x^{30}-1=0\ , \qquad x^{30}+1=0\ ,$$

ou plutôt la première seulement; les racines de l'autre se déduisant des siennes en les multipliant (4) par $\sqrt{-1}$. Cette première équation revient, à son tour, à

$$(x^{15}-1)(x^{15}+1)=0\ ;$$

ce qui réduit le problème à la résolution des deux équations

$$x^{15}-1=0\ , \qquad x^{15}+1=0\ ,$$

dont nous avons déjà obtenu les racines (16), lesquelles nous avons vu ne dépendre que de celles des deux équations

$$x^3-1=0\ ,\qquad x^5-1=0\ ;$$

de sorte que c'est à la résolution de ces deux dernières que se réduit finalement celle de l'équation

$$x^{120}-1=0\ .$$

Les racines de cette dernière, une fois obtenues, en les multipliant (4) par

$$\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{-1}\right)\ ,$$

on obtiendra celles de l'équation

$$x^{120}+1=0\ ;$$

on aura donc aussi celles de l'équation

$$(x^{120}-1)(x^{120}+1)=0\ ;$$

c'est-à-dire, celles de l'équation

$$x^{240}-1=0\ ;$$

# ARITHMÉTIQUE.

## *Sur un complément que réclament les élémens du calcul;*

Par M. GERGONNE.

EXPRIMER exactement, par une fraction, une grandeur moindre que son unité de mesure est un problème qui, lorsqu'il est possible, est susceptible d'une infinité de solutions, puisque, lorsqu'on a obtenu une fraction qui le résout, cette fraction ne change pas de valeur en multiplant ses deux termes par quelque nombre entier que ce puisse être.

Réduire des fractions proposées au même dénominateur est également un problème susceptible d'une infinité de solutions, puisque, dès que, par quelque procédé que ce puisse être, on est parvenu à amener les fractions proposées à cette forme, elles la conservent encore lorsqu'on multiplie les deux termes de chacune d'elles par un même nombre quelconque.

Or, la raison dit, que toutes les fois qu'un problème peut être résolu de plusieurs manières, et qu'une seule de ses solutions est demandée, c'est à la plus simple de toutes qu'on doit donner la préférence. Lors donc qu'on propose, soit d'exprimer en fraction une grandeur moindre que l'unité ; soit de réduire au même dénominateur des fractions données, on est raisonnablement fondé à exiger que, dans l'un comme dans l'autre cas, les fractions auxquelles on parviendra soient exprimées aussi simplement que la nature du problème pourra le comporter.

C'est là ce qu'on fait, en effet, lorsqu'il s'agit d'exprimer en fraction une grandeur moindre que l'unité, ou, ce qui revient au même, lorsqu'il s'agit d'exprimer numériquement le rapport entre deux grandeurs homogènes ; et c'est même très-probablement le désir d'exprimer constamment ce rapport de la manière la plus simple qui a donné naissance à la théorie du plus grand commun diviseur, dont les besoins de la géométrie et de l'analyse ont fait étendre ensuite les applications à deux lignes droites, à deux arcs de même rayons et enfin à deux polynomes.

Mais on peut aussi avoir à exprimer le rapport entre plus de deux grandeurs homogènes, et désirer également d'obtenir ce rapport sous la forme la plus simple ; or, les élémens, même les plus complets, demeurent tout à fait muets sur la manière de résoudre ce problème.

En outre, la méthode que l'on donne, dans tous les traités, comme *méthode normale*, pour la réduction des fractions au même dénominateur, est rarement propre à donner les fractions transformées sous la forme la plus simple. A la vérité, dans plusieurs de ces ouvrages, on fait remarquer que souvent la forme particulière des fractions proposées permet d'obtenir des fractions plus simples que celles auxquelles conduit l'application du procédé ordinaire ; mais, au lieu de donner sur ce sujet des préceptes généraux, on se borne, pour l'ordinaire, à un exemple unique, et on se repose, pour le surplus, sur l'adresse et l'intelligence du calculateur.

Étrange bizarrerie ; on réprimanderait durement un élève qui annoncerait, comme résultat final de quelque recherche, que deux longueurs proposées sont entre elles comme les nombres 78897 et 82654, attendu que le rapport entre ces deux nombres peut être remplacé par le rapport plus simple de 21 à 22 ; et, bien que le rapport entre les trois nombres 78897, 82654, 111265, puisse également être remplacé par le rapport plus simple entre les trois nombres 4641, 4862, 6545, on ne saurait néanmoins faire aucun reproche fondé à ce même élève si, au lieu de dire que trois longueurs sont entre elles comme ces trois derniers nombres, il disait qu'elles sont entre elles dans le rapport des trois premiers, attendu qu'on ne donne nulle part des préceptes qui enseignent à passer des uns aux autres.

Pareillement on accuserait à bon droit un élève d'être bien peu familier avec la science des nombres, s'il disait d'une longueur qu'elle est les $\frac{10290}{11025}$ de son unité, parce qu'en effet cette fraction peut être remplacée par la fraction très-simple $\frac{14}{15}$; mais si, ayant à réduire au même dénominateur les trois fractions $\frac{14}{15}$, $\frac{20}{21}$, $\frac{34}{35}$, il donnait comme fractions transformées, au lieu des fractions assez simples $\frac{98}{105}$, $\frac{100}{105}$, $\frac{102}{105}$, les fractions compliquées $\frac{10290}{11025}$, $\frac{10500}{11025}$, $\frac{10710}{11025}$, il n'encourait aucun reproche, parce qu'en effet ce sont les trois dernières que donne l'application du seul procédé que l'on enseigne complètement dans les livres.

On dira peut-être qu'un élève tant soit peu exercé et intelligent saura bientôt comment il faut s'y prendre pour réduire des fractions au même dénominateur aux moins de frais possible, et je veux bien l'accorder pour le moment; mais un élève tant soit peu exercé et intelligent saura bientôt aussi réduire une fraction à son expression la plus simple; et pourtant on ne se croit pas pour cela dispensé d'enseigner cette réduction dans les livres d'arithmétique. D'ailleurs ceux qui étudient sont loin d'être tous intelligens, et c'est pour le plus grand nombre des lecteurs que les élémens doivent être écrits.

Dira-t-on qu'après tout, lorsqu'on a besoin d'ajouter ou même seulement de comparer entre elles plusieurs fractions, l'essentiel est uniquement de les amener à avoir un même dénominateur, quel qu'il soit, et qu'il importe assez peu d'ailleurs que ce dénominateur commun soit un peu plus grand ou un peu plus petit? Je veux bien encore, pour le moment, faire cette concession; mais ne sera-t-on pas dès lors contraint de m'accorder aussi que, lorsqu'il s'agit d'exprimer par une fraction une quantité moindre que l'unité, l'essentiel est uniquement que cette fraction en soit l'expression exacte, et qu'il importe assez peu d'ailleurs que ses deux termes soient un peu plus grands ou un peu plus petits? Et ne voilà-t-il pas dès lors l'art de réduire les fractions à leurs moindres termes, et conséquemment la théorie du plus grand commun diviseur, d'où cette réduction dépend, qui devront être considérés comme des superfluités qu'on pourra, sans grave inconvénient, bannir des élémens.

Mais, objectera-t-on, en ne réduisant pas constamment les fractions à leurs moindres termes, on courrait souvent le risque d'introduire dans les équations des racines qui leur seraient étrangères. Si, par exemple, on admettait, sans simplification, l'équation

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3}=6\ ,$$

en chassant le dénominateur, transposant et réduisant, il en résulterait l'équation du second degré

$$5x^2-19x+12=0\ ;$$

tandis qu'en réduisant préalablement à ses moindres termes la fraction qui forme le premier membre de l'équation proposée, cette équation devient simplement

$$\frac{x-2}{x-1}=6\ ,$$

qui donne, en chassant le dénominateur, transposant et réduisant, la simple équation du premier degré

$$5x-4=0,$$

qui est la véritable équation du problème.

Je me rends très-volontiers à cette objection ; j'accorde que toute négligence de calcul, dont l'effet peut être d'introduire dans une équation des racines qui lui soient étrangères, est une faute majeure qu'on ne saurait tolérer, et j'en tire une nouvelle preuve en faveur de la thèse que je défends. Soit, en effet, l'équation

$$\frac{3}{x^2-3x+2}+\frac{2}{x^2-4x+3}+\frac{1}{x^2-5x+6}=6\ ;$$

en réduisant au même dénominateur, par la méthode réputée normale, les trois fractions dont se compose son premier membre, et prenant ensuite la somme des fractions transformées, elle devient, en divisant par 2,

$$\frac{3x^4-25x^3+75x^2-95x+42}{x^6-12x^5+58x^4-144x^3+193x^2-132x+26}=3\ ;$$

d'où, en chassant le dénominateur, transposant et réduisant,

$$3x^6-12x^5+171x^4-407x^3+504x^2-301x+66=0\ .$$

Mais, suivant le procédé réputé exceptionnel, on réduit aussi au même dénominateur les trois fractions qui forment le premier membre de la proposée, en multipliant les deux termes de la première par $x-3$, ceux de la seconde par $x-2$, et ceux de la troisième par $x-1$. Prenant alors la somme de ces fractions, il viendra, en divisant par 2,

$$\frac{3x-7}{x^3-6x^2+11x-6}=3\ ;$$

d'où en chassant le dénominateur, transposant et réduisant,

$$3x^3-18x^2+30x-11=0\ ;$$

véritable équation du problème, qui n'est que du troisième degré seulement; de sorte que, par l'effet de l'application du premier des deux procédés, trois racines étrangères ont été introduites.

C'est donc en vain qu'on tenterait de se dissimuler qu'il y a sur ce point, dans les élémens, une omission grave, une lacune manifeste qui, sans doute, aurait été remplie depuis long-temps si l'on n'avait pas la mauvaise habitude de faire des livres avec d'autres livres, et d'écrire plutôt sous la dictée de la routine que sous l'inspiration de la philosophie. Il y a déjà plus de trente ans que, choqué de cette omission, je me suis attaché à y suppléer dans mon enseignement. Si jusqu'ici je n'en ai rien écrit, c'est que la disparate me semblait tellement choquante, et en même temps si facile à corriger, que j'espérais toujours que, dans quelqu'un des nombreux traités élémentaires qui ont paru depuis cette époque, on songerait enfin à y porter remède. Constamment trompé dans mon attente, je me résigne enfin, à regret, à faire ici moi-même ce que j'aurais préféré voir faire par quelqu'un ayant autorité dans la science.

Ce qu'on va lire sur ce sujet est, pour le fond, une des notes que j'avais rédigées, en 1803, pour une traduction des *Disquisitiones arithmeticæ* de M. GAUSS, dont je m'occupais alors, et que la publication de celle de M. Poullet-Delisle m'a fait ensuite abandonner.

1. J'appelle *diviseur* d'un nombre, tout autre nombre qui se trouve contenu dans celui-là un nombre de fois exactement. Ainsi, par exemple, 4 est diviseur de 12, parce que 12 le contient trois fois exactement.

2. J'appelle *dividende* d'un nombre, tout autre nombre qui contient celui-là un nombre de fois exactement. Ainsi, par exemple,

12 est dividende de 4, parce que 4 y est contenu trois fois.

3. On voit qu'ici les mots diviseur et dividende sont employés sous une acception plus restreinte que celle qu'on y attache communément. On voit aussi que si, de deux nombres, le premier est diviseur du second, le second sera nécessairement dividende du premier, et réciproquement.

4. Tout nombre a toujours au moins deux diviseurs; savoir: l'unité et lui-même. Un nombre peut n'avoir que ces seuls diviseurs, comme il peut fort bien en avoir d'autres, toujours compris entre ces deux-là. Par exemple, 5 n'a d'autres diviseurs que 1 et 5; tandis que 6, outre les diviseurs 1 et 6, a encore les deux diviseurs 2 et 3.

5. Un nombre a toujours une infinité de dividendes, dont le plus petit est ce nombre lui-même. Les autres en sont les multiples à l'infini.

6. Un nombre est dit *diviseur commun* à plusieurs autres, lorsqu'il est, en particulier, diviseur de chacun d'eux. Tel est, par exemple, le nombre 6, par rapport aux trois nombres 24, 42, 60.

7. Un nombre est dit *dividende commun* à plusieurs autres, lorsqu'il est, en particulier, dividende de chacun d'eux. Tel est, par exemple, le nombre 60, par rapport aux trois nombres 10, 12, 15.

8. Des nombres, pris au hasard, ont toujours au moins l'unité pour diviseur commun. Ils peuvent n'avoir que ce seul diviseur commun, comme ils peuvent aussi fort bien en avoir d'autres, dont aucun d'ailleurs ne saurait (4) être plus grand que le plus petit d'entre eux. D'où l'on voit que le nombre des diviseurs communs, à plusieurs nombres proposés, est nécessairement limité, et qu'il en est toujours un qui est le plus grand de tous. Tel est, par exemple, le nombre 6, par rapport aux trois nombres 24, 42, 60.

9. Des nombres, pris au hasard, ont toujours une infinité de dividendes communs; car de ce nombre sont leur produit et tous ses multiples. Mais ils peuvent souvent en avoir de

plus petits que leur produit, lesquels toutefois ne sauraient (5) être moindres que le plus grand d'entre eux. D'où l'on voit que, parmi les dividendes communs à plusieurs nombres, il en est toujours un qui est le plus petit de tous. Tel est, par exemple, le nombre 60, par rapport aux nombres 10, 12, 15.

10. Des nombres sont dits *premiers entre eux*, lorsqu'ils n'ont d'autres diviseurs communs que l'unité. Tels sont, par exemple, les quatre nombres 24, 25, 27, 30.

11. *THÉORÈME. Si, en divisant plusieurs nombres donnés par un de leurs diviseurs communs, on obtient des quotiens qui ne soient pas premiers entre eux; ces nombres auront au moins un autre diviseur commun, plus grand que celui-là.*

*Démonstration.* Soit $d$ un diviseur commun aux nombres $G$, $H$, $K$, ........ $T$, $U$, $V$, dont la division, par ce diviseur, donne les quotiens, non premiers entre eux, $g\delta$, $h\delta$, $k\delta$, .... $t\delta$, $u\delta$, $v\delta$; on aura ainsi

$$G=gd\delta\,,\quad H=hd\delta\,,\quad K=kd\delta\,,\ \ldots..\ T=td\delta\,,\quad U=ud\delta\,,\quad V=vd\delta\,;$$

or, si l'on pose $d\delta=D>d$, on tirera de là

$$\frac{G}{D}=g\,,\quad \frac{H}{D}=h\,,\quad \frac{K}{D}=k\,,\ \ldots..\ \frac{T}{D}=t\,,\quad \frac{U}{D}=u\,,\quad \frac{V}{D}=v\,;$$

d'où l'on voit que $D>d$ sera un autre diviseur commun, comme nous l'avions annoncé.

12. Donc, si l'on divise plusieurs nombres donnés par leur *plus grand diviseur commun*, on obtiendra des quotiens premiers entre eux, car, s'il en était autrement, on prouverait (11) qu'il existe un autre diviseur commun plus grand que celui-là.

13. *THÉORÈME. Si, en divisant tour à tour plusieurs nombres donnés par deux de leurs diviseurs communs, l'un de ces diviseurs donne des quotiens premiers entre eux, celui-là sera nécessairement le plus grand des deux.*

*Démonstration*. Soient $d$ et $d'$ deux diviseurs communs aux nombres $G$, $H$, $K$, ...... $T$, $U$, $V$; supposons qu'en les divisant par $d$ on obtienne les quotiens respectifs $g$, $h$, $k$, ....... $t$, $u$, $v$, et qu'en les divisant par $d'$ on obtienne les quotiens respectifs $g'$, $h'$, $k'$, ....... $t'$, $u'$, $v'$; il en résultera

$$G=gd=g'd',\ H=hd=h'd',\ K=kd=k'd',\ \ldots.\ T=td=t'd',\ U=ud=u'd',\ V=vd=v'd',$$

et par suite

$$\frac{gd}{d'}=g',\quad \frac{hd}{d'}=h',\quad \frac{kd}{d'}=k',\quad \ldots..\quad \frac{td}{d'}=t',\quad \frac{ud}{d'}=u',\quad \frac{vd}{d'}=v';$$

d'où l'on voit d'abord que les produits $gd$, $hd$, $kd$, ..... $td$, $ud$, $vd$, doivent être tous divisibles par $d'$, et doivent conséquemment contenir toutes les sortes de facteurs premiers de $d'$, et au moins en même nombre que dans $d'$, pour chaque sorte.

Mais si les quotiens $g$, $h$, $k$, ...... $t$, $u$, $v$ sont premiers entre eux, aucun des facteurs premiers de $d'$ ne pourra se trouver à la fois dans tous ces quotiens; afin donc que les produits $gd$, $hd$, $kd$, ...... $td$, $ud$, $vd$ soient tous divisibles par $d'$, il faudra que toutes les sortes de facteurs premiers de $d'$ se trouvent dans $d$, et au moins en même nombre pour chaque sorte, ce qui donnera $d>d'$, comme nous nous l'avions annoncé. On voit en outre que $d$ est multiple de $d'$.

14. Donc, deux diviseurs communs à plusieurs nombres ne sauraient donner, l'un et l'autre, des quotiens premiers entre eux, car, s'il en était ainsi, on pourrait prouver du plus petit de ces diviseurs qu'il est plus grand que l'autre.

15. Donc si, en divisant plusieurs nombres par un de leurs diviseurs communs, on obtient des quotiens premiers entre eux, ce diviseur commun sera le plus grand de tous, car, s'il ne l'était pas, le plus grand diviseur commun donnerait aussi (12) des quotiens premiers entre eux; ce qui est impossible par ce qui précède.

17. *THÉORÈME. Si, en divisant par plusieurs nombres donnés*

*un de leurs dividendes communs, les quotiens ne sont pas premiers entre eux, ces nombres auront au moins un autre dividende commun, plus petit que celui-là.*

*Démonstration.* Soit $D$ un dividende commun aux nombres $g$, $h$, $k$, ..... $t$, $u$, $v$, qui, divisant ce dividende, donnent les quotiens non premiers entre eux $G\Delta$, $H\Delta$, $K\Delta$, ..... $T\Delta$, $U\Delta$, $V\Delta$; on aura ainsi

$$D=gG\Delta=hH\Delta=kK\Delta=.....tT\Delta=uU\Delta=vV\Delta\ ;$$

or, si l'on pose $\frac{D}{\Delta}=d<D$, on tirera de là

$$d=gG=hH=kK=.....=tT=uU=vV\ ;$$

d'où l'on voit que $d<D$ sera un autre dividende commun, comme nous l'avions annoncé.

18. Donc, si l'on divise par plusieurs nombres donnés leur plus *petit dividende commun* (*), on obtiendra des quotiens premiers entre eux, car, s'il en était autrement, on prouverait (17) qu'il existe un autre dividende commun plus petit que celui-là.

19. *THÉORÈME. Si, en divisant tour à tour par plusieurs nombres donnés deux de leurs dividendes communs, l'un de ces dividen-*

(*) Dans la traduction de l'ouvrage de M. Gauss, mentionné plus haut, j'avais hasardé de remplacer ces périphrases un peu longues: *plus grand diviseur commun*, *plus petit dividende commun*, par ces autres périphrases un peu plus courtes et tout aussi expressives: *diviseur maxime*, *dividende minime.* J'étais jeune alors, et je croyais qu'il suffisait à une innovation que l'on proposait d'être raisonnable pour la voir aussitôt accueillie. L'âge et l'expérience ne m'ont que trop bien appris depuis que ce n'est pas du fond d'une province qu'on peut tenter d'opérer des réformes, et qu'il faut absolument habiter la capitale pour oser innover avec quelque chance de succès, ne fusse même que sur la figure des virgules. Plus timide encore que moi, M. Delisle a traduit l'expression *minimus communis dividuus* de M Gauss par cette longue périphrase: *plus petit nombre divisible, à la fois, par, etc.*

*des donne des quotiens premiers entre eux, celui-là sera nécessairement le plus petit des deux.*

*Démonstration.* Soient $D$ et $D'$ deux dividendes communs aux nombres $g$, $h$, $k$, ...... $t$, $u$, $v$, qui, divisant le premier, donnent les quotiens respectifs $G$, $H$, $K$, .... $T$, $U$, $V$, et qui, divisant le second, donnent les quotiens respectifs $G'$, $H'$, $K'$, .... $T'$, $U'$, $V'$; il en résultera

$$D=gG=hH=kK=\ldots\ldots=tT=uU=vV\ ,$$

$$D'=gG'=hH'=kK'=\ldots\ldots=tT'=uU'=vV'\ ,$$

et, par suite,

$$\frac{GD'}{D}=G',\ \frac{HD'}{D}=H',\ \frac{KD'}{D}=K',\ \ldots\ldots\ \frac{TD'}{D}=T',\ \frac{UD'}{D}=U',\ \frac{VD'}{D}=V';$$

d'où l'on voit d'abord que les produits $GD'$, $HD'$, $KD'$, ..... $TD'$, $UD'$, $VD'$ doivent être tous divisibles par $D$, et doivent conséquemment contenir toutes les sortes de facteurs premiers de $D$, et au moins en même nombre que dans $D$, pour chaque sorte.

Mais si les quotiens $G$, $H$, $K$, ........ $T$, $U$. $V$ sont premiers entre eux, aucun des facteurs premiers de $D$ ne pourra se trouver à la fois dans tous ces quotiens; afin donc que les produits $GD'$, $HD'$, $KD'$, ...... $TD'$, $UD'$, $VD'$ soient tous divisibles par $D$, il faudra que toutes les sortes de facteurs premiers de $D$ se trouvent dans $D'$, et au moins en même nombre pour chaque sorte, ce qui donnera $D<D'$, comme nous l'avions annoncé.

20. Donc deux dividendes communs à plusieurs nombres ne sauraient donner l'un et l'autre des quotiens premiers entre eux, car, s'il en était ainsi, on pourrait prouver du plus grand de ces dividendes qu'il est plus petit que l'autre.

21. Donc si, en divisant par plusieurs nombres un de leurs dividendes communs, on obtient des quotiens premiers entre eux, ce dividende commun sera le plus petit de tous, car, s'il ne l'était pas, le plus petit dividende commun donnerait aussi (18) des

quotiens premiers entre eux, ce qui est impossible par ce qui précède.

22. *THÉORÈME. Le plus grand diviseur commun à plusieurs nombres ne change pas lorsqu'on remplace deux quelconques d'entre eux par leur plus grand diviseur commun.*

*Demonstration.* Soient $G$, $H$, $K$, ....... $T$, $U$, $V$ des nombres donnés ; il s'agit de prouver que, si $D$ est le plus grand diviseur commun à $U$ et $V$, et que $\delta$ soit le plus grand diviseur commun à $G$, $H$, $K$, ..... $T$, $D$ ; $\delta$ sera aussi le plus grand diviseur commun aux nombres proposés.

Soient, en effet, $u$ et $v$ les quotiens qu'on obtient en divisant $U$ et $V$ par $D$ ; ces quotiens seront (12) premiers entre eux, et l'on aura

$$U=uD\ ,\qquad V=vD\ .$$

Soient, en outre, $g$, $h$, $k$, .... $t$, $d$, les quotiens qu'on obtient en divisant respectivement $G$, $H$, $K$, ..... $T$, $D$ par $\delta$ ; ces quotiens seront également premiers entre eux, et l'on aura

$$G=g\delta\ ,\quad H=h\delta\ ,\quad K=k\delta\ ,\quad \ldots\ldots\ldots\quad T=t\delta\ ,\quad D=d\delta\ ;$$

de là on conclura

$$\frac{G}{\delta}=g\ ,\quad \frac{H}{\delta}=h\ ,\quad \frac{K}{\delta}=k\ ,\quad \ldots\ldots\quad \frac{T}{\delta}=t\ ,\quad \frac{U}{\delta}=ud\ ,\quad \frac{V}{\delta}=vd\ ;$$

or, aucun des facteurs premiers communs à $g$, $h$, $k$, ..... $t$, si toutefois il en existe de tels, ne pourra se trouver dans $d$, qui est premier avec l'ensemble de ces nombres ; il ne pourra davantage se trouver à la fois dans $u$ et $v$, qui sont premiers entre eux ; donc, aucun de ces facteurs premiers ne pourra se trouver à la fois dans $ud$ et $vd$ ; donc, en divisant les nombres proposés par $\delta$, on obtient des quotiens premiers entre eux ; donc enfin $\delta$ est (15), comme nous l'avions annoncé, le plus grand diviseur commun à tous ces nombres.

23. Si donc l'on sait seulement déterminer le plus grand diviseur commun à deux nombres proposés, on pourra toujours ré-

duire à un de moins tant de nombres qu'on voudra, dont on aura à chercher le plus grand diviseur commun; on pourra donc, de proche en proche, réduire ces nombres à deux seulement.

25. *THÉORÈME. Le plus petit dividende commun à plusieurs nombres ne change pas lorsqu'on remplace deux quelconques d'entre eux par leur plus petit dividende commun.*

*Démonstration.* Soient $g$, $h$, $k$, ...... $t$, $u$, $v$ des nombres donnés; il s'agit de prouver que, si $d$ est le plus petit dividende commun à $u$ et $v$, et que $\Delta$ soit le plus petit dividende commun à $g$, $h$, $k$, ...... $t$, $d$; $\Delta$ sera aussi le plus petit dividende commun aux nombres proposés.

Soient, en effet, $U$ et $V$ les quotiens qu'on obtient en divisant $d$ par $u$ et $v$; ces quotiens seront (18) premiers entre eux, et l'on aura

$$d=uU=vV\,;$$

Soient, en outre, $G$, $H$, $K$, ...... $T$, $D$ les quotiens qu'on obtient en divisant respectivement $\Delta$ par $g$, $h$, $k$, ...... $t$, $d$; ces quotiens seront également premiers entre eux, et l'on aura

$$\Delta=gG=hH=kK=.....=tT=dD\ ;$$

de là on conclura

$$\frac{\Delta}{g}=G\,,\quad \frac{\Delta}{h}=H\,,\quad \frac{\Delta}{k}=K\,,\ \ldots\ldots\ \frac{\Delta}{t}=T\,,\quad \frac{\Delta}{u}=UD\,,\quad \frac{\Delta}{v}=VD\,;$$

or, au'un des facteurs premiers communs à $G$, $H$, $K$, ...... $T$, si toutefois il en existe de tels, ne pourra se trouver dans $D$, qui est premier avec l'ensemble de ces nombres; il ne pourra davantage se trouver dans $U$ et $V$ qui sont premiers entre eux; donc, aucun de ces facteurs premiers ne pourra se trouver, à la fois, dans $UD$ et $VD$; donc, en divisant $\Delta$ par les nombres proposés, on obtient des quotiens premiers entre eux; donc enfin (21) $\Delta$ est, comme nous l'avions annoncé, le plus petit dividende commun à tous ces nombres.

26. Si donc l'on sait seulement déterminer le plus petit dividende commun à deux nombres proposés, on pourra toujours réduire à un de moins tant de nombres qu'on voudra, dont on aura à chercher le plus petit dividende commun; on pourra donc, de proche en proche, réduire ces nombres à deux seulement.

27. *THÉORÈME. Le quotient de la division du produit de deux nombres par leur plus grand diviseur commun est leur plus petit dividende commun.*

*Démonstration.* Soient $G$ et $H$ deux nombres dont $d$ soit le plus grand diviseur commun; il s'agit de prouver que, si l'on a $\frac{GH}{d}=D$, $D$ sera le plus petit dividende commun aux deux nombres $G$ et $H$.

Soient, en effet, $g$ et $h$ les quotiens qu'on obtient respectivement en divisant $G$ et $H$ par $d$; ces quotiens seront (12) premiers entre eux et l'on aura

$$G=gd\ ,\quad H=hd\ ,\quad \text{d'où}\quad GH=ghd^2\ ;$$

on aura donc $D=ghd$, et, par suite,

$$\frac{D}{G}=h\ ,\quad \frac{D}{H}=g\quad ;$$

les quotiens qu'on obtient en divisant $D$, tour à tour, par $G$ et $H$ sont donc premiers entre eux; $D$ est donc (21), comme nous l'avions annoncé, leur plus petit dividende commun.

28. Si donc l'on sait seulement déterminer le plus grand diviseur commun à deux nombres proposés, on saura aussi déterminer le plus petit dividende commun à ces deux nombres.

29. *THÉORÈME. Le plus grand diviseur commun au plus petit de deux nombres et au reste de leur division, est aussi le plus grand diviseur commun à ces deux nombres.*

*Démonstration.* Soient $G$ et $H$ ces deux nombres, $H$ le plus petit, $Q$ le quotient et $R$ le reste de leur division. Il s'agit de prouver que, si $d$ est le plus grand diviseur commun à $H$ et $R$, ce sera aussi le plus grand diviseur commmun à $G$ et $H$.

On a, en effet,

$$G=HQ+R\ ;$$

or, 1.° de ce que $d$ divise $H$ et $R$, il doit aussi diviser $HQ$, et conséquemment $HQ+R$ ou $G$; ainsi $d$ est d'abord diviseur commun à $G$ et $H$.

2.° Si, en outre, $G$ et $H$ pouvaient avoir quelque autre diviseur commun $D>d$, ce diviseur, divisant $G$, devrait diviser $HQ+R$; mais, divisant $H$, il devrait diviser $HQ$; il faudrait donc aussi qu'il divisât $R$; il serait donc diviseur commun à $H$ et $R$, dont $d$ ne serait plus dès lors, comme nous l'avons supposé, le plus grand diviseur commun.

30. On peut donc toujours ramener la recherche du plus grand diviseur commun à deux nombres donnés à la recherche du plus grand diviseur commun au plus petit et à un autre nombre plus petit que lui; on pourra donc, de proche en proche, amener le plus petit des deux nombres à être zéro, et alors l'autre résoudra le problème.

31. Ainsi, en résumé, 1.° pour déterminer le plus grand diviseur commun, à deux nombres donnés, on divisera (30) le plus grand par le plus petit, le plus petit par le reste, le premier reste par le second, le second par le troisième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à une division exacte, et alors le dernier diviseur sera le plus grand diviseur commun cherché.

2.° Pour déterminer le plus petit dividende commun à deux nombres seulement, il faudra (27) diviser le produit de ces deux nombres par leur plus grand commun diviseur.

3.° S'agit-il enfin de déterminer soit le plus grand diviseur, soit le plus petit dividende commun à plus de deux nombres; on cherchera d'abord (22) et (25) le plus grand diviseur ou le plus petit dividende commun à deux d'entre eux; puis le plus grand diviseur ou le petit dividende commun au résultat obtenu et à un troisième nombre; puis le plus grand diviseur ou le plus petit dividende commun au second résultat et à un quatrième nombre, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait opéré sur tous les nombres proposés, et le dernier résultat obtenu en sera le plus grand diviseur ou le plus petit dividende commun.

32. Si l'on veut simplifier, autant qu'il est possible, un rapport exprimé par plusieurs nombres, il faudra diviser tous les termes dont se compose ce rapport par leur plus grand diviseur commun.

33. Si l'on veut réduire des fractions proposées au même dénominateur, et obtenir des fractions tranformées aussi simples que le comporte la nature du problème, il faudra multiplier les deux termes, de chacune des fractions proposées, par le quotient obtenu en divisant le plus petit dividende commun aux dénominateurs de toutes ces fractions par son dénominateur propre.

34. S'il s'agit de faire disparaître les dénominateurs des termes fractionnaires d'une équation de la manière la plus simple, il faudra multiplier les deux membres de cette équation par le plus petit dividende commun à tous ces dénominateurs.

35. Bien que, dans tout ce qui précède, il n'ait été question que de quantités numériques, tout ce que nous avons dit peut néanmoins être exactement appliqué soit aux lignes droites, soit aux arcs de même rayon, soit enfin à des polynomes.

Il faut seulement observer 1.° que le plus grand diviseur commun à des droites ou à des arcs de même rayon peut quelquefois se réduire à un point; 2.° que leur plus petit dividende commun peut quelquefois être infini; 3.° enfin, que la recherche du plus grand diviseur commun à deux polynomes exige le plus souvent quelques précautions particulières que nous ne mentionnons pas ici, parce qu'il en est traité fort au long dans la plupart des ouvrages élémentaires.

# ANALYSE APPLIQUÉE.

## *Mémoire sur la théorie analytique de la chaleur;*

Par M. J. LIOUVILLE, élève ingénieur des ponts et chaussées.

1. Le mémoire que l'on va lire est extrait des paragraphes 1, 2 et 4 des *Recherches sur la théorie physico-mathématique de la chaleur* que j'ai présentées à l'Institut, en février dernier. Je donne les moyens de tenir compte de la variation du pouvoir rayonnant aux divers points d'une barre échauffée. Je considère comme arbitrairement différentes, d'un point à l'autre d'une substance donnée, sa conductibilité et sa chaleur spécifique. Ces questions jusqu'ici n'avaient été traitées par aucun géomètre; elles semblent offrir des difficultés presque insurmontables, lorsqu'on suppose aux corps leurs trois dimensions. Si l'on fait abstraction de deux d'entre elles, le problème est complètement résolu par mon travail.

Soit une barre métallique AB, plongée dans un milieu entretenu à la température 0°; les extrémités de cette barre sont assujéties à des conditions quelconques; elles ont, par exemple, des températures constantes. On la suppose d'ailleurs assez mince pour que les divers points d'une même section perpendiculaire à l'axe aient toujours, au même instant, la même température. De la nature de cette barre dépend sa conductibilité, que nous regardons comme invariable, le métal étant homogène. Quant au pouvoir rayonnant il dépend du poli des divers points de la barre, et nous supposons qu'il varie proportionnellement à une fonction quelconque de l'abscisse.

Le cas le plus simple est celui où l'on propose de déterminer l'état permanent des températures, auquel le corps ne peut arriver, en rigueur, qu'après un temps infini. Le mouvement de la chaleur est représentée alors par une équation linéaire du second ordre entre la température $u$ et sa fluxion seconde $\frac{d^2u}{dx^2}$, prise par rapport à l'abscisse $x$. A cause de la fonction arbitraire relative au rayonnement, l'équation dont nous parlons est la plus générale de son espèce. Il s'agit d'en trouver l'intégrale complète.

L'un des moyens que nous employons consiste à substituer à la courbe qui représente le pouvoir rayonnant, en fonction de l'abscisse, un polygone inscrit qui en diffère aussi peu qu'on veut. Le second, à développer la valeur de $u$ en une suite infinie, dont nous montrons généralement la convergence. L'un et l'autre se plient aisément aux calculs numériques, et partant sont susceptibles d'applications. Nous avons employé le premier, dès l'année 1829, dans un mémoire qui ne traitait que du mouvement permanent, et que nous avons reproduit dans nos recherches de 1830.

Dans tous les cas, l'équation du problème étant linéaire et du second ordre, il suffit d'en connaître une intégrale particulière pour en trouver l'intégrale complète ; ou, pour traduire physiquement cette propriété mathématique, on traitera généralement la question du mouvement permanent de la chaleur dans une barre, si l'on résout par l'expérience cette même question, en assujétissant les extrémités de cette barre à des conditions particulières.

Les difficultés d'analyse s'accroissent déjà beaucoup lorsque c'est le mouvement linéaire et varié de la chaleur qu'on veut mesurer. La température devenant alors une fonction de l'abscisse $x$ et du temps $t$, dépend alors d'une équation aux différences partielles à deux variables indépendantes. Heureusement la seconde d'entre elles n'y entre qu'implicitement, ce qui permet d'employer les méthodes ordinaires. On développe la valeur de $u$ en une série d'exponentiels qui contiennent, en exposant, le temps $t$, multiplié par diverses quantités successives, que je désigne, en général, par $-m$, et que l'on détermine ensuite. Chacune des exponentielles a pour coefficient une fonction de l'abscisse. L'équation qui donne la valeur de chacun de ces coefficiens est linéaire et du second ordre. Elle a la même forme que celle qui a été précédemment traitée ; les mêmes méthodes lui sont applicables ; et c'est ainsi que le mouvement varié se ramène au cas plus simple du mouvement permanent.

Toutefois il reste à déterminer les valeurs des constantes arbitraires, en nombre infini, introduites par l'intégration de ces équations diverses, et qui dépendent de l'état initial de la barre, comme l'équation qui donne les valeurs de $m$ dépend des conditions relatives à ses extrémités. La forme de cette dernière équation rend cette détermination très-simple. Ici se présentent des calculs analogues à ceux qu'on trouve dans les ouvrages de MM. Fourier et Poisson, et la possibilité de représenter une fonction quelconque, entre des limites données, par une série dont les termes sont les intégrales d'une équation linéaire du second ordre. Déjà l'on avait développé une fonction quelconque en série de sinus et de cosinus, et en suites infinies formées de ces quantités qui se présentent dans les recherches relatives à l'attraction des sphéroïdes ; mais je ne sache pas que jusqu'ici on ait fait un semblable usage des fonctions transcendantes que notre analyse nous a fournies.

La quantité générale $m$, qui entre comme facteur du temps, dépend d'une équation dont toutes les racines sont réelles et positives. Elles ne sont pas négatives, car alors la température croîtrait indéfiniment avec le temps, et il est clair que cela ne peut arriver ici. Si elles étaient imaginaires, les mouvemens libres de la chaleur seraient assujétis à des oscillations, ce qui est impossible sans l'action de causes périodiques extérieures. Cette démonstration directe et générale est de M. Fourier. Toutefois nous avons prouvé, par un moyen particulier, dans la question qui nous occupe, la réalité des racines de l'équation déterminée, afin de mieux établir l'accord des élémens analytiques dont se forme la théorie.

Jusqu'ici nous avons supposé constantes et la conductibilité et la chaleur spécifique de la barre. Cependant si sa matière était hétérogène, ces deux quantités varieraient avec les coordonnées de chaque point. Par un heureux hasard, la méthode qui tient compte de la variation du pouvoir rayonnant s'étend à la résolution du nouveau problème dont nous parlons. Cette extension de notre méthode n'offre aucune difficulté. Elle se trouve détaillée dans les derniers paragraphes de notre mémoire.

II. Dans les divers mémoires qui ont été publiés sur la théorie de la chaleur, les géomètres ont négligé de tenir compte de la variation du pouvoir rayonnant d'un point à l'autre de la surface du corps en expérience. L'examen des effets produits par cette variation sera le sujet de nos premières recherches. Considérant d'abord le cas simple d'une barre métallique parvenue à un état permanent, et assez mince pour que les divers points d'une même section transversale puissent être regardés comme ayant, à chaque instant, une température commune, j'essaye ensuite de traiter, par la même méthode et dans le même but, des questions plus élevées.

Soit AB une barre métallique, homogène, mais inégalement polie, dont les extrémités A, B sont constamment entretenues aux températures $\theta$, $\theta'$; en un point $m$ quelconque de cette barre, dont la distance à l'origine A est représentée par $x$, la température est assujétie à l'équation

$$K\omega \frac{d^2u}{dx^2} = \gamma\varepsilon u\ ;$$

lorsque l'on considère la barre arrivée à un état permanent, dans un milieu dont la température est prise pour le zéro de l'échelle thermométrique. Je tire cette équation du premier mémoire de M. Poisson, sur la théorie de la chaleur : $\omega$ est l'aire, $\varepsilon$ le contour d'une section perpendiculaire à l'axe. Le coefficient $K$ mesure la conductibilité de la barre. Nous supposons qu'en tous ses points il a la même valeur, ainsi que $\omega$ et $\varepsilon$. Le coefficient $\gamma$ mesure le pouvoir rayonnant de la surface extérieure : il varie d'un point à l'autre, à cause de l'inégalité du poli des différens points de cette surface. Nous le représentons par la fonction déterminée $f(x)$ ; et de la sorte l'équation ci-dessus devient

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{dx^2}=\frac{\varepsilon f(x)}{K\omega}u\,;$$

Pour résoudre le problème que nous nous proposons, il faut intégrer cette équation et déterminer les deux constantes de son intégrale par cette double condition qu'à $x=0$ réponde $u=\theta$, et qu'à $x=AB=l$ réponde $u=\theta'$,

III. Nous observerons d'abord que l'équation (1) étant linéaire et du second ordre, est intégrable, chaque fois qu'une intégrale particulière en est connue. Cette remarque, faite depuis long-temps, répond à une propriété du mouvement linéaire permanent de la chaleur. Supposons, en effet, la barre AB placée dans un milieu entretenu à 0°, et ses extrémités ayant des températures constantes quelconques. Déterminons, par l'expérience, la loi des températures permanentes. Qu'elle soit, si l'on veut, représentée par l'équation $u=F(x)$. De cette loi, et sans connaître le pouvoir rayonnant dont dépend $f(x)$, on tire la valeur de la quantité $u$, dans un cas quelconque. En effet, par la manière même dont on l'obtient, la fonction $F(x)$ satisfait à la condition

$$\frac{d^2.F(x)}{dx^2}=\frac{\varepsilon f(x)}{K\omega}.F(x)\,;$$

Soit $v$ une nouvelle variable. Posons $u=vF(x)$ ; il en résultera

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d^2v}{dx^2}F(x)+2\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dF(x)}{dx}+v\frac{d^2F(x)}{dx^2}\ .$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1), elle deviendra

$$\frac{d^2v}{dx^2}F(x)+2\frac{dv}{dx}\frac{dF(x)}{dx}+v\frac{d^2F(x)}{dx^2}=v.\frac{\varepsilon f(x)}{K\omega}.F(x)\ ;$$

et se réduira à

$$\frac{d^2v}{dx^2}F(x)+2\frac{dv}{dx}\frac{dF(x)}{dx}=0\ ;$$

On a donc, sur-le-champ,

$$v=C\int\frac{dx}{F^2(x)}+C'\ ;$$

où $C$ et $C'$ sont les constantes arbitraires. Multipliant par $F(x)$ la valeur de $v$, on obtient la valeur de $u$ ; savoir :

$$u=F(x)\left\{C\int\frac{dx}{F^2(x)}+C'\right\}\ .$$

Ainsi donc, comme nous l'avons dit, *le problème général du mouvement linéaire et permanent de la chaleur se traite sans difficulté, quand on sait le resoudre pour un état particulier des extremités de la barre.*

IV. Mais, si l'on ne connaît pas $F(x)$, et que le pouvoir rayonnant $f(x)$, au contraire, soit déterminé par un moyen quelconque, il faudra recourir à des calculs d'une autre nature. Une considération qui se présente d'abord nous dirigera dans la marche que nous devons prendre. Nous admettrons que la fonction f$(x)$ a été obtenue par interpolation, en mesurant, par exemple, sa valeur au point A, au point B et aux $n-1$ points intermédiaires également espacés entre eux de la quantité $\frac{l}{n}$. Soient $b'$, $b''$ les valeurs de f$(x)$ à deux de ces points consécutifs, dont les abscisses sont $x'$, $x''$; faute de données plus positives, on pourra supposer que

$$\mathrm{f}(x)=\frac{b'x''-b''x'}{x''-x'}+\frac{b''-b'}{x''-x'}x\ .$$

La barre se trouvera ainsi partagée en portions d'égale longueur, pour lesquelles la valeur de f$(x)$ et l'équation (1) seront différentes, ce qui nécessitera de nouvelles conditions pour la détermination des nouvelles constantes arbitraires qu'introduira l'intégration de ces équations diverses. Ces conditions consistent évidemment en ce qu'aux divers points de partage de la barre, les valeurs de $u$ et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ doivent être les mêmes, soit qu'on les déduise de l'équation qui se rapporte à la partie antérieure au point de division dont il s'agit, ou qu'on les déduise de l'équation qui se rapporte à la portion située au-delà.

Je distinguerai par les numéros 1, 2, 3, ....... $\mu$, ....... $n$ les $n$ parties égales dans lesquelles la barre a été divisée. Je nommerai $u_\mu$ la température de la partie $\mu$, et $p_\mu+q_\mu x$ la valeur correspondante de $\frac{\varepsilon \mathrm{f}(x)}{K\omega}$. De la sorte j'aurai ces $n$ équations indéfinies

$$\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}x^2}=(p_1+q_1x)u_1\ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}x^2}=(p_2+q_2x)u_2\ ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\ ,$$

$$\frac{d^2u_\mu}{dx^2}=(p_\mu+q_\mu x)u_\mu\ ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

$$\frac{d^2u_n}{dx^2}=(p_n+q_n x)u_n\ ;$$

l'intégration de ces équations introduira $2n$ constantes que l'on déterminera par ces $2n$ conditions :

$$u_1=\theta\ , \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ pour } x=0\ ,$$

$$u_1=u_2\ ,\quad \frac{du_1}{dx}=\frac{du_2}{dx}\ , \text{ pour } x=\frac{l}{n}\ ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

$$u_{n-1}=u_n\ ,\quad \frac{du_{n-1}}{dx}=\frac{du_n}{dx}\ , \text{ pour } x=(n-1)\,\frac{l}{n}\ ;$$

$$u_n=\theta'\ , \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ pour } x=l\ .$$

V. Toute la question ainsi ramenée à trouver l'intégrale complète de l'équation générale

$$(2)\qquad \frac{d^2u_\mu}{dx^2}=(p_\mu+q_\mu x)u_\mu\ ;$$

se trouve réduite à un problème purement analytique, dont on parvient, sans beaucoup de peine, à obtenir la solution. Et d'abord, en posant

$$p_\mu+q_\mu x=zq_\mu^{\frac{2}{3}}\ ,$$

l'équation (2) se change en

$$(3) \qquad \frac{d^2 u_\mu}{dz^2} = z . u_\mu .$$

Sous cette forme, on reconnaît 1.° que l'équation (3) rentre dans un des cas de l'équation de Riccati qui, jusqu'à présent, ont échappé à toutes les méthodes, et qui vraisemblablement ne seront jamais résolus ; 2.° qu'il faut renoncer, par conséquent, à exprimer la valeur de $u_\mu$ autrement que par des séries convergentes ou par le secours de quadratures définies.

VI. L'équation (3) étant linéaire et du second ordre, il nous suffira d'en chercher deux intégrales particulières pour arriver à son intégrale complète. L'une et l'autre se déduiront du développement de $u_\mu$ en série, suivant les puissances croissantes de $z$. Considérons la suite infinie

$$1 + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^6}{2.3.5.6} + \frac{z^9}{2.3.5.6.8.9} + \ldots\ldots ;$$

dont la loi régulière est facile à saisir. La différentielle seconde de cette quantité est

$$z\left(1 + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^6}{2.3.5.6} + \frac{z^9}{2.3.5.6.8.9} + \ldots\ldots\right) ;$$

de sorte qu'en posant

$$u_\mu = 1 + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^6}{2.3.5.6} + \frac{z^9}{2.3.5.6.8.9} + \ldots\ldots ;$$

on satisfera à l'équation (3).

Toutefois la conclusion pourrait être inexacte, si la série dont il est question cessait d'être convergente. Nous allons faire voir que cela n'a jamais lieu quelque grand nombre que l'on substitue à la place de $z$. Soient $P$, $P'$ deux coefficiens consécutifs qui répondent dans la série aux puissances $n-2$ et $n+1$ de $x$. Le rapport de ces deux termes sera $\frac{P'}{P}=\frac{z^3}{n(n+1)}$. Quelque grand nombre qu'on prenne pour $z$, en assignant à $n$ une valeur assez considérable, il sera toujours possible de rendre $P$ plus grand que $P'$; et, au-delà de cette valeur de $n$, le rapport $\frac{P'}{P}$ ira sans cesse en décroissant avec rapidité jusqu'à devenir nul. On arrivera donc, en considérant la série que nous prenons pour valeur de $u_\mu$ à un terme $P$, tel que, si l'on forme la progression géométrique $P(1+\rho+\rho^2+\ldots\ldots)$, où la raison est moindre que l'unité, et dont la somme est finie, le reste de la série sera moindre que cette somme $\frac{P}{1-\rho}$.

La valeur de $u_\mu$ se trouve donc ainsi exprimée par une série convergente, dans tous les cas possibles, servira à en calculer la valeur avec tel degré d'approximation que l'on voudra. Cette série a en outre l'avantage de s'exprimer élégamment, sous forme finie, par le secours d'une intégrale définie.

VII. Pour démontrer avec facilité cette proposition, j'écris la valeur de $u_\mu$ sous la forme

$$1+\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{4z^6}{1.2.3.4.5.6}+\frac{4.7z^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}+\ldots\ldots;$$

ou bien

$$1+\frac{1.z^3}{1.2.3}+\frac{1(1+3)z^6}{1.2.3.4.5.6}+\frac{1(1+3)(1+3.2)z^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}+\ldots\ldots;$$

de sorte qu'en général on peut représenter ainsi deux termes consécutifs.

$$\frac{1[1+3][1+3.2][1+3.3]\ldots\ldots\ldots\ldots[1+3(n-1)]}{1.2.3.4\ldots\ldots\ldots 3n}z^{3n},$$

$$\frac{1[1+3][1+3.2][1+3.3]\ldots\ldots[1+3(n-1)][1+3n]}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ \ 4\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3n.(3n+1)(3n+2)(3n+3)}z^{3n+3}.$$

Les numérateurs des fractions qui multiplient $z^{3n}$, $z^{3n+3}$ étant représentés par $P_n$, $P_{n+1}$, sont assujétis à l'équation $P_{n+1}=P_n(1+3n)$. La méthode indiquée par Laplace, dans sa *Théorie analytique des probabilités*, pour intégrer les équations aux différences finies étant ici applicable, on en déduit

$$P_n=C\int_0^\infty \alpha^{-\frac{1}{3}}.e^{-\frac{\alpha}{3}}.\alpha^{n-1}.d\alpha\ ;$$

$C$ designant la constante arbitraire et $e$ la base des logarithmes de Néper. Ainsi, la valeur de $u_\mu$ peut être transformée en une série telle que la suivante :

$$C\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{3}}.\alpha^{-\frac{2}{3}}.d\alpha\left(1+\frac{\alpha z^3}{1.2.3}+\frac{\alpha^2z^6}{1.2.3.4.5.6}+\frac{\alpha^3z^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}+\ldots\right).$$

La série comprise entre les parenthèses a pour différentielle troisième, par rapport à $z$,

$$\alpha\left(1+\frac{\alpha z^3}{1.2.3}+\frac{\alpha^2z^6}{1.2.3.4.5.6}+\frac{\alpha^3z^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}+\ldots\ldots\right);$$

de sorte qu'en la représentant par $\lambda$, elle satisfait à l'équation $\frac{d^3\lambda}{dz^3}=\alpha\lambda$, d'où résulte

$$\lambda=C_1e^{z\sqrt[3]{\alpha}}+C_2e^{\rho z\sqrt[3]{\alpha}}+C_3e^{\rho^2z\sqrt[3]{\alpha}}\ ;$$

$C_1$, $C_2$, $C_3$ désignant des constantes, et $1$, $\rho$, $\rho^2$ étant les trois racines cubiques de l'unité ; et comme il est évident que, pour $z=0$, on doit avoir $\lambda=1$, $\frac{d\lambda}{dz}=0$, $\frac{d^2\lambda}{dz^2}=0$, on trouvera sans peine, en se rappelant que $1+\rho+\rho^2=0$,

$$\lambda=\frac{1}{3}\left(e^{z\sqrt[3]{\alpha}}+e^{\rho z\sqrt[3]{\alpha}}+e^{\rho^2 z\sqrt[3]{\alpha}}\right).$$

Par conséquent,

$$u_\mu=\frac{C}{3}\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{3}}.x^{-\frac{2}{3}}\left(e^{z\sqrt[3]{\alpha}}+e^{\rho z\sqrt[3]{\alpha}}+e^{\rho^2 z\sqrt[3]{\alpha}}\right)dx\,;$$

VIII. En différentiant deux fois de suite, par rapport à $z$, la série suivante

$$z+\frac{z^4}{3.4}+\frac{z^7}{3.4.6.7}+\frac{z^{10}}{3.4.6.7.9.10}+\ldots\,;$$

on obtient ce résultat

$$z\left(z+\frac{z^4}{3.4}+\frac{z^7}{3.4.6.7}+\frac{z^{10}}{3.4.6.7.9.10}+\ldots\ldots\right):$$

En posant donc

$$u_\mu=z+\frac{z^4}{3.4}+\frac{z^7}{3.4.6.7}+\frac{z^{10}}{3.4.6.7.9.10}+\ldots\ldots\,;$$

on satisfera de nouveau à l'équation (3), dont nous avons ainsi une nouvelle intégrale particulière. Les raisonnemens de l'art. VI, étant applicables à cette intégrale, montrent en premier lieu, que la série qui en exprime le développement est toujours convergente et peut servir à en calculer la valeur avec tel degré d'approximation que l'on désirera. Une marche analogue à celle de l'art. VII donne ensuite les moyens de l'écrire sous forme finie, par le secours des quadratures définies.

Pour cela, il suffit de mettre la valeur de $u_\mu$ sous la forme

$$z+\frac{2z^4}{1.2.3.4}+\frac{2(2+3)z^{4+3}}{1.2.3.4.5.6.7}+\frac{2(2+3)(2+3.2)z^{4+3.2}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}+\ldots\ldots\,;$$

de sorte qu'en général on puisse représenter ainsi deux termes consécutifs

$$\frac{2[2+3][2+3.2][2+3.3]\ldots\ldots[2+3(n-1)]}{1.2.3.4\ldots\ldots[4+3(n-1)]}z^{4+3(n-1)}\ ,$$

$$\frac{2[2+3][2+3.2][2+3.3]\ldots\ldots[2+3(n-1)][2+3n]}{1.2.3.4\ldots[4+3(n-1)][4+3n-2][4+3n-1][4+3n]}z^{4+3n}\ ;$$

Les numérateurs des fractions qui multiplient $z^{4+3(n-1)}$ et $z^{4+3n}$ étant dénommés $P_{n-1}$, $P_n$ sont assujétis à la condition

$$P_n=(2+3n)P_{n-1}\ ,$$

de laquelle on déduit, par la méthode de Laplace,

$$P_n=C\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{3}}.\alpha^{\frac{2}{3}}.\alpha^n.d\alpha\ .$$

Il nous vient donc

$$u_\mu=C\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{3}}.\alpha^{-\frac{1}{3}}.\left(z+\frac{\alpha z^4}{1.2.3.4}+\frac{\alpha^2 z^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots\ldots\right)d\alpha\ .$$

Mais, si l'on pose

$$\lambda=z+\frac{\alpha z^4}{1.2.3.4}+\frac{\alpha^2 z^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots\ldots;$$

on trouvera

$$\frac{d^3\lambda}{dz^3}=\alpha\lambda\ ;$$

d'où on déduira, par l'intégration,

$$\lambda=C_1e^{z\sqrt[3]{\alpha}}+C_2e^{\rho z\sqrt[3]{\alpha}}+C_3e^{\rho^2 z\sqrt[3]{\alpha}}\ ;$$

$C_1$, $C_2$, $C_3$ désignant des constantes, et $1$, $\rho$, $\rho^2$ les trois racines cubiques de l'unité. Les constantes se déterminent en observant que, pour $z=0$, on a $\lambda=0$, $\frac{d\lambda}{dz}=1$, $\frac{d^2\lambda}{dz^2}=0$; on trouve ainsi

$$C_1=\frac{1}{3}\alpha^{-\frac{1}{3}}, \quad C_2=\frac{\rho^2}{3}\alpha^{-\frac{1}{3}}, \quad C_3=\frac{\rho}{3}.\alpha^{-\frac{1}{3}};$$

d'où résulte

$$\lambda=\frac{\alpha}{3}^{-\frac{1}{3}}\left(e^{z\sqrt[3]{\alpha}}+\rho^2 e^{\rho z\sqrt[3]{\alpha}}+\rho e^{\rho^2 z\sqrt[3]{\alpha}}\right);$$

et, par conséquent,

$$u_\mu=\frac{C}{3}\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{3}}.\alpha^{-\frac{2}{3}}\left(e^{z\sqrt[3]{\alpha}}+\rho^2 e^{\rho z\sqrt[3]{\alpha}}+\rho e^{\rho^2 z\sqrt[3]{\alpha}}\right):$$

IX. Ayant ainsi découvert aux art. VII et VIII deux intégrales particulières de l'équation (3), l'intégrale complète de cette équation va s'obtenir en faisant la somme des produits de ces deux intégrales par des constantes arbitraires. On pourra donc prendre pour valeur complète de $u_\mu$ celle que donne l'égalité

$$u_\mu=A_\mu\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{3}}\alpha.^{-\frac{2}{3}}\left(e^{z\sqrt[3]{\alpha}}+e^{\rho z\sqrt[3]{\alpha}}+e^{\rho^2 z\sqrt[3]{\alpha}}\right)d\alpha$$

$$+B_\mu\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{3}}.\alpha^{-\frac{2}{3}}\left(e^{z\sqrt[3]{\alpha}}+\rho^2 e^{\rho z\sqrt[3]{\alpha}}+\rho e^{\rho^2 z\sqrt[3]{\alpha}}\right)d\alpha;$$

ou bien encore celle-ci

$$u_\mu = A_\mu \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{3}} . \alpha^{-\frac{2}{3}} \left( e^{z\sqrt[3]{\alpha}} + 2e^{-\frac{z\sqrt[3]{\alpha}}{2}} . \text{Cos.} \frac{z\sqrt{3}\sqrt[3]{\alpha}}{2} \right) d\alpha$$

$$+ B_\mu \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{3}} . \alpha^{-\frac{2}{3}} \left[ e^{z\sqrt[3]{\alpha}} - e^{-\frac{z\sqrt[3]{\alpha}}{2}} . \left( \text{Cos.} \frac{z\sqrt{3}\sqrt[3]{\alpha}}{2} - \sqrt{3} . \text{Sin.} \frac{z\sqrt{3}\sqrt[3]{\alpha}}{2} \right) \right],$$

qui est l'équivalent de la première, de laquelle elle se déduit en remplaçant $\rho$ et $\rho^2$ respectivement par $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, puis substituant aux exponentiels imaginaires les fonctions circulaires équivalentes.

X. Reprenons présentement l'équation

$$(2) \qquad \frac{d^2 u_\mu}{dx^2} = (p_\mu + q_\mu x) u_\mu ;$$

et rappelons-nous qu'en posant $p_\mu + q_\mu x = z q^{\frac{2}{3}}_\mu$, nous l'avons transformée en

$$(3) \qquad \frac{d^2 u_\mu}{dx^2} = z . u_\mu ;$$

L'intégrale de l'équation (2) est, par conséquent ;

$$u_\mu = A_\mu \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{3}} . \alpha^{-\frac{2}{3}} \left[ e^{\frac{p_\mu + q_\mu x}{q^{\frac{2}{3}}_\mu} \sqrt[3]{\alpha}} + 2e^{-\frac{p_\mu + q_\mu x}{2q^{\frac{2}{3}}_\mu} \sqrt[3]{\alpha}} . \text{Cos.} \frac{p_\mu + q_\mu x}{2q^{\frac{2}{3}}_\mu} \sqrt{3}\sqrt[3]{\alpha} \right] d\alpha$$

$$+ B_\mu \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{3}} . \alpha^{-\frac{2}{3}} \left[ e^{\frac{p_\mu + q_\mu x}{q^{\frac{2}{3}}_\mu} \sqrt[3]{\alpha}} - e^{-\frac{p_\mu + q_\mu x}{2q^{\frac{2}{3}}_\mu} \sqrt[3]{3}} \left( \text{Cos.} \frac{p_\mu + q_\mu x}{2q^{\frac{2}{3}}_\mu} \sqrt{3}\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt{3} \text{Sin.} \frac{p_\mu + q_\mu x}{2q^{\frac{2}{3}}_\mu} \sqrt{3}\sqrt[3]{\alpha} \right) \right] d\alpha ;$$

Cette intégrale résout la question proposée, ou du moins, en vertu de l'art. IV, elle réduit le problème à la résolution de $2n$ équations du premier degré, qui doivent déterminer les constantes arbitraires.

La résolution de ces équations est de la plus grande simplicité. On part des deux secondes

$$u_1 = u_2 \ , \quad \frac{du_1}{dx} = \frac{du_2}{dx} \ , \quad \text{pour} \quad x = \frac{l}{n} \ .$$

Elles contiennent quatre constantes $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$, et servent également à déterminer les deux dernières au moyen des deux premières. Les deux suivantes

$$u_2 = u_3 \ , \quad \frac{du_2}{dx} = \frac{du_3}{dx} \ , \quad \text{pour} \quad x = 2\,\frac{l}{n} \ ,$$

donnent $A_3$, $B_3$ en $A_2$, $B_2$, d'où ensuite en $A_1$, $B_1$, et ainsi des autres jusqu'aux deux avant-dernières

$$u_{n-1} = u_n \ , \quad \frac{du_{n-1}}{dx} = \frac{du_n}{dx} \ , \quad \text{pour} \quad x = (n-1)\frac{l}{n} \ .$$

Celles-ci fournissant $A_n$, $B_n$, on substitue les dernières valeurs dans l'égalité $u_n = \theta'$, pour $x = l$, qui dès lors ne contient plus que $A_1$, $B_1$, et qui, jointe à la première $u_1 = \theta$, pour $x = 0$, fait connaître ces deux constantes dont toutes les autres dépendent.

La question se réduit à trouver $A_{\mu+1}$, $B_{\mu+1}$, en fonction de $A_\mu$, $B_\mu$ par le secours des équations

$$u_\mu = u_{\mu+1} \ ; \quad \frac{du_\mu}{dx} = \frac{du_{\mu+1}}{dx} \ , \quad \text{pour} \quad x = \mu\,\frac{l}{n} \ ;$$

En désignant par $U_\mu$ et $V_\mu$ les deux valeurs particulières de $u_\mu$ obtenues aux art. VII et VIII, on a, comme à l'art. X,

$$u_\mu = A_\mu U_\mu + B_\mu V_\mu \ ,$$

et

$$\frac{du_\mu}{dx} = A_\mu \frac{dU_\mu}{dx} + B_\mu \frac{dV_\mu}{dx} \ ;$$

$$u_{\mu+1} = A_{\mu+1} U_{\mu+1} + B_{\mu+1} V_{\mu+1} \ ;$$

$$\frac{du_{\mu+1}}{dx} = A_{\mu+1} \frac{dU_{\mu+1}}{dx} + B_{\mu+1} \frac{dV_{\mu+1}}{dx} \ .$$

Soit fait $x = \mu \frac{l}{n}$, et nommons

$$(U_\mu) \,,\ (V_\mu) \,,\ \left(\frac{dU_\mu}{dx}\right) ,\ \left(\frac{dV_\mu}{dx}\right) ,\ (U_{\mu+1}) \,,\ (V_{\mu+1}) \,,\ \left(\frac{dU_{\mu+1}}{dx}\right) ,\ \left(\frac{dV_{\mu+1}}{dx}\right) ,$$

les valeurs correspondantes des quantités comprises entre les parenthèses. Les équations de condition seront

$$A_\mu (U_\mu) + B_\mu (V_\mu) = A_{\mu+1} (U_{\mu+1}) + B_{\mu+1} (V_{\mu+1}) \ ,$$

$$A_\mu \left(\frac{dU_\mu}{dx}\right) + B_\mu \left(\frac{dV_\mu}{dx}\right) = A_{\mu+1} \left(\frac{dU_{\mu+1}}{dx}\right) + B_{\mu+1} \left(\frac{dV_{\mu+1}}{dx}\right) .$$

On tire de là les valeurs de $A_{\mu+1}$, $B_{\mu+1}$; en $A_\mu$, $B_\mu$. Le dénominateur commun de ces valeurs est

$$(U_{\mu+1}) \cdot \left(\frac{dV_{\mu+1}}{dx}\right) - (V_{\mu+1}) \left(\frac{dU_{\mu+1}}{dx}\right) .$$

Or, il est remarquable que ce dénominateur est constamment égal à $q^{\frac{1}{2}}_{\mu+1}$. Cela résulte des équations

$$\frac{d^2U_{\mu+1}}{dx^2}=(p_{\mu+1}+q_{\mu+1}x)U_{\mu+1};$$

$$\frac{d^2V_{\mu+1}}{dx^2}=(p_{\mu+1}+q_{\mu+1}x)V_{\mu+1};$$

qui ont lieu par la nature même des quantités $U_{\mu+1}$ : $V_{\mu+1}$ ; et dont on déduit

$$U_{\mu+1}\frac{d^2V_{\mu+1}}{dx^2}-V_{\mu+1}\frac{d^2U_{\mu+1}}{dx^2}=0;$$

Intégrant on a

$$U_{\mu+1}\frac{dV_{\mu+1}}{dx}-V_{\mu+1}\frac{dU_{\mu+1}}{dx}=\text{Const.};$$

Pour déterminer la constante du second membre, on remonte aux valeurs

$$U_{\mu+1}=1+\frac{(p_{\mu+1}+q_{\mu+1}.x)^3}{2.3q^2_{\mu+1}}+\ldots..;$$

$$V_{\mu+1}=\frac{p_{\mu+1}+q_{\mu+1}.x}{q^{\frac{2}{3}}_{\mu+1}}+\ldots...;$$

et l'on voit, sans peine, que l'égalité devant subsister pour toutes les valeurs possibles de

$$\frac{p_{\mu+1}+q_{\mu+1}.x}{q^{\frac{2}{3}}_{\mu+1}},$$

la valeur de la constante est $q^{\frac{1}{2}}_{\mu+1}$. Donc,

$$(U_{\mu+1})\left(\frac{\mathrm{d}V_{\mu+1}}{\mathrm{d}x}\right)-(V_{\mu+1})\left(\frac{\mathrm{d}U_{\mu+1}}{\mathrm{d}x}\right)=q^{\frac{1}{2}}_{\mu+1}\,;$$

ce qu'il fallait prouver.

XI. La même analyse s'étendrait au cas où les extrémités de la barre, au lieu d'être entretenues à des températures constantes, rayonneraient librement dans l'espace. Elle réduirait, comme tout à l'heure, les difficultés du problème à celle de résoudre $2n$ équations du premier degré. Elle s'étendrait également à la détermination du mouvement de la chaleur dans une armille ; problème qui, dans le fond, ne diffère pas de celui que nous venons de résoudre. La réduction des formules en nombres sera facile, dans tous les cas, ce qui est le caractère essentiel d'une méthode pratique. Soit, pour en donner un exemple, AB$=l=2$ mètres ; la valeur de $\frac{\varepsilon f(x)}{K\omega}$, aux extrémités de la barre, représentée par 1, et à son milieu par 0. Enfin que les points A, B soient entretenus à des températures constantes de 10°.

De $x=0$ à $x=1$, on a $p_\mu=1$, $q_\mu=-1$, et, par suite,

$$\frac{p_\mu+q_\mu x}{q^{\frac{2}{3}}_\mu}=z=1-x\,.$$

De $x=1$ à $x=2$, on a, au contraire, $\frac{p_\mu+q_\mu x}{q^{\frac{2}{3}}_\mu}=z=x-1\,;$

Substituant ces valeurs dans nos formules, pour en déduire les températures $u$ et les flux de chaleur aux divers points de la barre, on formera le tableau suivant :

$$x=0^{m},00\ ,\quad u=10^{\circ},00\ ,\quad \frac{du}{dx}=-0,53\ ;$$

$$x=0,25\ ,\quad u=9,13\ ,\quad \frac{du}{dx}=-0,24\ ;$$

$$x=0,50\ ,\quad u=8,71\ ,\quad \frac{du}{dx}=-0,12\ ;$$

$$x=0,75\ ,\quad u=8,56\ ,\quad \frac{du}{dx}=-0,03\ ;$$

$$x=1,00\ ,\quad u=8,53\ ,\quad \frac{du}{dx}=\mp 0,00\ ;$$

$$x=1,25\ ,\quad u=8,56\ ,\quad \frac{du}{dx}=+0,03\ ;$$

$$x=1,50\ ,\quad u=8,71\ ,\quad \frac{du}{dx}=+0,12\ ;$$

$$x=1,75\ ,\quad u=9,13\ ,\quad \frac{du}{dx}=+0,24\ ;$$

$$x=2,00\ ,\quad u=10,00\ ,\quad \frac{du}{dx}=+0,53\ ;$$

La formule générale est

$$u=\frac{10.u_x}{1,172}\ ;$$

dans laquelle

$$u_x = 1 + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^6}{2.3.5.6} + \ldots\ldots ;$$

$z$ étant égal à $1-x$ de $x=0$ à $x=1$, et à $x-1$ de $x=1$ à $x=2$.

XII. Il n'entre pas dans notre plan de nous étendre davantage sur ces détails qui ne présentent aucune difficulté ; mais nous croyons devoir placer ici l'exposé rapide de quelques réflexions analytiques propres à éclaircir ce qui précède. Les développemens dans lesquels on vient d'entrer donnent, en résumé, une méthode générale pour intégrer, par approximation, l'équation linéaire du second ordre. L'approximation est poussée aussi loin qu'on veut. En augmentant à volonté le nombre des équations du premier degré, auxquelles se ramène la détermination des constantes, on s'approche indéfiniment de la valeur exacte cherchée. Une telle méthode paraît suffisante, dans l'état actuel de l'analyse, vu la difficulté de résoudre exactement la question.

Si l'on veut toutefois, on peut la traiter d'une manière plus directe. En considérant l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\varepsilon.f(x)}{K\varpi} u ;$$

on obtient, sans difficulté, une suite infinie qui y satisfait, et dont la convergence peut être prouvée dans le cas du problème qui nous occupe. Je compose la valeur de $u$ d'une suite de termes $u_0$, $u_1$, $u_2$, ...... qui seront déterminés plus tard.

Ainsi je fais

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots.$$

Les quantités $u_0$, $u_1$, $u_2$, ....... devront être telles qu'on ait

$$\frac{d^2u_0}{dx^2}+\frac{d^2u_1}{dx^2}+\frac{d^2u_2}{dx^2}+\ldots\ldots=\frac{\varepsilon\,f(x)}{K\omega}(u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots)\;;$$

or, cette équation est satisfaite si l'on pose, ce qui est permis,

$$\frac{d^2u_0}{dx^2}=0\;,\quad \frac{d^2u_1}{dx^2}=\frac{\varepsilon f(x)}{K\omega}u_0\;,\quad \frac{d^2u_2}{dx^2}=\frac{\varepsilon f(x)}{K\omega}u_1\;,\quad \ldots\ldots\;;$$

d'où on tire, en nommant $A$, $B$, deux constantes arbitraires

$$u_0=A+Bx\;;$$

$$u_1=\int_0^x dx\int_0^x (A+Bx)\frac{\varepsilon}{K\omega}f(x)dx\;;$$

$$u_2=\int_0^x dx\int_0^x f(x)dx\int_0^x dx\int_0^x (A+Bx)\frac{\varepsilon^2}{K^2\omega^2}f(x)dx\;;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;;$$

La somme de ces quantités sera la valeur de $u$ et l'intégrale l'équation proposée si toutefois la suite infinie, fournie par cette somme, est une suite convergente; circonstance dont il est facile de s'assurer, comme on va le voir. On considère séparément les deux séries

$$A\left\{1+\frac{\varepsilon}{K\omega}\int_0^x dx\int_0^x f(x)dx+\frac{\varepsilon^2}{K^2\omega^2}\int_0^x dx\int_0^x f(x)dx\int_0^x dx\int_0^x f(x)dx+\ldots\right\};$$

$$B\left\{x+\frac{\varepsilon}{K\omega}\int_0^x dx\int_0^x xf(x)dx+\frac{\varepsilon^2}{K^2\omega^2}\int_0^x dx\int_0^x f(x)dx\int_0^x dx\int_0^x xf(x)dx+\ldots\right\};$$

qui répondent aux deux constantes arbitraires. La fonction $f(x)$ représente (entre les limites $x=0$, $x=l$) le pouvoir rayonnant de la surface de la barre. C'est une quantité essentiellement positive, qui, pour une ou plusieurs valeurs de $x$, peut être nulle, mais jamais infinie. Sa plus grande valeur correspond à un point quelconque de la barre ; c'est une quantité finie positive $M$ qui, substituée à la place de $f(x)$, dans chacun des termes des deux séries précédentes, donnera nécessairement des valeurs plus grandes que celles de ces mêmes termes.

Or, en faisant $f(x)=M$, les deux suites en question deviennent

$$A\left\{1+\frac{\varepsilon}{K\omega}\cdot\frac{Mx^2}{1.2}+\frac{\varepsilon^2}{K^2\omega^2}\cdot\frac{M^2x^4}{1.2.3.4}+\ldots\ldots\right\};$$

$$B\left\{x+\frac{\varepsilon}{K\omega}\cdot\frac{Mx^3}{1.2.3}+\frac{\varepsilon^2}{K^2\omega^2}\cdot\frac{M^2x^5}{1.2.3.4.5}+\ldots\ldots\right\}.$$

Ces deux suites sont évidemment convergentes. En s'arrêtant à des termes de plus en plus éloignés, les restes nécessaires pour en compléter la valeur décroissent rapidement. Donc, *à fortiori*, cela a lieu pour les deux suites qui composent la valeur de $u$. On trouverait même aisément le moyen de calculer le degré d'approximation qu'on obtiendrait, en s'arrêtant à un terme désigné.

Au reste, il n'est pas nécessaire que $f(x)$ soit toujours une quantité positive de $x=0$ à $x=l$ ; $f(x)$ peut avoir des valeurs tantôt positives et tantôt négatives ; il suffit que jamais ces valeurs ne soient infinies. Alors, dans l'analyse qui précède, on appelle $M$ la plus grande d'entre elles, abstraction faite du signe. Le raisonnement portera uniquement sur les nombres et sera également rigoureux. Ainsi donc, toutes les fois qu'entre des limites fixes, la fonction connue $f(x)$ ne passera point par l'infini, quelle qu'en soit d'ailleurs la nature, l'intégrale de l'équation $\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{\varepsilon f(x)}{K\omega}$.

$u$ sera exprimable en série, comme nous venons de le voir. Nous insistons sur ce point sur lequel il nous sera utile de nous appuyer, lorsqu'il s'agira du mouvement varié.

XIII. Reprenons la valeur de $u$ composée des deux séries

$$A\left\{1+\frac{\varepsilon}{K\omega}\int_0^x dx\int_0^x f(x)dx+\frac{\varepsilon^2}{K^2\omega^2}\int_0^x dx\int_0^x f(x)dx\int_0^x dx\int_0^x f(x)dx+\ldots\ldots\right\},$$

$$B\left\{x+\frac{\varepsilon}{K\omega}\int_0^x dx\int_0^x xf(x)dx+\frac{\varepsilon^2}{K^2\omega^2}\int_0^x dx\int_0^x f(x)dx\int_0^x dx\int_0^x xf(x)dx+\ldots\ldots\right\}.$$

Elle convergera d'autant plus rapidemment vers sa limite, que le rayon de la barre sera plus grand ainsi que sa conductibilité. Elle représentera exactement toutes les circonstances du mouvement linéaire permanent de la chaleur. Supposons, par exemple, que la température soit nulle à l'extrémité de la barre ou pour $x=0$, et l'unité pour $x=l$; la constante $A$ sera nulle et la constante $B$ aura pour valeur

$$B=\frac{1}{l+\frac{\varepsilon}{K\omega}\int_0^l dx\int_0^x xf(x)dx+\frac{\varepsilon^2}{K^2\omega^2}\int_0^l dx\int_0^x dx f(x)\int_0^x dx\int_0^x xf(x)dx+\ldots\ldots};$$

d'où résulte

$$u=\frac{x+\frac{\varepsilon}{K\omega}\int_0^x dx\int_0^x xf(x)dx+\frac{\varepsilon^2}{K^2\omega^2}\int_0^x dx\int_0^x f(x)dx\int_0^x dx\int_0^x xf(x)dx+\ldots\ldots}{l+\frac{\varepsilon}{K\omega}\int_0^l dx\int_0^x xf(x)dx+\frac{\varepsilon^2}{K^2\omega^2}\int_0^l dx\int_0^x f(x)dx\int_0^x dx\int_0^x xf(x)dx+\ldots\ldots}.$$

Admettons que, du point A au point B, la fonction f$(x)$ soit toujours croissante ; on voit que la température partira de 0°, pour arriver à la valeur 1°, au-dessous de laquelle elle restera toujours dans l'intervalle de $x=0$ à $x=l$. Cette valeur croîtra, dans les premiers instans, proportionnellement à l'abscisse, c'est-à-dire, comme les ordonnées d'une droite ; ensuite comme les ordonnées d'une courbe parabolique d'un ordre indéfini. Les accroissemens de température, d'abord très-petite, seront d'autant plus sensibles, qu'on s'approchera davantage de la limite B. On pourrait aisément en calculer les expressions numériques, comme nous l'avons fait voir sur un autre exemple. Les résultats compris de l'art. II à l'art. XI sont de notre mémoire de 1829 ; ceux des art. XII et XIII n'ont été présentés à l'Institut qu'en 1830 ; il en est de même des suivans.

XIV. Nous nous occuperons présentement du mouvement varié de la chaleur, dans une barre homogène inégalement polie.

Nous avons une barre AB, dont les extrémités A et B sont constamment aux températures $\theta$ et $\theta'$. Cette barre est placée dans un milieu entretenu à 0°. On désigne par $c$ la chaleur spécifique, par $k$ la conductibilité, l'une et l'autre regardées comme invariables ; $\omega$ est l'aire et $\varepsilon$ le contour de la section, supposée partout la même. Le coefficient $\gamma$ représente le pouvoir rayonnant, dont la valeur est une fonction quelconque de l'abscisse, à cause de l'inégalité du poli des différens points du métal.

En un point quelconque $m$, dont la distance à l'origine O est représentée par $x$, la température $u$ est représentée par l'équation

$$c\omega\frac{du}{dt}=K\omega\frac{d^2u}{dx^2}-\gamma\varepsilon u\ ,$$

que je prends dans le premier mémoire de M. Poisson, sur la chaleur. Divisant les deux membres par $c\omega$, on a

$$\frac{du}{dt}=\frac{K}{c}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{\gamma\varepsilon}{c\omega}u\,.$$

Le coefficient $\frac{k}{c}$ dépend tout à la fois de la chaleur spécifique de la barre et de sa conductibilité. C'est un nombre donné $a^2$. La quantité $\frac{\gamma\varepsilon}{c\omega}$ est au contraire variable avec l'abscisse $x$, et c'est par la fonction $f(x)$ que nous la supposerons représentée. L'équation du problème devient ainsi

$$\text{(a)} \qquad \frac{du}{dt} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2} - uf(x) \ .$$

Cette équation étant intégrée, les arbitraires que contiendra son intégrale se détermineront par ces conditions : 1.° que les températures soient constamment $\theta$, $\theta'$ aux extrémités de la barre. Soient $OA=l$, $OB=l'$, et l'on aura ces deux équations définies : $u=\theta$ pour $x=l$, et $u=\theta'$ pour $x=l'$ ; 2.° que, pour $t=0$, à l'origine des temps, les températures de $x=l$ à $x=l'$ soient données par une fonction $F(x)$ connue entre ces limites.

Pour intégrer l'équation (a), je fais usage de la méthode qui consiste à former l'intégrale complète d'un nombre infini d'intégrales particulières. Je développe en série la valeur de $u$, suivant les puissances de l'exponentielle $e^{-t}$, et nommant $u_0$, $u_1$, $u_2$, ....... $u_n$, ...... des fonctions de $x$ qui seront ci-après déterminées, je pose

$$u = u_0 + u_1 e^{-m_1 t} + u_2 e^{-m_2 t} + u_3 e^{-m_3 t} + \ldots\ldots + u_n e^{-m_n t} + \ldots\ldots ;$$

ou, par abréviation,

$$u = \Sigma u_m e^{-mt} \ .$$

Il vient, en différentiant cette valeur de $u$, par rapport à $t$, et ensuite par rapport à $x$,

$$\frac{du}{dt} = -\Sigma u_m . m e^{-mt} \ , \qquad \frac{d^2u}{dx^2} = \Sigma e^{-mt} . \frac{d^2 u_m}{dx^2} \ ;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (a), on obtient cette égalité

$$-\Sigma m u_m e^{-mt} = a^2 \Sigma e^{-mt} \frac{d^2 u_m}{dx^2} - f(x) \Sigma u_m e^{-mt} ,$$

qui, devant être satisfaite quel que soit $t$, donne cette équation générale

$$\text{(b)} \qquad -m u_m = a^2 \frac{d^2 u_m}{dx^2} - u_m f(x) ;$$

pour déterminer $u_m$, et, par suite, $u_0$, $u_1$, $u_2$, ....., lorsqu'on connaîtra les valeurs de $m$.

L'équation (b) est une équation linéaire du second ordre, de même forme que celle qui a été étudiée dans la question du mouvement permanent. Son intégrale, qui comprend deux constantes arbitraires, peut s'obtenir dans tous les cas, au moins par approximation. Je nommerai $\varphi(x, m)$, $\psi(x, m)$ deux intégrales particulières qui y satisfassent; $A_m$, $B_m$ deux constantes arbitraires. La valeur de $u_m$ s'écrira ainsi:

$$u_m = A_m \varphi(x, m) + B_m \psi(x, m) ;$$

et l'on aura, pour la valeur de $u$,

$$u = \Sigma \{ A_m \varphi(x, m) + B_m \psi(x, m) \} e^{-mt} ;$$

XV. Les diverses valeurs de $m$ se déduisent des deux équations définies

$$u = \theta , \quad \text{pour} \quad x = l ,$$

$$u = \theta' , \quad \text{pour} \quad x = l' ,$$

déjà indiquées dans le précédent article. En effet, elles reviennent à

$$\Sigma \{ A_m \varphi(l, m) + B_m \psi(l, m) \} e^{-mt} = 0 ,$$

$$\Sigma \{ A_m \varphi(l', m) + B_m \psi(l', m) \} e^{-mt} = 0 .$$

Elles doivent subsister pour toute valeur positive de $t$; d'où on conclut sans peine qu'une des valeurs de l'exposant $m$ doit être zéro, et qu'à cet exposant répondent les deux équations

$$A_0\varphi(l,0)+B_0\psi(l,0)=\theta \;, \qquad A_0\varphi(l',0)+B_0\psi(l',0)=\theta' \;,$$

qui donnent aisément

$$A_0=\frac{\theta\psi(l',0)-\theta'\psi(l,0)}{\varphi(l,0)\psi(l',0)-\varphi(l',0)\psi(l,0)} \;, \qquad B_0=\frac{\theta'\varphi(l,0)-\theta\varphi(l',0)}{\varphi(l,0)\psi(l',0)-\varphi(l',0)\psi(l,0)} \;;$$

et déterminent complètement le premier terme $u_0$ de la valeur de $u$, lequel représente le mouvement de la chaleur dans une barre parvenue à un état permanent. Toutes les autres valeurs de $m$ sont données par les équations

$$A_m\varphi(l,m)+B_m\psi(l,m)=0 \;, \qquad A_m\varphi(l',m)+B_m\psi(l',m)=0 \;.$$

Éliminant $A_m$ et $B_m$, il vient:

$$\text{(c)} \qquad \varphi(l,m)\psi(l',m)-\varphi(l',m)\psi(l,m)=0 \;;$$

égalité où tout est connu, excepté $m$, et qui détermine (en y joignant la valeur de $m=0$) toutes les valeurs dont cette variable est susceptible. Une des quantités $A_m$, $B_m$ est donnée de plus en fonction de l'autre. La valeur $B_m$ est, par exemple, $-A_m\dfrac{\varphi(l,m)}{\psi(l,m)}$; et, si l'on substitue cette expression dans la valeur de $u$, on trouve

$$u=u_0+\Sigma A_m.\,\frac{\varphi(x,m)\psi(l,m)-\psi(x,m)\varphi(l,m)}{\psi(l,m)} \;;$$

le temps $t$ étant arbitraire.

XVI. Que l'on fasse à présent $t=0$, $u$ deviendra $F(x)$; représentant donc par $\Phi(x)$ la différence $F(x)-u_0$ également connue, on devra satisfaire à l'égalité

$$\text{(d)} \qquad \Phi(x)=\Sigma\,\frac{A_m}{\psi(l,m)}\{\varphi(x,m)\psi(l,m)-\psi(x,m)\varphi(l,m)\} \;,$$

qui pourtant ne subsistera qu'entre les limites $x=l$ et $x=l'$.

La fonction $\Phi(x)$ peut être discontinue. La possibilité de la développer en une série semblable à celle du second membre ne saurait être révoquée en doute ; sans cela le problème du mouvement de la chaleur, dans une barre inégalement polie, serait inaccessible à l'analyse. L'équation (d) résulte de raisonnemens rigoureux ; et il ne reste plus qu'à déterminer convenablement la valeur de $A_m$. Or, sa détermination repose sur ce que la quantité $\varphi(x,m)\psi(l,m)-\psi(x,m)\varphi(l,m)$, que je représente par $V_m$, doit satisfaire à l'équation (b), en sorte qu'on a

$$-mV_m=a^2\frac{d^2V_m}{dx^2}-V_m f(x) .$$

Soit, en effet, $m'$ une seconde valeur de $m$, et l'on aura également

$$-m'V_{m'}=a^2\frac{d^2V_{m'}}{dx^2}-V_{m'}f(x) .$$

Eliminant donc $f(x)$ entre ces deux équations, on trouvera

$$(m-m')V_mV_{m'}=a^2\left(V_m\frac{d^2V_{m'}}{dx^2}-V_{m'}\frac{d^2V_m}{dx^2}\right) ;$$

d'où, intégrant par rapport à $x$ et divisant par $m-m'$,

$$\int V_mV_{m'}dx=\frac{a^2}{m-m'}\left(V_m\frac{dV_{m'}}{dx}-V_{m'}\frac{dV_m}{dx}\right)+\text{Const.}$$

Or, si l'on prend cette intégrale depuis $x=l$ jusqu'à $x=l'$, le second membre sera nul, tant que la différence $m-m'$ ne le sera pas ; ce qui résulte de ce que, à ces limites, les quantités $V_m$, $V_{m'}$ sont nulles elles-mêmes. En effet, on a, pour $x=l$

$$V_m=\varphi(l,m)\psi(l,m)-\psi(l,m)\varphi(l,m)=0 ,$$

$$V_{m'}=\varphi(l,m')\psi(l,m')-\psi(l,m')\varphi(l,m')=0 ;$$

et pour $x=l'$,

$$V_m = \varphi(l', m)\psi(l', m) - \psi(l', m)\varphi(l', m) = 0 \; ;$$

$$V_{m'} = \varphi(l', m')\psi(l', m') - \psi(l', m')\varphi(l', m') = 0 \; ,$$

en vertu de l'équation (c) qui détermine les valeurs de $m$ et de $m'$. Ainsi l'on a $\int_l^{l'} V_m V_{m'} dx = 0$, lorsque les racines $m$ et $m'$ diffèrent entre elles. Mais si $m = m'$, le second membre se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. Sa vraie valeur est alors une quantité finie bien facile à trouver directement ou à déterminer par les règles ordinaires. On différentie, par rapport à $m$, le numérateur

$$a^2 \left( V_m \frac{dV_{m'}}{dx^2} - V_{m'} \frac{dV_m}{dx^2} \right) ,$$

puis le dénominateur $m - m'$. Ce dernier donne l'unité pour résultat ; le premier conduit à

$$a^2 \left( \frac{dV_m}{dm} \cdot \frac{dV_{m'}}{dx} - V_{m'} \frac{d^2 V_m}{dx dm} \right) .$$

$V_{m'}$ est nul aux deux limites $x = l$, $x = l'$. Soit donc représenté par $H$, $H'$ la quantité $a^2 \frac{dV_m}{dm} \frac{dV_{m'}}{dx}$ à ces valeurs extrêmes, et c'est la différence $H' - H = v_m$ qui sera le nombre cherché. Ainsi l'on aura

$$\int_l^{l'} V^2_m dx = v_m \, .$$

XVII. Revenons présentement à l'équation (d), c'est-à-dire à l'équation

$$\Phi(x) = \Sigma \frac{A_m}{\psi(l, m)} \{ \varphi(x, m)\psi(l, m) - \psi(x, m)\varphi(l, m) \} \, .$$

J'y change $x$ en $\alpha$, ce qui est permis ; je multiplie ces deux membres par

$$\{\varphi(\alpha, m)\psi(l, m) - \psi(\alpha, m)\varphi(l, m)\}d\alpha\ ;$$

et j'intègre ensuite entre les limites $\alpha = l$, $\alpha = l'$. Le premier membre devient égal à une intégrale définie

$$\int_l^{l'} \{\varphi(\alpha, m)\psi(l, m) - \psi(\alpha, m)\varphi(l, m)\}\Phi(\alpha)d\alpha\ .$$

Le second membre, en vertu des principes de l'art. XVI, se réduit à un seul terme, savoir : $\frac{A_m v_m}{\psi(l, m)}$ ; en sorte que

$$A_m = \frac{\psi(l, m)}{v_m} \int_l^{l'} \{\varphi(\alpha, m)\psi(l, m) - \psi(\alpha, m)\varphi(l, m)\}\Phi(\alpha)d\alpha\ ;$$

et l'équation suivante :

$$u = u_0 + \Sigma \frac{e^{-mt}}{v_m} \{\varphi(x,m)\psi(l,m) - \psi(x,m)\varphi(l,m)\} \int_l^{l'} \{\varphi(\alpha,m)\psi(l,m) - \psi(\alpha,m)\varphi(l,m)\}\Phi(\alpha)d\alpha$$

ne contenant plus que des quantités connues, donne la valeur de $u$, pour un instant quelconque, en tel point qu'on veut de la barre, et résout, dans toute sa généralité le problème qui nous occupe. Cette valeur est composée de deux parties ; la première indépendante du temps, représente l'état permanent auquel la barre arrive enfin ; la seconde, dépendante à la fois du point et de l'instant que l'on considère, et tendant vers zéro à mesure que le temps augmente, répond à l'état variable. Ainsi, il y a dans la barre deux flux de chaleur bien distincts, qui suivent des lois différentes et qui, d'après leurs signes, s'ajoutent ou se retranchent pour former le flux total.

Lorsque la valeur de $t$ est devenue très-considérable, l'exponentielle $e^{-mt}$ est très-petite ; et si l'on considère les quantités $e^{-m_1 t}$, $e^{-m_2 t}$, ........, qu'on déduit de la première par les hypothèses $m = m_1$, $m = m_2$, ......., on voit qu'elles décroissent très rapidement à mesure que $m$ augmente. On peut donc, à une certaine époque, se borner à la première exponentielle, dans la valeur de $u$. On obtient alors

$$u=u_0+\frac{e^{-m_1 t}}{\rho_{m_1}}\left\{\varphi(x,m_1)\psi(l,m_1)-\psi(x,m_1)\varphi(l,m_1)\right\}\int_l^{l'}\left\{\varphi(\alpha,m_1)\psi(l,m_1)-\psi(\alpha,m_1)\varphi(l,m_1)\right\}\Phi(\alpha)d\alpha.$$

Dans cet état de la barre, qui précède immédiatement l'état permanent, les différences $u-u_0$ décroissent avec le temps, comme les termes d'une progression géométrique, ce qui est une propriété générale des lois du refroidissement.

XVIII. Si la barre est limitée dans les deux sens, les deux longueurs $l$ et $l'$ sont représentées par des nombres donnés. Si elle s'étend à l'infini du côté B, on a $l'=\infty$. Enfin on doit poser $l=-\infty$, $l'=+\infty$, dans l'hypothèse où la ligne AB est indéfinie dans les deux sens. C'est afin de pouvoir comprendre ce dernier cas dans notre formule que nous avons pris l'origine O des abscisses dans une position tout à fait arbitraire, par rapport aux points A et B; mais, en particularisant le lieu du point O, il est possible de simplifier beaucoup les calculs que nous avons indiqués dans les précédens articles. Cela est surtout utile pour la démonstration de divers théorèmes qui complètent la solution que nous avons donnée du problème qui fait le sujet de cet écrit, et qu'à la rigueur on peut regarder comme indispensables.

Nous ferons voir 1.° que l'équation d'où résultent les valeurs de $m$ a toutes ses racines réelles et positives; 2.° nous prouverons que la série qui forme la valeur de $u$ est une série convergente, ce qui est nécessaire pour compléter la solution.

Les démonstrations de ces deux principes se déduisent de la méthode que nous avons exposée aux articles XII et XIII, pour l'intégration de l'équation linéaire du second ordre. Elles sont très-propres à faire connaître les avantages de ce procédé que nous avons omis dans le mémoire présenté, en 1829, à l'Académie des sciences.

XIX. Nous supposons qu'on a fait coïncider l'origine O avec l'extrémité A de la barre. La longueur $l$ sera alors nulle, et la longueur AB deviendra $l'$. L'équation indéfinie sera toujours

$$\frac{du}{dt}=a^2\frac{d^2u}{dx^2}-uf(x)\ .$$

En posant

$$u=\Sigma u_m e^{-mt}\ ;$$

$u_m$ satisfera toujours à l'équation

$$-mu_m=a^2\frac{d^2u_m}{dx^2}-u_m f(x)\ ;$$

On représentera encore par $\varphi(x,m)$, $\psi(x,m)$ deux intégrales particulières, en sorte que

$$u_m=A_m\varphi(x,m)+B_m\psi(x,m)\ ;$$

puis on aura

$$u=\Sigma e^{-mt}.\{A_m\varphi(x,m)+B_m\psi(x,m)\}\ .$$

Observons présentement que l'équation qui donne $u_m$ peut se mettre sous cette forme

$$\frac{d^2u_m}{dx^2}=u_m.\frac{f(x)-m}{a^2}\ ;$$

et, par les principes de l'art. XII, on pourra poser

$$\varphi(x,m)=1+\frac{1}{a^2}\int_0^x dx\int_0^x[f(x)-m]dx+\frac{1}{a^4}\int_0^x dx\int_0^x[f(x)-m]dx\int_0^x dx\int_0^x[f(x)-m]dx+\ldots\ldots\ ;$$

$$\psi(x,m)=x+\frac{1}{a^2}\int_0^x dx\int_0^x x[f(x)-m]dx+\frac{1}{a^4}\int_0^x dx\int_0^x[f(x)-m]dx\int_0^x dx\int_0^x x[f(x)-m]dx+\ldots\ldots\ .$$

Prenant alors les équations définies, $u=\theta$, pour $x=l=0$; $u=\theta'$, pour $x=l'$; elles donnent

$$\Sigma e^{-mt}.\{A_m\varphi(0,m)+B_m\psi(0,m)\}=\theta,\quad \Sigma e^{-mt}\{A_m\varphi(l',m)+B_m\psi(l',m)\}=\theta'.$$

Or, on a

$$\varphi(0,m)=1\ ,\quad \psi(0,m)=0\ ;$$

les équations précédentes se réduisent donc à

$$\Sigma e^{-mt}.A_m=\theta\ ,\quad \Sigma e^{-mt}.\{A_m\varphi(l',m)+B_m\psi(l',m)\}=\theta'\ ;$$

Elles doivent subsister quel que soit $t$, en sorte qu'il y a une valeur de $m$ égale à zéro, à laquelle répondent les coefficiens

$$A_0=\theta\ ,\quad B_0=\frac{\theta'-\theta\varphi(l',0)}{\psi(l',0)}\ ;$$

ce qui détermine complètement le premier terme $u_0$ de la température. Les autres valeurs de $m$ sont en nombre infini. A ces valeurs répondent les égalités

$$A_m=0\ ,\quad A_m\varphi(l',m)+B_m\psi(l',m)=0\ ;$$

lesquelles se réduisent à $\psi(l',m)=0$. Ainsi donc c'est l'équation $\psi(l',m)=0$, ou

$$l'+\frac{1}{a^2}\int_0^{l'}\mathrm{d}x\int_0^x[\mathrm{f}(x)-m]x\mathrm{d}x+\frac{1}{a^4}\int_0^{l'}\mathrm{d}x\int_0^x[\mathrm{f}(x)-m]\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}x\int_0^x[\mathrm{f}(x)-m]x\mathrm{d}x+\ldots\ldots=0\ ,$$

qui détermine tous les nombres que $m$ représente. C'est cette équation qu'il faut discuter et dont il s'agit de trouver les racines.

XX. Je poserai

$$y=l'+\frac{1}{a^2}\int_0^{l'}\mathrm{d}x\int_0^x[\mathrm{f}(x)-m]x\mathrm{d}x+\frac{1}{a^4}\int_0^{l'}\mathrm{d}x\int_0^x[\mathrm{f}(x)-m]\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}x\int_0^x[\mathrm{f}(x)-m]x\mathrm{d}x+\ldots$$

Je construirai la courbe représentée par cette égalité, où $m$ est l'abscisse et $y$ l'ordonnée. Cette courbe coupera l'axe des $m$ en un nombre infini de points, pour lesquels on aura $y=0$. C'est à ces points que répondent les valeurs que nous voulons considérer.

Or, la fonction $\mathrm{f}(x)$ est donnée de $x=0$ à $x=l'$. C'est une quantité toujours positive, dont la plus grande et la plus petite valeurs sont des nombres finis $M$, $N$. Ainsi la quantité $m$ croissant, à partir de zéro, finira par dépasser $\mathrm{f}(x)$. A cette époque, les divers termes de la valeur de $y$, qui d'abord étaient tous positifs, deviendront alternativement positifs et négatifs. Il en sera de même de l'ordonnée $y$; et c'est ainsi que l'équation $y=0$ possède un nombre infini de racines réelles. Voyons de quelle manière ces diverses quantités dépendent de $m$, et comment elles croissent et décroissent avec cette abscisse.

Par un choix convenable d'unités, on peut toujours faire en sorte que $l'=1$ et $a^2=1$. Nous adopterons ces valeurs qui simplifient un peu les raisonnemens. Maintenant observons que $y$ ne peut être nul, tant que $\mathrm{f}(x)-m$ est positif. Prenons donc $m>\mathrm{f}(x)$, et voyons ce qui résulte de cette hypothèse. Nous poserons

$$p_0=1\ ,$$

$$p_1=-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x x[\mathrm{f}(x)-m]\mathrm{d}x\ ,$$

$$p_2=+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x[\mathrm{f}(x)-m]\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}x\int_0^x x[\mathrm{f}(x)-m]\mathrm{d}x\ ,$$

$$p_3=-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x[\mathrm{f}(x)-m]\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}x\int_0^x[\mathrm{f}(x)-m]\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}x\int_0^x x[\mathrm{f}(x)-m]\mathrm{d}x\ ,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . , on aura, par suite :

$$y=p_0-p_1+p_2-p_3+\ldots\ldots;$$

Si la valeur moyenne de $m-\mathrm{f}(x)$ est au-dessous de l'unité, les termes $p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots$ tendent à diminuer, à mesure que l'indice augmente, 1.° à cause de l'introduction du nouveau facteur $m-\mathrm{f}(x)$ ; 2.° à cause de la double intégration ajoutée en passant de l'un quelconque d'entre eux au suivant. En adoptant donc cette hypothèse, on a

$$p_1<p_0\ ,\quad p_3<p_2\ ,\quad p_5<p_4\ ;\ \ldots\ldots;$$

et par conséquent $y>0$.

Soit à présent $m-\mathrm{f}(x)$ supérieur à l'unité. L'introduction du facteur $m-\mathrm{f}(x)$ d'un terme $p_n$ au suivant $p_{n+1}$ tend à augmenter ce dernier que la double intégration diminue ; et, comme l'effet de cette diminution se produit d'autant mieux que $n$ est plus grand, on voit que les nombres successifs $p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots$ iront d'abord croissant avec les indices, atteindront un maximum puis décroîtront indéfiniment.

Cette idée a besoin d'être développée. On en sent sur-le-champ la justesse en regardant la fonction $\mathrm{f}(x)$ comme une constante égale à $P$ ; car on a, dans cette hypothèse,

$$p_0=1\ ,\quad p_1=\frac{m-P}{1.2.3}\ ,\quad p_2=\frac{(m-P)^2}{1.2.3.4.5}\ ,\quad p_3=\frac{(m-P)^3}{1.2.3.4.5.6.7}\ ,\ \ldots;$$

Et les rapports

$$\frac{p_1}{p_0}\ ,\quad \frac{p_2}{p_1}\ ,\quad \frac{p_3}{p_2}\ ,\quad \frac{p_4}{p_3}\ ,\ \ldots\ldots$$

sont

$$\frac{m-P}{2.3}\ ,\quad \frac{m-P}{4.5}\ ,\quad \frac{m-P}{6.7}\ ,\quad \frac{m-P}{8.9}\ ,\ \ldots\ldots;$$

Pour toutes ces fractions, le numérateur est invariable ; le dénominateur va croissant avec rapidité et finit par lui devenir égal ou supérieur. Donc aussi les termes $p_0$, $p_1$, $p_2$, $p_3$, ......, quel que soit $m-P$, ne pourront pas toujours croître avec leurs indices. Ils atteindront un maximum, puis décroîtront, l'indice continuant à augmenter. Le maximum sera seulement d'autant plus éloigné de $p_0$ que $m-P$ sera un nombre plus considérable.

Ce que nous venons d'expliquer, en supposant $\mathrm{f}(x)=P$, est évidemment général. Cela compris, on conçoit déjà comment la valeur de $y$ peut être alternativement positive et négative, et par conséquent nulle.

XXI. Si $\mathrm{f}(x)$ était constant, qu'on eût $\mathrm{f}(x)=P$, les valeurs successives de $p_0$, $p_1$, $p_2$, $p_3$, ...... seraient celles que nous venons d'écrire, et l'on obtiendrait

$$y'=1-\frac{m-P}{1.2.3}+\frac{(m-P)^2}{1.2.3.4.5}-\frac{(m-P)^3}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots\ldots$$

Multipliant et divisant le second membre par $\sqrt{m-P}$, puis observant que $m-P$ est égal à $(\sqrt{m-P})^2$, on a

$$y'=\frac{1}{\sqrt{m-P}}\left\{\frac{\sqrt{m-P}}{1}-\frac{(\sqrt{m-P})^3}{1.2.3}+\frac{(\sqrt{m-P})^5}{1.2.3.4.5}-\ldots\ldots\right\}.$$

Ainsi

$$y'=\frac{\mathrm{Sin}.\sqrt{n.-P}}{\sqrt{m-P}}.$$

Or, par la décomposition du sinus en une infinité de facteurs, on sait que l'équation $\mathrm{Sin}.\sqrt{m-P}=0$ a toutes ses racines réelles et positives. Ces racines sont données par l'égalité $m=P+n^2\varpi^2$, dans laquelle $\varpi$ est, à l'ordinaire, le rapport de la circonférence au diamètre, et $n$ un nombre entier qui peut prendre toutes les valeurs de $n=0$ à $n=\infty$. Donc aussi l'équation $y'=0$ a toutes ses racines réelles, positives et fournies par la formule $m=P+n^2\varpi^2$, dans laquelle on doit faire varier le nombre entier $n$ depuis $n=1$ jusqu'à $n=\infty$. La valeur de $n=0$ ne répond plus alors à $y'=0$; mais à $y'=1$.

Quand $f(x)$ n'est pas un nombre donné, mais une fonction variable, entre les limites $M$ et $N$, on conçoit une valeur moyenne représentée par $P_m$ et telle que, si l'on pose $f(x)=P_m$, on trouvera exactement la valeur de $y$. En adoptant cette idée, on obtient

$$y=1-\frac{(m-P_m)}{1.2\,3}+\frac{(m-P_m)^3}{1.2.3.4.5}-\frac{(m-P_m)^5}{1.2.3.4\,5.6\,7}+\ldots\ldots$$

La quantité $P_m$ n'est pas absolument constante. C'est une fonction de $m$ qui peut changer en même temps que cette abscisse; mais ses variations ne sont point arbitraires; elle ne peut pas croître indéfiniment, puisque la fonction $f(x)$ est comprise entre deux limites finies $M$ et $N$. Cela admis, on met l'expression de $y$ sous la forme suivante :

$$y=\frac{\operatorname{Sin}\sqrt{m-P_m}}{\sqrt{m-P_m}};$$

et les racines $m$ se trouvent données par la formule $m=P_m+n^2\varpi^2$, où le nombre entier $n$ varie de l'unité à l'infini. Cette dernière égalité est toujours possible. Soit, par exemple, $n=1$; je dis qu'on peut avoir $m=P_m+n^2\varpi^2$, et le même genre de démonstration sera applicable à une valeur quelconque de $m$. En effet, le second membre est renfermé entre des limites désignées, puisque cela a lieu pour $P_m$ et que $\varpi^2$ est constant. Le premier, au contraire, est absolument quelconque. Donc il existe un nombre $m_1$ tel que, si l'on fait $m=m_1$, cette équation sera satisfaite et aussi l'équation $y=0$.

Donc enfin l'équation $y=0$, dans le cas le plus général, a toutes ses racines réelles et positives, ce qu'on savait déjà, par le théorème de l'article I.er

L'analyse que nous venons d'employer conduit également à les calculer : nous n'insisterons pas sur ce point ; des considérations de ce genre n'ont aucune difficulté. Lorsque les racines sont petites, on les obtient par la méthode des approximations successives ; lorsqu'elles sont très-grandes, le nombre $n^2$ est très-grand lui-même ; on néglige $P_m$ et l'on a cette valeur très-approchée $m=n^2\varpi^2$ ; où $n$ est un nombre entier quelconque, mais suffisamment considérable.

XXII. A la fin de l'article XII, on a prouvé que la série qui exprime $\psi(x,m)$ est une serie convergente. Nous ne reviendrons pas sur cette proposition qu'on peut démontrer par plus d'un moyen. De plus, quand les valeurs de $m$ sont très-grandes, on peut prouver que $\psi(x,m)$ est une très-petite quantité quel que soit $x$. En effet, on a

$$\psi(x,m)=x+\frac{1}{a^2}\int_0^x \mathrm{d}x\int_0^x [\mathrm{f}(x)-m]x\mathrm{d}x+\frac{1}{a^4}\int_0^x \mathrm{d}x\int_0^x [\mathrm{f}(x)-m]\mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}x\int_0^x [\mathrm{f}(x)-m]x\mathrm{d}x+\ldots$$

Si $m$ est très-grand, négligeons $\mathrm{f}(x)$ par rapport à $m$ ; il viendra

$$\psi(x,m)=x-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{mx^3}{1.2.3}+\frac{1}{a^4}\cdot\frac{m^2x^5}{1.2.3.4.5}-\ldots=\frac{a\,\mathrm{Sin.}\,\frac{x\sqrt{m}}{a}}{\sqrt{m}}.$$

Or, $\dfrac{a\,\mathrm{Sin.}\,\frac{x\sqrt{m}}{a}}{\sqrt{m}}$ décroît indéfiniment à mesure que $m$ augmente.

XXIII. Je vais présentement démontrer la convergence de la suite qui exprime la valeur de $u$. Il faut reprendre l'expression

$$u=\Sigma e^{-mt}[A_m\varphi(x,m)+B_m\psi(x,m)],$$

mettre à part le terme $u_0$, qui répond à $m=0$, et puis se rappeler qu'à l'article XIX on a fait voir que $A_m=0$, $\psi(l',m)=0$ pour les autres valeurs de $m$. Il reste dès lors

$$u=u_0+\Sigma B_m e^{-mt}\psi(x,m)\ ;$$

le signe $\Sigma$ s'étendant aux valeurs de $m$ données par $\psi(l',m)=0$.

Pour $t=0$, $u$ devient $F(x)$. On pose ( art. XVI ) $F(x)-u_0=\Phi(x)$. Puis l'on a $\Phi(x)=\Sigma B_m\psi(x,m)$, d'où l'on déduit, par la méthode déjà exposée ( art. XVI, XVII ),

$$B_m=\frac{\int^{l'}_0\Phi(x)\psi(x,m)dx}{\int^{l'}_0\psi(x,m)^2dx}\ .$$

Or, quand il s'agit de prouver la convergence de la série $\Sigma B_m e^{-mt}\psi(x,m)$, il est permis d'abord de ne considérer que les termes de la suite infinie où $m$ est très-considérable ; ensuite de faire $t=0$ ; car, si la série est convergente, $t$ étant nul, à *fortiori* le sera-t-elle à un instant quelconque différent.

Posons

$$m=\frac{a^2n^2\pi^2}{l'^2}\ ;$$

$n$ désignant un nombre entier très-grand. Partons d'une valeur $n=n'$, puis faisons

$$n=n'+1\ ,\quad n=n'+2\ ,\quad n=n'+3\ ,\ \ldots\ldots\ ;$$

c'est à ces diverses valeurs de $n$ que répondront les grandes racines de l'équation $\psi(l',m)=0$. Cela résulte de ce que, pour ces grandes racines, on a, ainsi qu'on l'a vu à l'art. XXII,

$$\psi(l',m)=\frac{a\,\mathrm{Sin.}\,\frac{l'\sqrt{m}}{a}}{\sqrt{m}}\ ,$$

et de ce que Sin. $\frac{l'\sqrt{m}}{a}$ devient nul toutes les fois que

$$m = \frac{a^2 n^2 \varpi^2}{l'^2}\,;$$

Nous aurons, dans la même hypothèse,

$$\int_0^{l'} \psi(\alpha,m)^2 d\alpha = \int_0^{l'} \frac{a^2 \text{Sin.}\,\frac{2\alpha\sqrt{m}}{a}}{m}\,d\alpha = \frac{a^2 l'}{m}\,.$$

Ainsi,

$$\Sigma B_m \psi(x,m).\Sigma \frac{\text{Sin.}\,\frac{x\sqrt{m}}{a}}{l'} \int_0^{l'} \Phi(\alpha).\text{Sin.}\,\frac{\alpha\sqrt{m}}{a}.d\alpha\,;$$

Or, la série du second membre est du nombre de celles qui ont été discutées en détail par MM. Fourier et Poisson. Et, en effet, elle se rapporte au cas où $f(x)=0$, où le pouvoir rayonnant est nul, et constant par conséquent. La convergence de la série, dans le cas général, se trouve donc ainsi ramenée au cas particulier où $f(x)$ est invariable, sur lequel il ne peut rester aucun doute, après les mémoires des auteurs cités.

XXIV. Il nous reste à supposer variables, suivant une fonction quelconque de l'abscisse, la conductibilité et la chaleur spécifique. Si l'on a bien compris ce qui précède, on ne trouvera aucune difficulté dans cette question nouvelle, ce qui nous permettra d'en exposer rapidement les résultats. Supposons d'abord une barre AB, telle que $AB=l$, arrivée à l'état permanent. Nommons $k$ la conductibilité, variable en fonction de l'abscisse $Am=x$ de $m$, comptée à partir du point A. Soit de plus $\omega$ l'aire, $\varepsilon$ le contour de la section transversale, l'une et l'autre constantes, et $\gamma$ le pouvoir rayonnant de la surface extérieure, exprimé en fonction de $x$; on aura cette équation indéfinie

$$(a) \qquad \omega \frac{d^2.ku}{dx^2} = \gamma\varepsilon.u ,$$

où $u$ désigne la température au point où l'abscisse est $x$, et qui suppose le milieu ambiant entretenu à 0°. En posant

$$u = \frac{v}{k} , \qquad \frac{\varepsilon\gamma}{k\omega} = f(x) ,$$

cette équation peut s'écrire ainsi

$$(b) \qquad \frac{d^2 v}{dx^2} = v f(x) ;$$

Les constantes de l'intégrale se détermineront, par exemple, en admettant qu'aux extrémités A, B de la barre, les températures sont $\theta$, $\theta'$. Or, l'équation différentielle (b) est de même forme que celle relative à la première question du mémoire. Elle se traitera donc comme nous avons traité celle-là, et le nouveau problème sera résolu par les mêmes procédés que nous avons appliqués à l'autre.

Considérons deux barres de même longueur, mais de matières diverses. Admettons que, dans ces deux barres, $\varepsilon$ et $\omega$ soient les mêmes, ainsi que la fonction de l'abscisse qui exprime le rapport du pouvoir rayonnant à la conductibilité. L'équation (b) sera la même pour l'un et pour l'autre. Si de plus on entretient leurs extrémités à des températures qui diffèrent de la première barre à la seconde, et en raison inverse de leurs conductibilités à ces limites données, les valeurs de $v$, pour ces deux points, seront égales de part et d'autre, et dès lors elles resteront les mêmes pour tous les autres points homologues des deux barres.

Mais on a $u=\frac{v}{k}$. Soient $u'$, $u''$ les valeurs de $u$ pour deux points des barres ayant la même abscisse $x$, et $k'$, $k''$ les conductibilités. Puisque $v$ est le même pour l'une et l'autre, on a $u' : u'' :: k'' : k'$; c'est-à-dire que les températures sont en raison inverse des conductibilités.

XXV. Considérons présentement le mouvement varié de la chaleur dans une barre hétérogène. En désignant par $c$ la chaleur spécifique, nous aurons l'équation

$$(c) \qquad c\omega.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\omega\,\frac{\mathrm{d}^2.ku}{\mathrm{d}x^2}-\gamma\varepsilon.u\ .$$

Les équations définies seront, par exemple, $u=\theta$ pour $x=0$, $u=\theta'$ pour $x=l$, et $u=\mathrm{F}(x)$ pour $t=0$, de $x=0$ à $x=l$. En posant $ku=v$, puis se rappelant que $c$, $k$, $\gamma$ sont des fonctions quelconques de $x$, et faisant, en conséquence,

$$\frac{k}{c}=\mathrm{f}(x)\ ,\qquad \frac{\gamma\varepsilon}{c\omega}=\mathrm{f}_1(x)\ ;$$

l'équation (c) se transformera dans celle-ci :

$$(d) \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{f}(x)-v\mathrm{f}_1(x)\ .$$

Pour intégrer l'équation (d) on formera, comme à l'art. XIV, l'intégrale générale d'un nombre infini d'intégrales particulières. Soit

$$\Sigma v_m e^{-mt}=v\ ,$$

la substitution donnera

$$-\Sigma v_m e^{-mt}m=\mathrm{f}(x)\Sigma e^{-mt}\,\frac{\mathrm{d}^2v_m}{\mathrm{d}x^2}-\mathrm{f}_1(x)\Sigma e^{-mt}v_m\ ;$$

équation qui, devant être satisfaite quel que soit $t$, donne cette expression générale

$$(e) \qquad -m v_m = f(x)\frac{d^2 v_m}{dx^2} - v_m f_1(x) \;;$$

Cette équation linéaire est d'une forme qui nous est bien connue. Soient $\varphi(x,m)$, $\psi(x,m)$ deux intégrales particulières ; et, comme à l'art. XIV, soit posé

$$v_m = A_m \varphi(x,m) + B_m \psi(x,m) \;;$$

d'où

$$v = \Sigma e^{-mt}[A_m \varphi(x,m) + B_m \psi(x,m)] \;;$$

Pour déterminer les valeurs de $m$, il faut recourir aux équations définies

$$u = \theta \text{ pour } x = 0 \;, \qquad u = \theta' \text{ pour } x = l \;,$$

et se rappeler en même temps que

$$u = \frac{v}{k} = \frac{1}{k}\Sigma e^{-mt}[A_m \varphi(x,m) + B_m \psi(x,m)] \;;$$

En effet, ces conditions donnent, en nommant $k_0$, $k_1$, les valeurs de $k$, pour les deux abscisses 0, $l$

$$\frac{1}{k_0}\Sigma e^{-mt}[A_m \varphi(0,m) + B_m \psi(0,m)] = \theta \;,$$

$$\frac{1}{k_1}\Sigma e^{-mt}[A_m \varphi(l,m) + B_m \psi(l,m)] = \theta' \;;$$

Ces conditions se simplifient à cause des valeurs de $\varphi(x,m)$ et de $\psi(x,m)$. En effet, l'équation (e) peut s'écrire ainsi

$$\frac{d^2\varphi_m}{dx^2}=\varphi_m \cdot \frac{f_1(x)-m}{f(x)} \;;$$

On pourra donc poser

$$\varphi(x,m)=1+\int_0^x dx\int_0^x dx\,\frac{f_1(x)-m}{f(x)}+\int_0^x dx\int_0^x dx.\frac{f_1(x)-m}{f(x)}\int_0^x dx\int_0^x dx\,\frac{f_1(x)-m}{f(x)}+\ldots$$

$$\psi(x,m)=x+\int_0^x dx\int_0^x x\,\frac{f_1(x)-m}{f(x)}.dx+\int_0^x dx\int_0^x \frac{f_1(x)-m}{f(x)}\,dx\int_0^x dx\int_0^x x\,\frac{f_1(x)-m}{f(x)}\,dx+\ldots$$

De là résulte

$$\varphi(0,m)=1\;, \qquad \psi(0,m)=0\;;$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{k_0}\Sigma A_m e^{-mt}=\theta\;, \qquad \frac{1}{k_1}\Sigma e^{-mt}[A_m\varphi(l,m)+B_m\psi(l,m)]=\theta'\;:$$

Ces égalités doivent subsister pour toutes les valeurs positives de $t$. On en conclut sans peine qu'une des valeurs de l'exposant $m$ doit être zéro, et qu'à cet exposant répondent les valeurs

$$A_0=\theta k_0\;, \qquad B_0=\frac{\theta' k_1-\theta k_0\varphi(l,0)}{\psi(l,0)}\;,$$

qui déterminent le premier terme $u_0$ de la valeur de $u$, lequel représente l'état permanent de la barre. Les coefficiens qui répondent aux autres valeurs de $m$ doivent être égalés à zéro, et l'on a, en général,

$$A_m=0\;, \qquad A_m\varphi(l,m)+B_m\psi(l,m)=0\;;$$

ce qui donne, à la fois,

$$A_m = 0 \ , \quad \psi(l,m) = 0 \ .$$

Tout est connu dans cette dernière équation, excepté la variable $m$; et ses racines détermineront les nombres $m_1$, $m_2$, $m_3$, ..... qui entrent en exposants de $e^{-t}$, dans le développement de $u$ en série. La valeur de $A_m$ est nulle; celle de $B_m$ est seule inconnue, et l'on a

$$u = u_0 + \frac{1}{k} \Sigma B_m e^{-mt} \psi(x,m) \ .$$

XXVI. Que l'on fasse à présent $t=0$, $u$ deviendra une fonction connue $F(x)$. Représentons par $\Phi(x)$ la différence $F(x) - u_0$ également connue; on devra satisfaire à cette égalité

$$\Phi(x) = \Sigma B_m \psi(x,m) \ ,$$

qui pourtant ne subsiste que de $x=0$ à $x=l$. Ici, comme à l'art. XVI, la fonction $\Phi(x)$ peut être discontinue. L'équation que je viens d'écrire est la conséquence de raisonnemens rigoureux. Il est hors de doute que $\Phi(x)$ puisse se développer en une série ayant la forme de celle comprise dans le second membre. Il nous reste à déterminer convenablement $B_m$.

Cette détermination diffère un peu de celle de l'art. XVI, mais on y parvient toutefois par des principes semblables. On pose $\psi(x,m) = \chi_m$, et l'on observe que $\chi_m$ satisfait à l'équation

$$-m\chi_m = f(x) \frac{d^2\chi_m}{dx^2} - \chi_m f_1(x) \ .$$

Pour une seconde valeur $m'$ de $m$, on a de même une équation

$$-m'\chi_{m'} = f(x) \frac{d^2\chi_m}{dx^2} - \chi_{m'} f_1(x) \ .$$

Cela posé, l'intégrale qu'on cherche à calculer est

$$\int_0^l \frac{\chi_m \chi_{m'} \mathrm{d}x}{\mathrm{f}(x)} ,$$

et non pas $\int_0^l \chi_m \chi_{m'} \mathrm{d}x$, comme à l'art. XVI. On élimine $\mathrm{f}_1(x)$ entre les deux égalités qui précèdent. Cela donne

$$(m-m')\chi_m \chi_{m'} = \mathrm{f}(x) \left\{ \chi_m \frac{\mathrm{d}^2 \chi_{m'}}{\mathrm{d}x^2} - \chi_{m'} \frac{\mathrm{d}^2 \varphi_m}{\mathrm{d}x^2} \right\} .$$

Divisant par $(m-m')\mathrm{f}(x)$, puis intégrant par rapport à $x$, on en déduit

$$\int \frac{\chi_m \chi_{m'} \mathrm{d}x}{\mathrm{f}(x)} = \frac{1}{m-m'} \left\{ \chi_m \frac{\mathrm{d}\chi_{m'}}{\mathrm{d}x} - \chi_{m'} \frac{\mathrm{d}\chi_m}{\mathrm{d}x} \right\} + \text{Const.}$$

Or, si l'on prend cette intégrale de $x=0$ à $x=l$, le second membre sera nul, tant que $m-m'$ ne sera pas zéro. Cela résulte de ce qu'à ces limites les quantités $\chi_m$ et $\chi_{m'}$ sont nulles elles-même, ce qu'on vérifie aisément en observant qu'on a les équations

$$\psi(l,m)=0 \;; \qquad \psi(0,m)=0 \;.$$

Ainsi donc $\int_0^l \chi_m \chi_{m'} \mathrm{d}x = 0$, tant que les racines $m$, $m'$ diffèrent entre elles. Mais, si $m=m'$, le second membre se réduit à une valeur finie, déterminable par les règles ordinaires, puisqu'il prend la forme $\frac{0}{0}$.

XXVII. Revenons présentement à l'équation

$$\Phi(x) = \Sigma B_m \psi(x,m) \;;$$

j'y change $x$ en $\alpha$, ce qui est permis. Je multiplie les deux membres par $\psi(x,m)$ et j'intègre entre les limites $\alpha=0$, $\alpha=l$. Le premier membre devient égal à une intégrale définie

$$\int_0^l \Phi(\alpha)\psi(\alpha,m)d\alpha \ .$$

Le second membre, en vertu des principes de l'art. XXVI, devient

$$B_m.\int_0^l \psi(\alpha,m)^2 d\alpha \ .$$

Il se réduit au seul terme qui contient le coefficient $B_m$, et l'on a l'égalité

$$B_m=\frac{\int_0^l \Phi(\alpha)\psi(\alpha,m)d\alpha}{\int_0^l \psi(\alpha,m)^2 d\alpha} \ .$$

On a donc cette valeur de $u$,

$$u=u_0+\frac{1}{k}\Sigma \frac{e^{-mt}}{\int_0^l \psi(\alpha,m)^2 d\alpha}.\psi(x,m)\int_0^l \Phi(\alpha)\psi(\alpha,m)d\alpha \ ;$$

laquelle ne contient plus que des quantités connues et donne la température en un point quelconque de la barre, et pour une valeur arbitraire de $t$. On prouverait, comme à l'art. XX, que les valeurs de $m$ sont toutes réelles et positives.

XXVIII. Ce mémoire, très-succint, n'est qu'un extrait de mes recherches sur la théorie de la chaleur. Je n'y ai point parlé de l'application de mes calculs à la sphère, ce qui est important pour le problème des températures terrestres, ni du cas où la barre rayonne librement à ses extrémités. J'ai passé rapidement sur les points secondaires. Plus tard je reviendrai sur ces questions, et je chercherai à résoudre les mêmes questions, en supposant aux corps leurs trois dimensions. Quant à l'art. V de mes recherches de 1830, lequel se rapportait aux questions primitives de la chaleur, il forme, à dire vrai, un mémoire à part, que je n'ai pas dû transcrire ici (*).

---

(*) Je crois devoir m'excuser, vis-à-vis du lecteur, de lui livrer un mémoire aussi maussadement, je puis même dire, aussi inintelligiblement rédigé. Mais, au moment où je comptais m'occuper paisiblement de préparer ma livraison, il me fallut, à mon très-grand regret, prendre les rênes d'une administration qui, fort pénible dans tous les temps, surtout dès le début, le devenait beaucoup plus encore par l'effet des circonstances dans lesquelles nous nous trouvons. Par suite d'un déménagement auquel il m'était impossible de présider, mes papiers se trouvèrent enfouis sous des monceaux de livres que je n'avais pas le temps de remuer. Ce mémoire se présenta à moi, je crus trouver dans le double titre d'ingénieur et d'ancien élève de l'Ecole polytechnique une garantie suffisante du talent de rédaction de l'auteur, et j'envoyai de suite l'ouvrage à l'impression. L'auteur m'a bien transmis postérieurement quelques corrections, mais, outre qu'elles n'auraient pas sensiblement amélioré le mémoire, il était imprimé quand elles me sont parvenues.

Je ne prétends contester aucunement la capacité mathématique de M. Liouville; mais à quoi sert cette capacité, si elle n'est accompagnée de l'art de disposer, de l'art de se faire lire, entendre et goûter. Malheureusement il n'est aujourd'hui que trop de jeunes gens, de beaucoup de mérite d'ailleurs, qui regardent comme un accessoire presque indifférent ce que je regarde moi comme le mérite essentiel, le mérite par excellence, au défaut duquel tout le reste c'est absolument rien.

Je désire bien vivement que M. Liouville se venge prochainement des reproches un peu sévères peut-être que, bien à regret, sans doute, je me trouve contraint de lui adresser aujourd'hui, en publiant quelque mémoire que l'on puisse lire à peu près comme on lit un roman; mais la vérité est que je le désire beaucoup plus que je ne l'espère. Une longue expérience m'a prouvé que le mal dont il est atteint est un mal à peu près incurable.

*J. D. G.*

# ANALYSE TRANSCENDANTE.

## *Notes sur quelques points d'analyse ;*

Par M. GALAIS, élève à l'Ecole normale.

### §. I.

*Démontration d'un théorème d'analyse.*

THÉORÈME. Soient $\mathrm{F}x$ et $\mathrm{f}x$ deux fonctions quelconques données ; on aura, quels que soient $x$ et $h$,

$$\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}x}{\mathrm{f}(x+h)-\mathrm{f}x}=\varphi(k)\ ,$$

$\varphi$ étant une fonction déterminée, et $k$ une quantité intermédiaire entre $x$ et $x+h$.

*Démonstration.* Posons, en effet,

$$\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}x}{\mathrm{f}(x+h)-\mathrm{f}x}=P\ ;$$

on en déduira

$$\mathrm{F}(x+h)-P\mathrm{f}(x+h)=\mathrm{F}x-P\mathrm{f}x\ ,$$

d'où l'on voit que la fonction $\mathrm{F}x-P\mathrm{f}x$ ne change pas quand on y change $x$ en $x+h$ ; d'où il suit qu'à moins qu'elle ne reste constante entre ces limites, ce qui ne pourrait avoir lieu que dans des cas particuliers, cette fonction aura, entre $x$ et $x+h$, un ou plusieurs *maxima* et *minima*. Soit $k$ la valeur de $x$ répondant à l'un d'eux ; on aura évidemment

$$k=\psi(P)\ ,$$

$\psi$ étant une fonction déterminée ; donc on doit avoir aussi

$$P=\varphi(k) \ ,$$

$\varphi$ étant une autre fonction également déterminée ; ce qui démontre le théorème.

De là on peut conclure, comme corollaire, que la quantité

$$\text{Lim.}\frac{\text{F}(x+h)-\text{F}x}{\text{f}(x+h)-\text{f}x}=\varphi(x) \ ,$$

pour $h=0$, est nécessairement une fonction de $x$, ce qui démontre, à *priori*, l'existence des fonctions dérivées.

## §. II.

### *Rayon de courbure des courbes dans l'espace.*

Le rayon de courbure d'une courbe en l'un quelconque de ses points M est la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'intersection du plan normal au point M avec le plan normal consécutif, comme il est aisé de s'en assurer par des considérations géométriques.

Cela posé, soit $(x, y, z)$ un point de la courbe ; on sait que le plan normal en ce point aura pour équation

$$(X-x)\frac{\text{d}x}{\text{d}s}+(Y-y)\frac{\text{d}y}{\text{d}s}+(Z-z)\frac{\text{d}z}{\text{d}s}=0 \ . \qquad (\text{N})$$

$X$, $Y$, $Z$ étant les symboles des coordonnées courantes. L'intersection de ce plan normal avec le plan normal consécutif sera donnée par le système de cette équation et de la suivante

$$(X-x)\frac{\text{d}.\left(\frac{\text{d}x}{\text{d}s}\right)}{\text{d}s}+(Y-y)\frac{\text{d}.\left(\frac{\text{d}y}{\text{d}s}\right)}{\text{d}s}+(Z-z)\frac{\text{d}.\left(\frac{\text{d}z}{\text{d}s}\right)}{\text{d}s}=1 \ , \quad (\text{I})$$

attendu que

$$\left(\frac{\text{d}x}{\text{d}s}\right)^2+\left(\frac{\text{d}y}{\text{d}s}\right)^2+\left(\frac{\text{d}z}{\text{d}s}\right)^2=1 \ .$$

Or, il est aisé de voir que le plan (I) est perpendiculaire au plan (N); car l'on a

$$\frac{dx}{ds}d.\left(\frac{dx}{ds}\right)+\frac{dy}{ds}d\left(\frac{dy}{ds}\right)+\frac{dz}{ds}d\left(\frac{dz}{ds}\right)=0\ ;$$

donc la perpendiculaire abaissée du point $(x, y, z)$ sur l'intersection des deux plans (N) et (I) n'est autre chose que la perpendiculaire abaissée du meme point sur le plan (I). Le rayon de courbure est donc la perpendiculaire abaissé du point $(x, y, z)$ sur le plan (I). Cette considération donne, très-simplement, les théorèmes connus sur les rayons de courbure des courbes dans l'espace.

# QUESTIONS RÉSOLUES.

## *Solution des deux problèmes de géométrie énoncés à la pag. 72 du présent volume;*

Par M. Le Barbier.

PROBLÈME I. *Conduire, dans l'intérieur d'un triangle, deux droites telles que chacune d'elles contienne les centres de gravité des aires des deux segmens du triangle déterminés par l'autre?*

*Solution.* De quelque manière qu'une droite divise l'aire d'un triangle en deux segmens, toujours les centres de gravité de ces deux segmens sont en ligne droite avec le centre de gravité du triangle; d'où il est aisé de conclure que les deux droites demandées par l'énoncé du problème doivent avoir leur intersection à ce dernier point.

Si l'on joint l'un des sommets du triangle au milieu du côté opposé par une droite, cette droite contiendra le centre de gravité de l'aire du triangle qu'elle divisera en deux autres : et si, par ce centre de gravité, on mène une parallèle au côté du triangle au milieu duquel se termine la droite dont il s'agit, cette parallèle contiendra évidemment les centres de gravité des aires des deux segmens du triangle.

D'un autre côté, cette parallèle divisera le triangle en deux segmens, dont l'un sera un triangle qui lui sera semblable, tandis que l'autre sera un trapèze. Le centre de gravité du premier de ces deux segmens sera évidemment sur la première droite ; et, comme le centre de gravité du triangle total y est aussi, il en sera de même du centre de gravité de l'autre segment.

Ainsi, si, par le centre de gravité de l'aire d'un triangle, on mène deux droites ; l'une parallèle à l'un de ses côtés et l'autre passant par le sommet opposé, chacune de ces deux droites contiendra les centres de gravité des aires des deux segmens du triangle déterminés par l'autre ; le système de ces deux droites offrira donc une solution du problème.

Et comme, dans un triangle, on peut conduire trois systèmes de deux pareilles droites, il s'ensuit que le problème proposé admet trois solutions.

*PROBLÈME II. Conduire, dans l'intérieur d'un tétraèdre, trois plans tels que l'intersection de deux quelconques contienne les centres de gravité des volumes des deux segmens du tétraèdre déterminés par le troisième ?*

*Solution.* De quelque manière qu'un plan divise un tétraèdre en deux segmens, toujours les centres de gravité des volumes de ces deux segmens seront en ligne droite avec le centre de gravité du volume du tétraèdre. Puis donc que l'intersection de deux quelconques des trois plans cherchés doit contenir les centres de gravité des volumes des deux segmens déterminés par le troisième, elle doit aussi contenir le centre de gravité du volume du tétraèdre ; d'où l'on doit conclure que les trois plans cherchés doivent se couper en ce point.

Soient A, B, C, D les sommets du tétraèdre, et soit G son centre de gravité. Par ce point, conduisons un plan parallèle à la face ABC, ce plan déterminera un triangle $A'B'C'$, semblable à ABC, et dont le centre de gravité sera le même que le centre de gravité G du tétraèdre. De plus ce même plan $A'B'C'$ divisera le tétraèdre en deux segmens dont les centres de gravité seront évidemment sur la droite DG.

Conduisons, par le point G, dans le plan du triangle $A'B'C'$, deux droites qui résolvent le précédent problème par rapport à ce triangle ; par exemple, une parallèle $A''B''$ au côté $A'B'$ et une droite $C'C''$, joignant le sommet $C'$ au milieu $C''$ du côté opposé $A'B'$, par chacune de ces droites et par le sommet D conduisons deux plans ; le premier divisera le tétraèdre en deux pyramides de même sommet que lui, dont une sera elle-même un tétraèdre, tandis que l'autre sera une pyramide quadrangulaire ; et ces deux segments auront évidemment leurs centres de gravité sur la droite $C'C''$, intersections du premier plan $A'B'C'$ avec le troisième.

Quant à ce troisième plan, il divisera le tétraèdre en deux autres de même sommet que lui, dont les centres de gravité seront évidemment sur la droite $A''B''$, intersection des deux premiers plans. Ainsi les trois droites DG, $CC'$ et $A''B''$, prises deux à deux, déterminent trois plans tels que chacun d'eux partage le tétraèdre en deux segmens dont les centres de gravité sont situés à l'intersection des deux autres, c'est-à-dire, trois plans qui résolvent le problème.

Mais, par le précédent problème, on peut mener, dans le plan du triangle $A'B'C'$, deux autres systèmes de droites qui, avec la même droite DG déterminent trois plans qui le résolvent également ; donc, en conservant toujours le plan $A'B'C'$, comme l'un des plans cherchés, le problème aura déjà trois solutions.

Mais attendu qu'au lieu de conduire ce plan parallèlement à la face ABC on aurait pu tout aussi bien le conduire parallèlement à chacune des trois autres faces ; et que, pour chaque direction qu'on voudra lui assigner, le problème aura toujours trois solutions ; il s'ensuit que le nombre de ses solutions s'élève jusqu'à douze.

Mais comme il existe quatre plans dont chacun est le même pour trois des solutions, il s'ensuit que le nombre des plans employés dans les douze solutions s'élève seulement à vingt-huit et non pas à trente-six.

---

## *Démonstration du théorème de géométrie énoncé à la pag.* 100 *du présent volume* ;

Par M. Vallès, ingénieur des ponts et chaussées, ancien élève de l'école polytechnique.

Théorème. *La différence des distances de chacun des points d'une parabole à son foyer et à une perpendiculaire fixe à l'axe de la courbe est une quantité constante* (*).

*Démonstration*. Soient $f$ la distance variable de l'un quelconque des points de la courbe à son foyer, $d$ la distance également variable de ce même point à la directrice, et enfin $a$ la distance de la directrice à la droite fixe que, pour fixer les idées, nous supposons située, par rapport à cette directrice, du côté des $x$ positifs La distance du point de la courbe à cette droite sera $d-a$ ; donc la différence entre cette distance et la distance de ce même point au foyer sera

---

(*) Ce théorème est dû à M. Coste, capitaine d'artillerie

*J. D. G.*

$$f-d+a\ ;$$

mais, suivant la propriété fondamentale de la parabole, on a $f-d=0$ ; donc cette distance se réduira simplement à $a$, quantité constante, comme l'annonce le théorème.

On doit remarquer que, si le point pris sur la courbe était situé entre la directrice et sa parallèle fixe, ce serait alors la somme et non la différence des deux distances qui serait constante.

# QUESTIONS PROPOSÉES.

## *Problèmes de géométrie.*

I. COUPER un triangle, par une droite, en deux segmens tels que leurs centres de gravité soient situés sur une autre droite, perpendiculaire à celle-là?

II. Couper un tétraèdre, par un plan, en deux segmens tels que leurs centres de gravité soient situés sur une droite perpendiculaire à ce plan?

# ARITHMÉTIQUE SOCIALE.

## *Notions élémentaires sur les métaux considérés comme monnaies ;*

Par M. GERGONNE (*).

Je me propose d'examiner, dans l'essai qu'on va lire, par quelle progression d'idées l'usage des monnaies métalliques a pu s'introduire universellement dans nos sociétés, quels effets généraux résultent de leur emploi, et quelle influence peut avoir leur circulation plus ou moins abondante sur la valeur des choses et sur la richesse des nations. Je n'aurai qu'un petit nombre de vérités à établir, et des vérités presque triviales, bien qu'elles soient trop souvent méconnues ; mais je signalerai, chemin faisant, des erreurs et des préjugés de plus d'un genre. Un pareil soin ne me paraît pas tout à fait dépourvu d'utilité, car, outre ce que l'er-

(*) Cet essai, composé à la fin de 1825, était destiné pour l'*Annuaire du département de l'Hérault* de 1826. Le Préfet d'alors, tout en approuvant l'écrit, comme particulier, désirait, comme agent d'un ministère ombrageux, que j'y fisse diverses modifications et suppressions ; mais, comme elles auraient dû porter sur les points de doctrines auxquels je tenais le plus, je préférai retirer le manuscrit que de le faire paraître ainsi mutilé et défiguré. Je le donne aujourd'hui tel qu'il était alors, en rejetant dans des notes ce que j'ai cru devoir y ajouter postérieurement.

reur et l'ignorance des saines doctrines, en quelque matière que ce soit, ont toujours de honteux en elles-mêmes, il n'arrive que trop souvent que les gouvernemens même les plus éclairés sur les véritables intérêts du public, ne peuvent tenter tout le bien qu'ils désireraient, par l'obligation où il se trouvent de respecter ou du moins de ne pas heurter trop brusquement des opinions qu'ils savent d'ailleurs fort bien n'avoir aucun fondement solide, mais auxquelles le désir de conserver la paix publique n'exige pas moins qu'on sacrifie ; tant il est vrai qu'instruire les hommes c'est en même temps les rendre plus facilement gouvernables.

Je supposerai, en premier lieu, que, par quelque cause que ce puisse être, un homme se trouve contraint de passer ses jours dans un isolement absolu de ses semblables, et dans l'impossibilité d'entretenir aucune relation avec eux. Indépendamment de tout ce que cette situation aurait d'affligeant, sous le point de vue moral, on conçoit que l'existence d'un tel homme ne pourrait être que très-misérable. Nous ne faisons vîte et bien, en effet, que ce dont nous faisons notre occupation unique et habituelle ; d'où l'on peut voir à quel point devrait être mal nourri, mal vêtu, mal défendu contre l'inclémence des saisons et les attaques des animaux, mal pourvu enfin des choses les plus nécessaires, celui qui, pour satisfaire ses besoins divers, serait sans cesse obligé d'exercer tour à tour les professions les plus disparates, sans avoir le loisir de se perfectionner dans aucune d'elles.

Donnons, au contraire, à cet homme une famille ; et, bien qu'alors les besoins croissent dans une proportion exacte avec le nombre des individus qui pourront y pourvoir, sa situation ne s'en trouvera pas moins améliorée d'une manière très-notable. Le soin de pourvoir à ces besoins divers pourra dès lors, en effet, être réparti entre les membres de la petite colonie, en raison de la diversité de leurs forces, de leur intelligence ou même simplement de leurs inclinations. Ainsi, tandis que l'un des fils se dévouera tout entier à la chasse, un autre s'occupera exclusivement de la pêche ; celui-ci se consacrera à l'éducation des troupeaux ; celui-là à la culture des terres ; un cinquième à l'entretien de l'habitation commune et de son mobilier, et ainsi des autres. La mère et ses filles, de leur côté, prendront soin de filer et de tisser la toison des brebis ou les fibres des plantes, de les façonner en divers vêtemens appropriés à la variété des saisons ; elles prépareront à tous les alimens nécessaires à leur subsistance ; tandis que le chef de la famille pourra réserver, pour sa part de soins, la police, la direction et la surveillance générale de tous les travaux. Les occupations de chaque individu se trouvant ainsi circonscrites dans des limites assez étroites, il arrivera que bientôt l'observation, l'expérience et la réflexion suggéreront aux uns comme aux autres les moyens de faire, à la fois, mieux et plus promptement. L'exigence sur ce point croissant sans cesse, en proportion de la perfection, de l'abondance et de la prompte confection des produits, le goût et l'esprit d'invention se développeront par degrés, et bientôt cette société naissante pourra connaître l'aisance, le luxe et même le loisir.

C'est ainsi qu'a pu être très-naturellement révélé à l'homme un des secrets de l'art social les plus féconds en précieuses conséquences : je veux dire le principe de la *division du travail* qui, dans nos sociétés modernes, a reçu un développement si général et si étendu. Si présentement on nous offre chaque jour, dans nos rues et sur nos places, *quarante épingles pour un sous* (*), c'est parce qu'une épingle, avant d'être livrée au public, passe tour à tour dans les mains de treize ouvriers. Un ouvrier qui offrirait de fabriquer, à lui seul, *une épingle pour quarante sous*,

(*) Au moment où j'écrivais ceci, un colporteur parcourait tous les jours les rues de Montpellier, en annonçant par ce cri le genre de son négoce.

ferait peut-être un mauvais marché ; car, sans même parler de la préparation des matières premières, il pourrait fort bien y employer plus d'une demi-journée ; et la journée d'un ouvrier tant soit peu habile et intelligent vaut bien au moins quatre francs.

Faisons présentement sortir la petite famille de son isolement, comme nous en avions fait tout à l'heure sortir l'individu. Etablissons autour d'elle d'autres familles, en plus ou moins grand nombre. On conçoit que dès lors le principe de la division du travail pourra recevoir une nouvelle extension. Nous avions, il n'y a qu'un instant, des individus chasseurs, pêcheurs, pasteurs, agriculteurs, etc. ; mais présentement ces différentes professions pourront être réparties entre les diverses familles qui, à leur tour, répartiront entre les individus dont elles seront composées les diverses sortes de travaux que l'exercice de chacune de ces professions pourra réclamer. Ainsi, par exemple, dans la famille des chasseurs, les uns fabriqueront des arcs et des flèches, et les autres des filets et des pièges ; ceux-ci dresseront des chiens ou des oiseaux de proie ; ceux-là dépouilleront le gibier et en prépareront les chairs de manière à pouvoir les conserver saines pendant un temps plus ou moins long ; et la répartition des occupations diverses se fera d'une manière analogue, dans les autres familles, pour l'avantage général de la petite république.

Mais un tel état de choses exige impérieusement qu'un autre principe vienne se combiner avec celui de la division du travail. Si, en effet, chaque famille prétendait demeurer seule propriétaire de la totalité des fruits de son industrie et de ses conquêtes sur la nature ; des travaux ainsi restreints à un seul objet les mettraient toutes dans une excessive abondance de certaines choses et dans le dénuement le plus absolu de toutes les autres ; elles auraient toutes du superflu et toutes, en même temps, se trouveraient privées des choses les plus nécessaires. Il faudra donc, si chacun veut jouir du fruit des travaux de tous, que tous aient recours aux *échanges* ; et c'est, en effet, l'expédient auquel elles ne manqueront pas de songer. C'est ainsi que le *commerce*, les rendant nécessaires les uns aux autres, en même temps qu'il répandra un bien-être général, établira entre elles un contact journalier, des relations de bon voisinage qui embelliront leur existence morale, en leur faisant goûter le charme de la sociabilité. Heureux si l'exigence des forts et l'astuce des faibles, ne vient pas bientôt troubler cette précieuse harmonie, et faire sentir impérieusement à tous le besoin d'une force réprimante (*).

Ce que sont entre elles des familles voisines, les nations le sont plus en grand; mais, avec cette différence notable que ce qui peut fort bien n'être que pure convenance pour celles-là devient souvent nécessité rigoureuse pour celles-ci, placées comme elles le sont sur des territoires très-divers, dont la variété doit entraîner forcément celle de leurs occupations. Parmi les diverses contrées habitées de notre globe, il en est, en effet, qui ne sont propres seulement qu'au labourage ou au pâturage, d'autres à la culture de la vigne, de l'olivier ou du mûrier; là ce sont d'immenses forêts, séjour d'animaux que la chasse fait tomber au pouvoir de l'homme; ici ce sont des lacs et des étangs qui ne sauraient lui permettre que l'exercice de la pêche; ailleurs c'est un sol rebelle à tous les genres de cultures, mais duquel on peut extraire des minéraux plus ou moins précieux. Il est enfin des populations nombreuses disséminées sur un territoire absolument improductif, et alors, ou bien elles se répandent sur les autres territoires pour y échanger leur travail contre les choses nécessaires à leur subsistance, ou bien elles appliquent leur industrie, sans se déplacer, aux produits bruts des contrées voisines qu'elles

(*) Je ne parle ici que d'échange d'objets matériels, afin de ne pas compliquer la question; mais on sent assez qu'on peut aussi échanger des services contre des denrées, ou même des services contre d'autres services d'une nature différente.

rendent propres à une multitude d'usages divers ; de sorte que la condition de l'homme sur la terre serait des plus déplorable sans le commerce qui, établissant entre les diverses nations des relations également avantageuses à toutes, devient à la fois la cause et la condition de la perpétuité de leur séjour dans les lieux où elles se trouvent établies (*).

Dans les premiers âges de la civilisation, où le manque de grandes routes, de moyens commodes et prompts de correspondance et de transport, de police et de force publique, rendaient les relations de peuple à peuple également rares et périlleuses, il devait être d'ordinaire assez difficile à ceux qui possédaient du superflu, dans certain genre, de découvrir en quelles contrées ils pourraient en faire un échange avantageux contre les objets dont ils se trouvaient dépourvus ; il pouvait se faire d'ailleurs qu'ils ne rencontrassent que dans des localités assez distantes entre elles et à se defaire de tout ce qu'ils avaient de trop, et à se pourvoir de tout ce qui leur manquait ; ce qui aurait nécessité des déplacemens continuels, extrêmement pénibles, surtout lorsqu'il aurait fallu traverser des contrées tout à fait désertes, n'offrant aucune ressource pour la subsistance des voyageurs ni aucune garantie pour leur sûreté. Ce qu'on trouva de mieux pour atténuer ces divers inconvéniens fut de convenir de certains lieux où, à des époques déterminées, on se rendrait de toutes parts pour y consommer toutes sortes d'échanges. Telle est l'origine, très-naturelle, de ces grandes *foires*, de tous temps si célèbres dans l'Orient, et dont l'institution, entre autres avantages, procurait à ceux qui les fréquentaient, la faculté de voyager en troupe, et consé-

(*) C'est donc, en général, entendre mal ses intérêts que de vouloir forcer le sol pour en tirer des produits qui ne lui sont pas propres, et qu'on obtiendrait avec avantage en échange des choses qu'il est naturellement disposé à produire en abondance.

quemment avec plus de sécurité. Ces institutions ont été très-utiles à l'époque qui les a vu naître ; peut-être même leur existence est-elle encore nécessaire dans certaines contrées ; mais elles n'en sont pas moins l'indice d'une civilisation très-imparfaite. En Angleterre et en Hollande il n'y a point de foires, parce que le commerce y est toujours et partout également florissant ; et, si l'on en rencontre encore dans quelques contrées de l'Europe, elles ne s'y maintiennent plus que par l'effet d'une longue habitude ; leur importance y va sans cesse en déclinant, et, plutôt ou plus tard, elles doivent infaillement disparaître.

Dans l'origine des foires, il est probable que chacun y transportait lui-même les objets qu'il avait dessein d'y échanger ; mais, comme de fréquens déplacemens devenaient trop onéreux et incommodes, on peut conjecturer que, peu à peu, les hommes les plus actifs, les plus intelligens et les plus intrépides se seront offerts, moyennant la cession d'une certaine portion des objets échangeables, d'y consommer des échanges pour leurs voisins, comme pour eux-mêmes. Ce service, également profitable à ceux qui le recevaient et à ceux qui le rendaient, sera devenu peu à peu une profession distincte de celles de chasseur, de pêcheur, de pasteur, d'agriculteur et de fabricant ; il se sera formé une classe d'hommes qui, n'ayant eux-mêmes rien à échanger, se seront chargés de consommer les échanges de toutes les autres classes, et telle peut être l'origine de la classe des *courtiers*, intermédiaires utiles entre les producteurs de toutes les contrées. On aura remarqué plus tard que, dans l'intervalle d'une foire à la suivante, on pouvait désirer de satisfaire, par des échanges, à des besoins divers qu'on n'avait pas su ou qu'on n'avait pas pu prévoir à l'avance ; ceux qui, les premiers, auront fait cette remarque auront imaginé de rapporter des foires des objets propres à satisfaire ces besoins, de les emmagasiner pour les livrer ensuite, avec bénéfice, à mesure des demandes. Ainsi se sera formée la classe des *marchands*, dont l'existence aura rendu la prévoyance et les déplacemens des autres citoyens de moins en moins nécessaires.

Il est essentiel de remarquer, avant d'aller plus avant, que, dans les diverses transactions entre les producteurs de toutes sortes, les échanges entre les objets de même dénomination ne pouvaient ni ne devaient constamment se faire dans les mêmes proportions, mais tantôt à l'avantage d'une denrée et tantôt à l'avantage d'une autre ; car, indépendamment de la plus ou moins bonne qualité, qui peut faire plus ou moins rechercher une même denrée, on conçoit facilement que si, sur un même marché, le blé est tellement abondant qu'il ne soit pas certain que la totalité puisse en être échangée, et le vin tellement rare qu'il ne puisse satisfaire à toutes les demandes, les possesseurs de blé, dans la crainte de ne pas se défaire de leur denrée, feront, à l'envie, des offres séduisantes aux possesseurs de vin qui, de leur côté, se trouvant assaillis par la multitude toujours croissante des demandeurs, profiteront de la concurrence pour élever de plus en plus leurs prétentions dans les conditions d'échange. Il faudra donc se résigner à donner beaucoup de blé pour avoir un peu de vin : ce sera le contraire si, à l'inverse, le blé est rare et le vin abondant (*).

Le rapport de valeur des choses échangeables est donc de nature à varier sans cesse, suivant leur plus ou moins grande abondance ou rareté relative ; il varie aussi, à abondance relative égale, suivant que les demandes sont plus ou moins nombreuses ; et l'on conçoit que, pour des objets qui ne sont pas d'une né-

---

(*) Il ne faut pas perdre de vue qu'il doit en être exactement de même dans les conditions d'échange des denrées contre des services ou des services contre d'autres services ; et voilà pourquoi, par exemple, les médecins ne s'établissent pas très-volontiers en grand nombre dans un climat très-sain.

cessité indispensable, et, à plus forte raison, pour des objets auxquels l'opinion et la mode donnent seuls de la vogue, le nombre des demandes peut, d'époque à autre, éprouver d'excessives variations. Par exemple, à une certaine époque, bien qu'il y eût, dans les magasins de nos marchands, un assez bon nombre de kaléïdoscopes, la multitude des demandes leur avait fait acquérir une assez grande valeur. Aujourd'hui, au contraire, que personne ne les recherche, n'en restât-il qu'un seul dans le commerce, il y serait d'une valeur à peu près nulle.

La multitude non moins que les oscillations continuelles des rapports de valeur des choses échangeables a dû bientôt devenir une source d'embarras dans les transactions, car, en faisant même abstraction de ces oscillations, il y a, par exemple, près de cinq mille manières de comparer cent objets deux à deux, et le nombre des espèces de choses échangeables s'élève bien au-delà de cent. Mais il s'offrait, pour amoindrir cette difficulté, un moyen tout à fait analogue à celui dont nous faisons journellement usage dans la comparaison des longueurs, des temps, des poids, etc, Il consistait à comparer seulement tous les objets échangeables à un seul d'entre eux, choisi arbitrairement pour cette destination. Supposons, par exemple, que cet objet soit le sel. Du moment qu'on saura que, dans les échanges, cent mesures de sel représentent également vingt-cinq mesures de blé et douze mesures de vin, on saura, par là même, que ces deux quantités de blé et de vin sont équivalentes, et peuvent devenir ainsi le sujet d'une échange immédiat. De cette sorte, il n'y aura pas plus de rapports à étudier et à retenir dans sa mémoire que de choses échangeables, ce qui est incomparablement plus simple.

Voilà donc encore un pas de plus dans la voie des transactions faciles; et ce pas n'a pas tardé beaucoup à être suivi d'un autre bien plus digne de remarque. Dès qu'en effet l'on aura pris le parti d'évaluer toutes les denrées en mesures de l'une d'elles, l'idée de recevoir celle-ci comme objet d'échange contre les autres, dans le cas même où celui qui l'accepterait n'en aurait aucun besoin pour son usage, et ne consentirait à la recevoir que dans l'espoir de l'échanger ensuite contre d'autres objets plus à sa convenance ; cette idée, dis-je, n'a pas dû tarder à éclore. Cette nouvelle manière de procéder dans les échanges, offre, en effet, des avantages faciles à saisir. J'ai aujourd'hui une surabondance de blé, que je désire échanger contre diverses autres denrées, mais on ne m'offre présentement que du sel dont je n'ai nul besoin ; je l'accepte néanmoins, et mes voisins qui en sont dépourvus, et qui apprennent que j'en possède bien au-delà de ce que je puis en consommer, viennent d'eux-mêmes m'offrir d'en échanger des portions plus ou moins notables contre ces mêmes objets que j'avais le dessein d'acquérir, et que peut-être je n'aurais pu échanger directement contre mon blé que par beaucoup de soins et de déplacemens.

Tant qu'on n'avait comparé tous les objets échangeables à un seul d'entre eux que d'une manière purement fictive, et seulement dans la vue de rendre moins nombreux les rapports à étudier pour se mettre en état de consommer facilement toutes sortes d'échanges, ce terme de comparaison pouvait, sans inconvénient, être quelconque, et l'on pourrait indifféremment tout exprimer en mesures de terre, de vin, d'huile ou de blé, en bijoux, en fruits, en têtes de bétails, tout aussi bien qu'en mesures de sel. Mais il ne pouvait plus en être de même du moment que l'on consentait à accepter, en échange de toutes les autres, la chose à laquelle on les comparait toutes ; le choix de cet intermédiaire cessait dès lors d'être indifférent.

On sent d'abord, en effet, que l'exclusion devait être donnée à toutes les choses non transportables et non emmagasinables, c'est-à-dire, aux immeubles ; elle devait l'être également à toutes les choses qui, comme les kaléïdoscopes, dont nous parlions tout à l'heure, n'ont qu'une valeur d'opinion et de mode qui peut, du jour au lendemain, se trouver presque totalement anéantie. Le sel, que nous avons d'abord pris pour exemple, aurait bien été exempt de ces inconvéniens, mais, comparé à un grand nombre d'objets d'échange, il ne peut les équivaloir qu'en très-grande masse ; et voilà dès lors des frais de transport, d'emmagasinement et de surveillance très-onéreux pour les contractans. Il est en Europe tels particuliers à qui une de nos vastes capitales suffirait à peine pour réceler sa fortune, s'il lui prenait la fantaisie de la convertir toute en sel.

Le vin, bien que généralement d'une valeur beaucoup plus grande, à volume égal, conviendrait peut-être moins encore. Sa qualité peut varier, en effet, suivant le territoire et l'année où il est recueilli, et suivant les procédés de fabrication. Sa conservation exige d'ailleurs quelques soins ; et, s'il gagne d'ordinaire en qualité avec le temps, il arrive aussi parfois que le temps le détériore. Les mêmes considérations sont plus ou moins applicables à l'huile, au blé et à la plupart des fruits de la terre qui, dans diverses contrées, ont été ou ont pu être tour à tour employés comme mesure commune dans les échanges.

Quant aux pièces de bétail, outre qu'elles peuvent varier de valeur d'une manière assez notable, dans la même espèce, d'individu à individu ; outre que, pour les conserver, il faut les nourrir, et qu'elles sont sujettes aux maladies et à la mort ; que voudrait-on que fît le propriétaire d'un bœuf qui voudrait se procurer du blé ou du vin, pour la moitié seulement de sa valeur ? Les mêmes motifs d'exclusion existent à l'égard des meubles, des vêtemens, des pierres précieuses et généralement de tous les objets qui ne sauraient être fractionnés sans perte. Sous ce rapport, le vin et le sel seraient de beaucoup préférables.

Nous voilà donc, par ces considérations, amenés à reconnaître que le meilleur intermédiaire dans les transactions, que la chose que l'on peut le plus volontiers se déterminer à accepter en échange de toutes les autres, doit être un objet d'un facile transport, que le temps ne puisse altérer, et dont la conservation n'exige aucun soin ; un objet qui soit toujours identique avec lui-même, en quelque lieu et à quelque époque qu'il ait été recueilli ; et qui sous un volume médiocre, présente, indépendamment des caprices de la mode, une valeur assez considérable, dérivant uniquemment de sa nature et des services qu'on en peut tirer ; un objet enfin qui, ne perdant rien de sa valeur par un fractionnement illimité, puisse se prêter aux échanges même les plus minimes. A tous ces divers caractères, le lecteur a déjà dû reconnaître les métaux, et surtout les métaux précieux ; aussi sont-ce eux en effet que, sans aucun concert, les nations ont fini par destiner unanimement à cet usage, parce qu'ils réunissent à un degré éminent et réunissent seuls toutes les conditions nécessaires pour le bien remplir. Si les gouvernemens sont ensuite intervenus dans cette sorte de convention tacite, ç'a été seulement pour en régler l'exécution et empêcher les abus ; et nous allons voir bientôt que, si leur intervention a pu être quelquefois désastreuse, elle n'a pas été non plus sans quelque utilité.

Les métaux ont d'abord été simplement donnés et reçus en lingots informes ; et c'est ainsi, en particulier, qu'ils circulaient à Rome, sous les premiers rois. Mais alors, à chaque échange, il devenait nécessaire d'être pourvu d'instrumens divers, propres à constater la pureté du lingot, à le fractionner en proportion de la valeur de l'objet qu'on voulait acquérir et à s'assurer du poids de ses fragmens ; toutes opérations qui exigent une habitude et des connaissances que tout le monde ne saurait également posséder, et dont l'exécution pouvait d'ailleurs entraîner une perte de temps et même un déchet plus ou moins préjudiciables aux contractans.

Un moyen de parer à tous ces embarras s'offrait, pour ainsi dire de lui-même ; et on ne dut pas tarder d'y recourir. Il suffisait, en effet, qu'il s'élevât une classe particulière d'artistes qui, dans la vue d'un bénéfice convenable, se chargeassent à la fois du soin de vérifier le degré de pureté des lingots, de les diviser en fragmens de dimensions diverses, mais tellement invariables dans leur forme et dans leur poids que la plus légère soustraction de matière pût facilement être reconnue à l'œil, et qui appliquassent ensuite sur chaque fragment une empreinte qui en garantît le titre et le poids. C'est sous cette forme commode que les métaux ont reçu le nom de *monnaies*, d'*espèces* ou de *numéraire métallique*, et qu'ils circulent aujourd'hui par toute la terre pour servir d'intermédiaire dans tous les contrats.

La conversion des métaux en monnaies est une industrie qu'on aurait fort bien pu abandonner, comme tant d'autres, aux combinaisons de l'intérêt particulier. Il est seulement présumable qu'alors on aurait vu, dans nos marchés, des pièces de monnaie qui, sous la même dénomination, auraient été plus ou moins estimées et recherchées, suivant la marque du fabricant, comme il arrive journellement pour tant d'autres productions de l'industrie. Il aurait pu se faire aussi que certains fabricans, mal fâmés, eussent frauduleusement couvert leur mauvaise monnaie de la marque de quelqu'un de leurs confrères, mieux qu'eux en possession de la confiance du public; c'est encore là ce que nous voyons arriver dans d'autres genres de fabrication; et les tribunaux auraient eu à faire justice des uns comme des autres. Afin donc d'empêcher la confusion et les mécomptes journaliers qu'aurait entraîné un tel état de choses, les gouvernemens ont cru devoir se réserver le monopole de cette branche d'orfévrerie, et en cela ils ont fait, sans doute, une chose utile. A la vérité, ils ont autrefois bien honteusement abusé de ce monopole; mais l'état présent des lumières et de la morale publique nous garantit suffisamment pour l'avenir contre le retour de ces fraudes, non moins préjudiciables, au surplus, à l'autorité qui ne rougirait pas de s'en souiller, qu'elles pourraient l'être à ses victimes. Outre la sécurité plus grande que peut inspirer la fabrication des monnaies mise entre les mains des gouvernemens, le public y trouve encore un autre avantage. Cette fabrication, en effet, est un travail qui entraîne des frais et vaut conséquemment un salaire ; or . les gouvernemens , qui font beaucoup plus en grand que ne pourraient le faire des particuliers , font par là même plus économiquement, et peuvent ainsi livrer cette façon à meilleur compte.

Il faut bien remarquer , en effet, que, de même qu'une masse d'argent façonnée en vaisselle vaut plus que la même masse en lingot, à raison du service qu'on retire de la vaisselle, et que le lingot ne saurait rendre ; pareillement une masse d'argent façonnée en écus doit valoir plus que la même masse brute , et cela à raison de l'usage dont cette façon le rend susceptible. Le métal ainsi modifié a , dans les transactions , une valeur qu'il n'est pas plus au pouvoir des gouvernemens d'accroître que de diminuer. Qu'ils fassent leur monnaie plus forte ou plus faible , qu'ils y introduisent de l'alliage , dans une proportion plus ou moins considérable , qu'ils lui donnnent enfin quelle dénomination il leur plaira , peu importe , les particuliers sauront toujours bien s'arranger en conséquence dans leurs transactions. A la vérité , les gouvernemens pourraient bien statuer que , dans les marchés , on donnera telle quantité de chaque denrée en échange de tel ou tel nombre d'écus ; et de telles folies ne sont même pas sans exemples. Mais si une fois on s'engage dans cette voie périlleuse , il faudra aussi , pour être conséquent, rendre les échanges obligatoires , car autrement ils n'auraient pas lieu ; et , pour maintenir une telle législation , il faudra régner par le sabre , comme à Constantinople, ou bien par les échafauds , comme nous l'avons vu à une époque de trop douloureuse mémoire.

Comme une purification complète des métaux, en même temps qu'elle serait longue et coûteuse , les rendrait trop mous , et par suite trop faciles à entamer par le choc ou le frottement , on est généralement convenu de tolérer , dans ceux qui doivent être convertis en monnaie , l'alliage , en quantité déterminée , de métaux d'une qualité inférieure. En France , par exemple , la monnaie d'argent doit contenir un dixième de son poids d'alliage , ni plus ni moins ; et cinq grammes pesant d'une telle combinaison sont ce qu'on est convenu d'appeler un *franc*. On aurait pu aussi bien lui donner tout autre dénomination, ou encore donner celle-là à une masse plus ou moins considérable du même alliage, ou même de tout autre métal ; il en serait seulement résulté qu'en échange de ce qu'alors on aurait appelé franc, on aurait obtenu des choses consommables en quantité supérieure ou inférieure.

Lorsqu'il se fait un échange de denrées ou autres objets quelconques, sans en excepter même les métaux en lingots, contre des métaux monnayés, il est d'usage d'appeler *vendeur* celui qui livre ces divers objets ; tandis que son co-contractant, je veux dire celui qui livre les écus, est appelé *acheteur* ; et la monnaie livrée par ce dernier est dite le *prix* ou la *valeur vénale* des objets cédés par l'autre. Aujourd'hui, le temps et l'intelligence des ouvriers, comme les matières premières auxquelles ils appliquent leur industrie, les plus nobles conceptions de la pensée comme les services les plus abjects ; la vertu même, tout s'estime à prix d'argent ; il n'y a de différence que du plus au moins (*).

---

(*) Les moralistes peuvent déclamer tant qu'il leur plaira sur ce sujet, débiter des lieux communs et citer les Grecs et les Romains, il n'en demeurera pas moins manifeste qu'être bien vêtu, bien logé, bien nourri, que pouvoir voyager commodément pour son instruction et pour celle d'autrui, que pouvoir rassembler autour de soi de belles et riches collections scientifiques et littérair.s, que pouvoir enfin soulager les misères qui nous sont révélées, fonder des écoles, des établissemens de bienfaisance, etc., sont des jouissances très-réelles ; que ces jouissances ne peuvent être obtenues qu'au prix de beaucoup d'argent, et que conséquemment ce n'est pas récompenser celui qui a rendu de grands services à ses semblables d'une manière dont il ait à rougir que de lui mettre en mains l'instrument à l'aide duquel on se procure tous ces divers avantages. S'il est quelque chose de déplorable et de vraiment immoral, c'est seulement l'estime exclusive que la so-

Mais il importe de remarquer qu'il n'est pas au pouvoir des mots de changer l'essence des choses, que tout est toujours égal de part et d'autre dans un échange dont la nature ne saurait conséquemment dépendre de celle de l'un des objets échangés. Lorsque, par exemple, je vends du blé en écus, et qu'ensuite avec mes écus j'achète du vin, je consomme tour à tour deux échange, tout comme si j'avais d'abord échangé mon blé contre de l'huile, et celle-ci ensuite contre du vin; car, que l'intermédiaire soit écus ou huile, le résultat final est exactement le même dans les deux cas. Lors donc qu'un consommateur échange ses écus contre le pain d'un boulanger, au lieu de dire que ce boulanger vend son pain, que le consommateur l'achète et que les écus qu'il livre en sont le prix, on serait tout aussi fondé à dire que ce dernier vend ses écus au premier, qui les achète au prix du pain qu'il lui livre; c'est même là une chose qu'il ne faut pas perdre un seul instant de vue, quand on veut raisonner sainement sur ces matières.

Or, nous avons observé plus haut que les échanges entre les mêmes objets se faisaient, d'époque à autre, dans des proportions très-variables, et qu'on ne donnait qu'une petite quantité d'une matière rare et recherchée, en échange d'une grande quantité d'une autre matière plus abondante et moins demandée; il devra donc en être encore de même lorsqu'un des objets d'échange sera du numéraire métallique. Lorsqu'il en faudra donner beaucoup pour obtenir une petite quantité des autres objets échangeables, au lieu de dire, comme on a coutume de le faire, que les denrées sont chères, on sera tout aussi fondé à dire que l'argent est à bas prix. On pourra dire, à l'inverse, que l'argent

---

ciété accorde aux possesseurs d'argent, uniquement parce qu'ils ont de l'argent, et sans aucun égard aux moyens plus ou moins honnêtes à l'aide desquels ils l'ont acquis.

est cher, dans les circonstances où l'on a coutume de dire que la vie est à bon compte.

Ce qu'on appelle proprement le prix des denrées est donc de nature à varier sans cesse, et on en peut dire autant du prix du travail. Ce peut être là une chose fort incommode; mais si c'est un mal, il est tout à fait irrémédiable; et même les palliatifs qu'on tenterait imprudemment de lui appliquer ne feraient, le plus souvent, que le rendre plus grave encore (*). Je sais bien que, dans beaucoup d'endroits, l'administration fixe le prix du pain, et même quelquefois celui de la viande (**); mais c'est là un soin qui me paraît tout à fait superflu, et dont elle pourrait fort bien se délivrer, si l'instruction était plus généralement répandue parmi la multitude. Bien que, pour beaucoup de raisons, je ne voulusse pas le conseiller, je concevrais fort bien que, dans la vue de maintenir le pain en tous temps à un prix moyen uniforme, et de compenser ses pertes dans les temps de disette, par ses bénéfices dans des temps plus prospères, un gouvernement se réservât le monopole de la fabrication du pain, comme le nôtre, pour d'autres motifs, exerce celui de la fabrication du tabac; mais une prétendue taxe qu'on est obligé de va-

(*) On se plaint, dans la plupart de nos départemens méridionaux, de l'excessive cherté du bois de chauffage; mais moi, consommateur non suspect, j'oserai dire que le prix n'en est point assez élevé. De toutes les mesures contre les défrichemens, la seule vraiment efficace, serait qu'on s'accoutumât à payer le bois à tel prix qu'à égalité de surface, une forêt ne rendît pas moins à son propriétaire qu'une vigne ou une terre à blé.

(**) Précisément à l'époque où j'écrivais ceci, M. le Maire de Montpellier, à très-bonne intention sans doute, essayait de taxer la viande a l'instar du pain. Les consommateurs comprirent aussitôt que dès lors il ne leur serait plus possible d'avoir, à volonté, des morceaux de choix; ils offrirent eux-mêmes aux bouchers de n'avoir aucun égard a la taxe; et la mesure tomba ainsi presque complètement dès sa naissance.

rier sans cesse suivant le prix du blé, et qui n'empêche pas le peuple de payer quelquefois le pain fort cher, est un véritable enfantillage. Sans doute l'autorité doit veiller soigneusement à ce que la nourriture du peuple soit saine, et à ce qu'on ne le trompe pas plus sur la quantité que sur la qualité; elle doit, dans les temps de disette, favoriser les arrivages par toutes sortes de moyens; mais là, ce me semble, devrait se borner son action; et elle pourrait se reposer avec confiance de tout le reste sur la concurrence et l'intérêt particulier. Il est même présumable qu'alors le pain en deviendrait généralement à meilleur compte. On n'a jamais songé à taxer les glaces ni les sucreries; et aujourd'hui on vient offrir dans nos rues, aux dernières classes du peuple, et pour le plus vil prix, des sucreries et des glaces. Les coalitions de boulangers sont-elles donc plus à redouter que celles des limonadiers et des confiseurs, incomparablement moins nombreux? Ces coalitions seront à peu près impossibles, tout aussi long-temps qu'on ne songera pas à enrégimenter de nouveau les diverses professions, comme elles l'étaient dans un temps vers lequel on tenterait en vain de nous faire rétrograder (*).

J'ai dit que la fluctuation continuelle du prix des diverses denrées était un inconvenient auquel il fallait se résigner, une nécessité qu'il fallait subir. J'ajouterai que, lors même que certaines denrées sont parvenues à un prix excessif, ce pourrait être quelquefois une véritable duperie de livrer aux indigens, à un prix

(*) Nos Chambres législatives reçoivent chaque année des pétitions plus ou moins nombreuses de la part des marchands drapiers contre les tailleurs qui ont l'audace de vendre du drap. Un de leurs confrères de Montpellier, plus avisé qu'eux, s'est contenté d'annoncer, sur son enseigne, qu'il vendait des habits tout faits. On pourrait dire aussi à ceux qui pétitionnent contre le colportage: Qui vous empêche de vous faire colporteurs? Ce n'est pas sans quelque surprise que l'on voit chaque année le très-libéral M. Pétou se faire le champion de ces illibéraux pétitionnaires.

inférieur, celle qu'on aurait en sa possession. Dans une disette, dont l'époque n'est pas assez éloignée de nous pour que nous en ayons perdu le souvenir, on a vu des propriétaires, plus humains que clairvoyans, faire conduire leur blé au marché, pour y être vendu au-dessous du cours. Les prétendus indigens qui l'achetaient étaient, pour la plupart, les prête-noms de quelques spéculateurs avides; et le lendemain le même blé reparaissait sur le marché au prix courant. Il est fort beau sans doute d'exercer la bienfaisance; mais encore faut-il l'exercer avec discernement (*).

Ne perdons pas de vue, au surplus, qu'il s'en faut que le prix ou la valeur vénale des choses se règle seulement sur leur plus ou moins grande utilité; car, s'il en ainsi, le prix du fer devrait être supérieur à celui de l'or. Ce n'est point non plus sur leur plus ou moins grande abondance relative; car la platine, plus rare que l'or, est néanmoins d'un prix bien inférieur. Afin donc qu'un objet soit d'un prix élevé, il faut, à la fois, qu'il soit très-rare et très-recherché (**). Ainsi, tandis que, parmi nous, l'eau

---

(*) A la même époque, un décret impérial établit une sorte de maximum sur le blé. Il y avait alors trop de lumières dans le Conseil d'État pour qu'une mesure aussi fausse pût y naître spontanément; mais le maître avait peu étudié ces matières, et les résistances n'auraient fait qu'irriter sa volonté de fer. Heureusement la mesure devait cesser au moment de la récolte, qui n'était pas très-éloignée. Les Préfets du Gard et de l'Hérault se concertèrent pour faire couper quelque peu de blés encore verts, dans leurs départemens respectifs, qui furent ainsi préservés par l'adresse de leurs administrateurs, de l'application du décret.

(**) Le prix de l'unité de mesure de chaque chose paraîtrait assez bien représenté par une constante multipliant une fraction ayant pour numérateur la masse des demandes et pour dénominateur la masse disponible. Ainsi que cela doit être, le prix serait nul, lorsque la chose ne serait point demandée; infini, lorsqu'elle manquerait dans la circulation, et indéterminé, lorsque, n'existant pas, elle ne serait pas demandée.

On pourrait aussi exprimer la considération qu'attache le public aux diest à peu près sans prix, parce que, bien que tout le monde la recherche, son abondance surpasse de beaucoup le besoin qu'on en a, il est probable néanmoins que, dans la nuit qui mit fin à la bataille de Pavie, François I.er aurait payé de beaucoup d'or un seul verre d'eau potable; et si quelquefois nous donnons plus à une *prima dona* qu'à un Maréchal de France, c'est tout simplement parce qu'à Paris beaucoup de gens se plaisent à entendre bien chanter, et qu'apparemment parmi nous les excellentes voix sont beaucoup plus rares que les grands talens militaires (*).

Faute d'avoir suffisamment réfléchi sur toutes ces matières, beaucoup de gens se font, au sujet des monnaies, des idées tout à fait étranges. Suivant eux le droit de battre monnaie et d'en fixer la valeur est la prérogative exclusive du Prince; cette valeur est uniquement l'effet de l'empreinte qu'il y fait appliquer; la monnaie n'est pas même proprement une valeur, mais un simple signe de valeur; de telle sorte que la totalité des espèces, circulant dans un état, représente aussi la valeur totale des choses commerçables qu'il possède; d'où il suit qu'un pays est d'autant plus riche qu'il possède un plus grand nombre d'écus, et qu'en conséquence un gouvernement doit mettre tous ses soins à soutirer ceux de l'étranger et à empêcher l'exportation des siens. Examinons sommairement ces diverses assertions.

---

vers emplois de la société par une constante multipliant une fraction dont le numérateur serait le revenu que l'emploi rapporte, et le dénominateur le travail qu'il exige.

(*) M.me Saint-Huberti traitant avec l'impératrice Catherine, pour des représentations à donner sur le théâtre de Pétersbourg, élevait ses prétentions un peu haut. Mais je ne donne que tant, lui dit l'Impératrice, à mes Felds-Maréchaux; eh bien, Madame, lui répartit l'Actrice, faites chanter vos Felds-Maréchaux.

Je crois avoir déjà assez clairement établi que, s'il est bon que la fabrication des monnaies soit entre les mains des gouvernemens, le monopole de cette industrie n'est pas plus, au fond, la prérogative du Prince que celui de la fabrication du tabac ou de tout autre objet échangeable; que même s'il est commode que les métaux destinés à circuler comme intermédiaires dans les échanges soient façonnés en écus, cela n'est pas néanmoins indispensable et n'a pas même toujours eu lieu; que cette façon ne fait simplement qu'ajouter un peu à la valeur intrinsèque du métal, valeur qui résulte des diverses sortes d'autres services qu'on en peut retirer, et que l'autorité ne saurait faire varier à son gré; d'où il résulte évidemment que les monnaies ne sont pas simplement un signe de valeur, mais bien une valeur très-réelle. Ce qui est véritablement signe de valeur, ce sont les obligations, lettres de change, billets de banques et autres papiers négociables qui ne circulent que sous la garantie de signatures dont la suppression consommerait leur anéantissement absolu, et qu'on n'accepte qu'à raison de la possibilité de les échanger contres les espèces métalliques qu'ils représentent; tandis que ces espèces, tout comme la vaisselle, lorsqu'elles ont perdu la façon qu'on leur avait donnée, peuvent encore être échangées contre des écus.

On insiste néanmoins, et, dans la vue de prouver que le numéraire métallique n'est qu'un simple signe de valeur, on fait observer qu'un homme peut mourir de faim sur des monceaux d'or. Mais un homme peut également mourir de faim sur des tonneaux de vin, tout comme il peut mourir de soif sur des sacs de blé; et faudra-t-il en conclure que le vin et le blé ne sont également que de simples signes de valeurs? La vérité est qu'il n'est rien au monde qui ne puisse être réputé signe de tout ce qu'on peut se procurer par son intermédiaire, et que les métaux n'ont rien en ceci qui les distingue des autres objets échangeables.

La plus ou moins grande masse des espèces circulantes ne saurait donc, pas plus que celle de toutes autres valeurs, décider à elle seule de la richesse d'un état. Cette richesse se compose, en effet, de la totalité des capitaux que la nation possède, je veux dire des terres, des édifices publics et privés, des troupeaux, des instrumens divers de l'agriculture et de l'industrie, des denrées, des matières premières ou fabriquées, des collections littéraires et scientifiques, des journées que les ouvriers peuvent fournir, de l'intelligence et de l'activité des citoyens et enfin de la masse des écus qui ne fait d'ordinaire qu'une assez faible portion de la fortune publique.

Or, comme tous les objets échangeables ou consommables peuvent être estimés à prix d'argent, il s'ensuit que la richesse d'une nation peut toujours être exprimée en écus; mais alors cette richesse se trouvera exprimée par un nombre d'écus bien supérieur à celui que la nation possédera réellement. Si, par exemple, elle possède un milliard en numéraire, et que toutes ses autres propriétés puissent être évaluées à vingt-quatre milliards, sa richesse totale sera de vingt-cinq milliards. On voit, d'après cela, qu'une nation pourrait posséder peu d'écus, n'en pas même posséder un seul, et être néanmoins incomparablement plus riche qu'une autre chez laquelle, au contraire, le numéraire serait très-abondant (*).

Une nation n'éprouvera donc aucune perte réelle, si une portion de son numéraire s'écoule pour être remplacée par des va-

(*) J'ai connu autrefois une dame plus qu'aisée, habitant une jolie campagne, près d'une grande ville, qui ne mangeait de la viande de boucherie que lorsqu'elle pouvait s'en procurer en échange des lapins ou des poules de sa basse-cour ou des pigeons de son colombier. Cette bonne dame qui, comme beaucoup d'hommes, croyait que l'argent est la seule richesse, se figurait alors que la viande ne lui coûtait rien, parce qu'elle ne l'avait pas payée en écus. Peut-être aurait-elle trouvé du bénéfice à vendre ses lapins et à acheter ensuite de la viande avec le produit qu'elle en aurait tiré, mais son savoir économique n'allait pas jusques-là.

leurs équivalentes ; et il en est exactement ici comme d'un épicier qui ne fait aucune difficulté de se dessaisir de ses écus pour s'approvisionner de sucre et de café. On peut juger, d'après cette remarque, les lois prohibitives de l'exportation du numéraire, dont le moindre inconvénient est d'être à peu près inexécutables (*). Lorsque des écus sortent d'un pays, c'est d'ordinaire pour y faire entrer d'autres objets équivalens ; c'est même très-souvent en échange de matières premières qui, après avoir exercé l'industrie de ses citoyens, font rentrer, par leur réexportation, beaucoup plus d'écus que leur introduction n'en avait fait sortir. Loin que ces prohibitions soient connues des Hollandais, ils fabriquent au contraire de la monnaie pour toute la terre ; leurs écus se trouvent dans toutes les mains ; et on ne voit pas qu'ils en soient plus appauvris.

Il en va tout autrement lorsque le numéraire est exporté pour solder des subventions de guerre, ou encore par l'effet de l'émigration des propriétaires qui vendent leurs immeubles et en emportent le prix au dehors. La perte est alors très-réelle, puisque rien ne rentre en échange. Je ne prétends pas en conclure qu'on ne doive jamais faire la guerre, et encore moins qu'il faille emprisonner les citoyens derrière leurs frontières. Mais il faut du moins bien songer, avant d'entreprendre une guerre, qu'on peut finalement n'être pas les plus forts ; et les gouvernemens doivent, à l'envie, s'appliquer à rendre tellement heureux les peuples sou-

---

(*) Dans l'été de 1803, je me trouvais, faute de voiture, arrêté à Mayence, où ne connaissant personne, j'allais plusieurs fois le jour promener de l'autre côté du Rhin. Il me fallait chaque fois déposer au bureau des douanes les quelques écus que j'avais sur moi. Dans une de ces promenades, je trouvai, sur le pont, le domestique de l'hotel où j'etais logé, les poches pleines d'or qu'il transportait de l'autre côté. Comme il était en veste et nue-tête, les commis étaient tout à fait sans défiance sur son compte.

mis à leur domination, que peu de gens soient tentés d'aller se fixer sous un ciel étranger à celui qui les a vu naître.

Les moyens de produire du blé, du vin, de l'huile et d'autres denrées analogues se trouvant limités d'après l'étendue et la fertilité des terres, et ces objets étant destinés à se consommer, à mesure de leur production, leur masse, et par suite leurs rapports de valeurs, les uns à l'égard des autres, se conservent toujours à peu près les mêmes, ou du moins n'éprouvent que les légères oscillations qu'entraînent les alternatives de bonnes et de mauvaises récoltes. Mais il n'en saurait être de même de leur rapport de valeur avec les écus qui ne se consomment pas, et dont la masse s'accroît journellement par l'effet de l'exploitation des mines. Le peuple se plaint souvent du renchérissement progressif des denrées; mais c'est bien plutôt l'argent qui baisse de valeur, en devenant sans cesse plus abondant. Un sac de blé ne vaut ni plus ni moins aujourd'hui qu'il ne valait au temps de Romulus, de César ou de Constantin; car aujourd'hui, comme alors, il peut suffire à la subsistance d'un individu pendant environ trois mois; mais aujourd'hui ce sac de blé représente beaucoup plus d'écus qu'il n'en représentait alors. On estime que, par l'effet de la découverte de l'Amérique, la masse des métaux précieux a bien plus que décuplé en Europe; et si la valeur vénale des objets consommables ne s'est pas tout à fait accrue dans la même proportion, c'est parce qu'à mesure que ces métaux sont devenus plus abondans, le goût de la vaisselle et des autres objets de luxe, où on les emploie, est aussi devenu plus général; de sorte que la totalité n'a point été mise en circulation sous forme de monnaie.

A moins donc qu'on ne se décide à fermer les mines, ce à quoi on ne paraît guère disposé, le progrès ascendant de la valeur vénale de toutes choses ne saurait s'arrêter, parce qu'à mesure que la masse des espèces métalliques va croissant, elles doivent, par l'effet d'une plus grande abondance, se déprécier de plus en plus. Toutefois, comme le progrès est de nature à s'opérer lentement, chacun a tout le temps de s'arranger en conséquence. Mais un accroissement subit et notable de la masse des métaux précieux serait un événement de nature à bouleverser tout à coup toutes les existences. La grêle, qui détruit en quelques instans les espérances du cultivateur et le fruit de ses travaux d'une année entière, est un fléau beaucoup moins désastreux que ne pourrait l'être une pluie d'or qui se répandrait sur nos campagnes; et c'est ce que comprendront aisément, en particulier, les propriétaires de marais salans de nos côtes. La pluie d'or vient de tomber récemment à leur préjudice dans nos départemens du nord-est (*).

Il faut donc le dire et le répéter souvent aux hommes qui aiment à thésauriser, à ceux qui trouvent plus doux de prêter leur argent aux industrieux ou à l'état que de le faire fructifier par leurs propres travaux, à ceux qui se plaisent à voir briller sur leur table une grande abondance de riche vaisselle, à ceux enfin qui contractent à prix d'argent des marchés à très-long termes; les valeurs qu'ils possèdent, bien que dans une progression plus lente, se déprécient journellement entre leurs mains, comme le faisaient dans le temps nos assignats. Une somme prêtée pour dix années seulement ne vaut plus, lorsqu'on la recouvre, ce qu'elle valait à l'époque où on s'en est dessaisi; de sorte que, pour mettre une rigoureuse équité dans la plupart de nos transactions, nous aurions besoin d'une échelle de dépréciation des espèces, comme il y a trente ans nous en avions une pour le papier monnaie.

Il résulte encore de ces principes que le prix vénal des journées des ouvriers, les gages des domestiques et toutes les sortes

(*) J'écrivais ceci au moment où la découverte de masses énormes de sel gemme, sous sept de nos départemens, avait jeté l'épouvante parmi les propriétaires de nos marais salans du midi.

de salaires doivent aussi s'élever progressivement, pour se tenir sans cesse au niveau du prix des subsistances (*), et que, par contre, c'est fort improprement que les traitemens des fonctionnaires et employés du gouvernement sont appelés *traitemens fixes*. Ils n'ont de fixe que la désignation nominale ; mais, par cela même qu'ils sont stipulés en écus, ils vont sans cesse en décroissant de valeur, comme les espèces qui les expriment. Un des nombreux gouvernemens qui se sont succédés en France pendant trente ans avait imaginé de stipuler tous ces traitemens en myriagrammes de blé. On s'est moqué de cette idée, parce qu'en France on se moque assez indistinctement de tout ; mais elle était, au fond, très-sensée ; c'était là travailler pour les siècles. Les traitemens sont aujourd'hui beaucoup plus élevés qu'ils ne l'étaient il y a cinquante ans ; et le temps n'est peut-être pas fort éloigné où le gouvernement, cédant à de justes plaintes, qui se seront faites entendre de toutes parts, se verra contraint de les élever encore : mais que n'auront pas souffert les pauvres commis à 400 fr., en attendant l'heureuse époque où on se sera enfin décidé à faire droit à leurs réclamations.

J'ai tacitement supposé, dans tout ce qui précède, que la monnaie d'argent circulait seule. Mais, pour éviter d'une part l'inconvénient des pièces de trop petites dimensions et d'une autre celui des poids et volume de numéraire trop considérables, on a fait circuler partout, concurremment avec elle, la monnaie de cuivre et la monnaie d'or. C'est fort bien sans doute ; mais les gouvernemens, trompés par les fausses notions que le public s'est faites sur les monnaies, se sont figurés qu'il était en leur puis-

(*) Beaucoup de nos grands propriétaires, qui gémissent sans cesse du bas prix du blé, se plaignent en même temps du prix élevé des salaires. Il serait beaucoup plus commode, en effet, que les ouvriers travaillassent pour eux gratuitement, et leur achetassent ensuite leur blé à un très-haut prix.

sance de décider du nombre des pièces d'argent qu'il faudrait donner pour obtenir une pièce d'or en échange ; ce qui revenait à supposer que le rapport entre les masses d'or et d'argent en circulation demeurerait à tout jamais invariable, ou que les mines d'or et celles d'argent s'exploiteraient constamment dans des proportions fixes ; or, il n'en est point ainsi ; et il est de fait que, proportion gardée, les mines d'argent rendent beaucoup plus que les mines d'or ; d'où il résulte que l'or doit, de jour en jour, gagner contre l'argent (*). Ce serait l'inverse si, l'exploitation de l'argent demeurant telle qu'elle est aujourd'hui, on découvrait tout à coup des mines d'or très-abondantes. On s'est beaucoup recrié dans les temps contre M. de Calonne, qui de trente louis d'or en avait fait trente-un, parce que, partout et dans tous les temps, à tort ou à raison, ç'a toujours été une jouissance pour le public de se plaindre de l'administration. C'était pourtant une opération fort sage, je dirais presque une opération obligée ; et cette opération le ministre l'exécuta d'une manière fort loyale. Il y avait alors, comme aujourd'hui, beaucoup d'espèce d'or en France, et pourtant l'or n'y circulait plus, par la raison toute simple qu'on y estimait plus un louis d'or que quatre écus de six livres. M. de Calonne fit acheter tous les louis en écus, au prix supérieur qu'ils se trouvaient avoir acquis (**), et en fabriqua de nouvelles pièces d'un moindre poids, contre lesquelles dès lors l'argent soutint mieux la concurrence. Si les choses se maintiennent sur le pied où elles sont présentement, c'est là une opération qu'on se trouvera contraint de renouveler à des époques plus ou moins rapprochées ; et nous voyons même déjà actuellement qu'on estime

---

(*) La mode des bijoux en chrysocale, si elle se soutient, en rendant des matières d'or à la circulation, pourra ralentir un peu ce progrès ; tout comme la mode des stras sa déjà fait baisser sensiblement le prix des diamans et autres pierres précieuses.

(**) Un louis d'or neuf était payé vingt-cinq livres en écus.

généralement mieux une pièce d'or, réputée ne valoir que vingt francs, que quatre pièces d'argent de cinq francs. On s'éviterait tous ces embarras si, sans prétendre fixer la valeur nominale des pièces d'or, on se bornait à avertir, par l'empreinte, qu'elles ont tel poids et tel titre, en laissant au public le soin de régler et de varier, suivant les circonstances, les conditions de l'échange de ces pièces contre la monnaie d'argent (*). C'est de cette manière que l'or d'Espagne circulait en abondance dans nos départemens méridionaux, il y a environ vingt-cinq ans, sans qu'il en soit résulté le moindre inconvénient.

Il y aurait sans doute beaucoup de choses encore à dire sur ce sujet, que je n'ai guère qu'ébauché ; mais la destination assignée à ce qu'on vient de lire m'avertit assez que, peut être, je ne me suis déjà que trop étendu. Toutefois, si cet essai, tout imparfait qu'il est, est accueilli avec quelque indulgence, je pourrai, dans les volumes de l'annuaire qui suivront celui-ci, essayer de traiter d'autres sujets analogues (**).

---

(*) J'ai vu, dans le temps, une mauvaise chanson contre Bonaparte, où on lui reprochait, entre autres choses, d'avoir fait déclarer l'or marchandise. C'était lui faire honneur d'une idée très-saine qui ne lui appartenait pas.

(**) Je me proposais de mettre, dans l'annuaire de 1827, un article sur l'*intéret de l'argent*. Le sort d'une première tentative n'a pas dû m'encourager à un autre tentative beaucoup plus epineuse encore, pour qui ne veut pas trahir ce qu'il croit la verité. Si j'en ai le loisir, je pourrai, dans le présent recueil, essayer ce nouveau sujet qui se lie naturellement à celui des monnaies.

# GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

## *De la courbure des surfaces courbes ;*

Par M. GERGONNE.

LE sujet qui va présentement nous occuper comportant incomparablement plus de détails que n'en offre la théorie de la courbure des courbes planes, dont nous nous sommes occupés au commencement de ce volume, nous nous trouverons contraints de serrer un peu, pour ne pas donner à ce mémoire une étendue démesurée.

Si, à l'exemple d'Euler et de divers autres géomètres, nous ne voulions que démontrer des théorèmes sur la courbure des surfaces courbes, nous pourrions aisément parvenir à notre but d'une manière plus rapide ; mais nous avons le dessein de parvenir à des formules générales, propres à résoudre immédiatement les principaux problèmes qu'on peut se proposer sur les diverses circonstances que présente la courbure des surfaces. Quelques-unes de ces formules pourront paraître compliquées ; mais, outre qu'elles n'en seront que d'une application plus facile, la parfaite symétrie qui y règne constamment, en même temps qu'elle en rend le calcul aisé à suivre, offre une garantie précieuse de leur exactitude.

I. Soit

$$f(x,y,z)=S=0\,, \qquad (1)$$

l'équation d'une surface quelconque, rapportée à trois axes que, pour plus de simplicité, nous supposerons constamment rectangulaires, et soit $(x', y', z')$ un quelconque des points de cette surface, de telle sorte qu'on ait

$$\mathrm{f}(x', y', z')=S'=0 \; ; \qquad (2)$$

Pour transporter l'origine en ce point, en conservant aux axes leur direction primitive, il faudra faire, comme l'on sait,

$$x=x'+t \; , \quad y=y'+u \; , \quad z=z'+v \; ; \qquad (3)$$

$t$, $u$, $v$ étant les symboles des nouvelles coordonnées. Or, cela revient évidemment à supposer que, dans (2), $x'$, $y'$, $z'$ se changent respectivement en $x'+t$, $y'+u$, $z'+v$, ce qui donnera (tom. XX, pag. 260), en ayant d'ailleurs égard à cette même équation (2),

$$\begin{aligned} 0= \frac{dS'}{dx'}t+\frac{dS'}{dy'}u+\frac{d^2S'}{dx'^2}\frac{t^2}{1.2}&+2\frac{d^2S'}{dx'dy'}\frac{tu}{1.2}+\frac{d^2S'}{dy'^2}\frac{u^2}{1.2}+\ldots\ldots \qquad (4)\\ +\frac{dS'}{dz'}v \qquad\qquad &+2\frac{d^2S'}{dz'dx'}\frac{vt}{1.2}+2\frac{d^2S'}{dy'dz'}\frac{uv}{1.2}\\ &+\frac{d^2S'}{dz'^2}\frac{v^2}{1.2} \end{aligned}$$

et telle sera conséquemment l'équation de la surface (1), rapportée aux nouveaux axes; équation dans laquelle $x'$, $y'$, $z'$ sont trois constantes indéterminées, équivalentes à deux seulement, attendu qu'elles sont liées entre elles par la relation (2). On repassera d'ailleurs au système primitif au moyen des formules (3) qui donnent

$$t=x-x' \; , \quad u=y-y' \; , \quad v=z-z' \; . \qquad (5)$$

L'équation (4) peut être regardée comme fondamentale dans toutes les recherches qui vont suivre.

II. Si l'on veut ne considérer que ce qui se passe dans une portion de la surface (4) s'étendant très-peu autour de la nouvelle origine, c'est-à-dire, autour du point $(x', y', z')$ de la surface (1); comme, pour tous les points de cette portion, $t$, $u$, $v$ seront de fort petites quantités, on pourra, sans erreur sensible, négliger, dans l'équation (4), tous les termes de plus d'une dimension par rapport à ces variables. Plus donc cette portion sera petite et plus aussi elle tendra à avoir pour équation

$$\frac{dS'}{dx'}t+\frac{dS'}{dy'}u+\frac{dS'}{dz'}v=0\ ; \qquad (6)$$

de sorte que cette équation représentera *rigoureusement* la portion de surface dont il s'agit, lorsque cette portion se réduira à l'origine des $t$, $u$, $v$, c'est-à-dire, au point $(x', y', z')$. On peut donc dire que l'équation (6) est celle d'un plan qui, en ce point, a exactement même direction que la surface (1). Un tel plan est dit *tangent* à cette surface, au point $(x', y', z')$ qui en dit le *point de contact* avec elle.

III. Par l'origine des $t$, $u$, $v$, soit conduite arbitrairement une droite, exprimée par la triple équation

$$\frac{t}{\text{Cos}.\alpha}=\frac{u}{\text{Cos}.\beta}=\frac{v}{\text{Cos}.\gamma}=r\ ; \qquad (7)$$

en tirant de là les valeurs de $t$, $u$, $v$, pour les substituer dans l'équation (4), celle-ci deviendra

$$0=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{dS'}{dx'}\text{Cos}.\alpha\\[2ex] +\dfrac{dS'}{dy'}\text{Cos}.\beta\\[2ex] +\dfrac{dS'}{dz'}\text{Cos}.\gamma\end{array}\right\}r+\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^2S'}{dx'^2}\text{Cos}.^2\alpha+2\dfrac{d^2S'}{dy'dz'}\text{Cos}.\beta\text{Cos}.\gamma\\[2ex] +\dfrac{d^2S'}{dy'^2}\text{Cos}.^2\beta+2\dfrac{d^2S'}{dz'dx'}\text{Cos}.\gamma\text{Cos}.\alpha\\[2ex] +\dfrac{d^2S'}{dz'^2}\text{Cos}.^2\gamma+2\dfrac{d^2S'}{dx'dy'}\text{Cos}.\alpha\text{Cos}.\beta\end{array}\right\}r^2+\ldots$$

et exprimera les distances de l'origine aux différens points où la droite (7) perce la surface (4). Cette équation est d'abord satisfaite en posant $r=0$, comme on pouvait bien le prévoir, puisque la droite (7) passe par l'origine des $t$, $u$, $v$, qui est un point de cette surface. Les autres points communs à la droite (7) et à la surface (4) seront donnés par l'équation

$$0=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}\mathrm{Cos}.\alpha\\+\dfrac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}\mathrm{Cos}.\beta\\+\dfrac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}z'}\mathrm{Cos}.\gamma\end{array}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}x'^2}\mathrm{Cos}.^2\alpha+2\dfrac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'}\mathrm{Cos}.\beta\mathrm{Cos}.\gamma\\+\dfrac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}y'^2}\mathrm{Cos}.^2\beta+2\dfrac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}z'\mathrm{d}x'}\mathrm{Cos}.\gamma\mathrm{Cos}.\alpha\\+\dfrac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}z'^2}\mathrm{Cos}.^2\gamma+2\dfrac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}\mathrm{Cos}.\alpha\mathrm{Cos}.\beta\end{array}\right\}r+\dots$$

Si donc on suppose les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ indéterminés, et qu'on veuille profiter de leur indétermination pour faire en sorte qu'un second point commun vienne se confondre avec le premier, à l'origine des $t$, $u$, $v$, c'est-à-dire, au point $(x', y', z')$, il faudra que le second membre de cette dernière équation devienne de nouveau divisible par $r$; ce qui exigera qu'on ait

$$\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}\mathrm{Cos}.\alpha+\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}y'}\mathrm{Cos}.\beta+\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}z'}\mathrm{Cos}.\gamma=0\ ; \qquad (8)$$

alors la droite (7) sera dite *tangente* à la surface (4), à l'origine des $t$, $u$, $v$, c'est-à-dire, au point $(x', y', z')$ qui en sera dit le *point de contact* avec elle ; et comme, outre l'équation (8), les trois constantes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ne sont liées entre elles que par la seule équation

$$\mathrm{Cos}.^2\alpha+\mathrm{Cos}.^2\beta+\mathrm{Cos}.^2\gamma=1\ ;$$

il s'ensuit qu'elles demeurent encore indéterminées ; ce qui revient à dire que, *par un même point quelconque d'une surface courbe*, *on peut mener à cette surface une infinité de tangentes différentes.*

Pour obtenir l'équation du lieu géométrique de toutes ces tangentes, il ne s'agit que d'éliminer Cos.$\alpha$, Cos.$\beta$, Cos.$\gamma$ de l'équation (8), au moyen de la triple équation (7) ; ce qui, en supprimant le dénominateur $r$, conduit de nouveau à l'équation (6) du plan tangent. Ainsi, *les tangentes à une surface courbe, par un quelconque de ses points, sont toutes situées dans le plan tangent à cette surface en ce point* ; et il est aisé de voir, qu'à l'inverse, *toute droite menée dans le plan tangent à une surface courbe, par son point de contact avec cette surface, est une tangente à cette même surface en ce même point.* Il en résulte encore que *toute section plane faite dans une surface courbe, en un quelconque de ses points, a pour tangente en ce point l'intersection du plan sécant avec son plan tangent en ce même point.* Et, comme deux droites issues d'un même point déterminent un plan, il s'ensuit que, *si, par l'un quelconque des points d'une surface courbe, on conduit deux plans sécants à cette surface, et en outre, par le même point, des tangentes aux courbes planes que ces deux plans déterminent, le plan conduit par ces deux tangentes sera tangent à la surface courbe en ce point.*

IV. Le plan tangent (6) à la surface (4) au point ($x'$, $y'$, $z'$) peut d'ailleurs couper cette surface, suivant une courbe plane ; et leurs points communs seront donnés par l'ensemble des équations de ce plan et de cette surface. On pourra d'ailleurs, dans la recherche de ces points communs, substituer à l'équation du plan tangent ou à celle de la surface courbe, telle combinaison on voudra faire de l'une et de l'autre, de manière cependant à n'en pas élever le degré. On pourra donc, en particulier, dans cette recherche, remplacer l'équation (4) par sa différence avec l'équation (6), et dire, en conséquence, que les points communs à la surface (4) et à son plan tangent sont donnés par la combinaison de l'équation (6) avec la suivante :

$$0=\frac{d^2S'}{dx'^2}\,\frac{t^2}{1.2}+2\,\frac{d^2S'}{dx'dy'}\,\frac{tu}{1.2}+\frac{d^2S'}{dy'^2}\,\frac{u^2}{1.2}+\ldots\ldots$$

$$+2\,\frac{d^2S'}{dz'dx'}\,\frac{vt}{1.2}+2\,\frac{d^2S'}{dy'dz'}\,\frac{uv}{1.2}$$

$$+\frac{d^2S'}{dx'dy'}\,\frac{v^2}{1.2}\ .$$

Si l'on veut ne considérer seulement que ce qui se passe dans le voisinage de l'origine des $t$, $u$, $v$, c'est-à-dire, dans le voisinage du point ($x'$, $y'$, $z'$), on pourra faire abstraction, dans cette dernière équation, des termes de plus de deux dimensions en $t$, $u$, $v$; de sorte qu'il sera rigoureusement vrai de dire que le point de contact de la surface (1) avec son plan tangent en ($x'$, $y'$, $z'$) ou, ce qui revient au même, de la surface (4), avec son plan tangent à l'origine des $t$, $u$, $v$ est donné par l'ensemble de l'équation (6) et de l'équation

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2S'}{dx'^2}\,t^2+2\,\frac{d^2S'}{dy'dz'}\,uv \\ &+\frac{d^2S'}{dy'^2}\,u^2+2\,\frac{d^2S'}{dz'dx'}\,vt \\ &+\frac{d^2S'}{dz'^2}\,v^2+2\,\frac{d^2S'}{dx'dy'}\,tu \end{aligned}\right\}=0\ ; \qquad (9)$$

or, cette dernière équation est celle d'une surface du second ordre, de dimensions infiniment petites, laquelle est coupée par le plan (6) suivant une ligne du second ordre, qui a elle-même des dimensions infiniment petites ; donc *le point de contact d'une surface quelconque avec le plan tangent en un quelconque de ses points est une ligne du second ordre de dimensions infiniment petites ;* ce qui revient encore à dire que *le plan sécant parallèle au plan tan-*

*gent en un quelconque des points d'une surface quelconque, détermine, sur cette surface, une courbe plane qui tend de plus en plus à devenir une ligne du second ordre, à mesure que les deux plans sont plus voisins l'un de l'autre.* Cette remarque est due à M. Ch. Dupin.

V. Bien que le point de contact d'une surface courbe avec son plan tangent soit une ligne du second ordre de dimensions infiniment petites, il n'en est pas moins du plus grand intérêt, pour les recherches dont nous aurons à nous occuper, de savoir la déterminer, pour chaque plan tangent, en particulier, d'en connaître la nature, la situation sur ce plan, les directions de ses diamètres conjugués ou principaux, ainsi que la direction de ses asymptotes, si elle est hyperbolique. Arrêtons-nous donc, avant d'aller plus loin, à toutes ces diverses déterminations.

Mais, pour élargir un peu la question, et en même temps pour la simplifier, en nous débarrassant momentanément des notations différentielles, considérons les deux équations

$$At+Bu+Cv=0\,, \qquad (10)$$

$$Dt^2+Eu^2+Fv^2+2Guv+2Hvt+2Ktu=L\,, \qquad (11)$$

dont la première est celle d'un plan, passant par l'origine des coordonnées, tandis que la seconde est celle d'une surface du second ordre qui y a son centre ; de sorte qu'elles représentent, par leur ensemble, une ligne du second ordre tracée sur ce plan, et ayant son centre au même point.

Soient $r$, $r'$ deux demi-diamètres de la surface (11), formant respectivement, avec les axes des $t$, $u$, $v$, des angles $\alpha$ et $\alpha'$, $\beta$ et $\beta'$, $\gamma$ et $\gamma'$ ; leurs équations seront :

$$\frac{t}{\mathrm{Cos.}\alpha}=\frac{u}{\mathrm{Cos.}\beta}=\frac{v}{\mathrm{Cos.}\gamma}=r\,, \quad (12) \qquad \frac{t}{\mathrm{Cos.}\alpha'}=\frac{u}{\mathrm{Cos.}\beta'}=\frac{v}{\mathrm{Cos.}\gamma'}=r'\,; \quad (13)$$

et on aura, comme l'on sait,

$$\mathrm{Cos.}^2\alpha+\mathrm{Cos.}^2\beta+\mathrm{Cos.}^2\gamma=1\,, \quad (14) \qquad \mathrm{Cos.}^2\alpha'+\mathrm{Cos.}^2\beta'+\mathrm{Cos.}^2\gamma'=1\,. \quad (15)$$

Si l'on veut, en outre, que ces deux demi-diamètres appartiennent à la courbe déterminée par les deux équations, il faudra qu'ils soient sur le plan (10), et que conséquemment leurs équations vérifient la sienne ; ce qui donnera encore

$$A\mathrm{Cos.}\alpha+B\mathrm{Cos.}\beta+C\mathrm{Cos.}\gamma=0\,, \quad (16) \qquad A\mathrm{Cos.}\alpha'+B\mathrm{Cos.}\beta'+C\mathrm{Cos.}\gamma'=0\,; \quad (17)$$

et, tant que les six angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ ne seront liés entre eux que par ces quatre relations, les deux demi-diamètres pourront être quelconques sur le plan de la courbe.

Cherchons présentement quelle nouvelle condition il faudra joindre à celles-là pour que ces deux demi-diamètres soient conjugués l'un à l'autre. Pour cela rappelons-nous que, dans toute ligne du second ordre, si de l'un quelconque des points de la courbe on mène aux deux extrémités d'un même diamètre quelconque deux cordes dites *supplémentaires*, les diamètres respectivement parallèles à ces cordes seront conjugués l'un à l'autre ; d'où il résulte qu'à l'inverse, si, menant par les extrémités d'un diamètre des parallèles respectives à deux autres diamètres, ces parallèles se coupent sur la courbe, ces derniers seront conjugués l'un à l'autre.

Cela posé, soit $(a\,,\,b\,,\,c)$ l'une des extrémités de l'un quelconque des diamètres de la courbe donnée par les équations (10) et (11), de telle sorte qu'on ait, à la fois,

$$Aa+Bb+Cc=0\,, \qquad (18)$$

$$Da^2+Eb^2+Fc^2+2Gbc+2Hca+2Kab=L\,; \qquad (19)$$

l'autre extrémité de ce diamètre sera $(-a,-b,-c)$ ; et, si l'on mène, par le premier de ces points, une parallèle au diamètre (12) et par le second une parallèle au diamètre (13) ; en désignant par ( $t'$ , $u'$ , $v'$ ) le point de concours de ces deux droites , on devra avoir

$$\frac{t'-a}{\text{Cos}.\alpha}=\frac{u'-b}{\text{Cos}.\beta}=\frac{v'-c}{\text{Cos}.\gamma}\,, \quad (20) \qquad \frac{t'+a}{\text{Cos}.\alpha'}=\frac{u'+b}{\text{Cos}.\beta'}=\frac{v'+c}{\text{Cos}\,\gamma'}\,, \quad (21)$$

et , pour que ces deux diamètres soient conjugués l'un à l'autre , il faudra que le point ( $t'$ , $u'$ , $v'$ ) vérifie l'équation (11) , c'est-à-dire qu'il faudra qu'on ait

$$Dt'^2+Eu'^2+Fv'^2+2Gu'v'+2Hv't'+2Kt'u'=L \;;$$

équation qui , en lui retranchant l'équation (19) , peut être mise sous cette forme

$$\left\{\begin{array}{l} \quad D(t'-a)(t'+a)+G[(u'-b)(v'+c)+(v'-c)(u'+b)] \\ +E(u'-b)(u'+b)+H[(v'-c)(t'+a)+(t'-a)(v'+c)] \\ +F(v'-c)(v'+c)+K[(t'-a)(u'+b)+(u'-b)(t'+a)] \end{array}\right\}=0\,,$$

chassant alors de cette dernière équation deux quelconques des binomes $t'-a$ , $u'-b$ , $v'-c$ , et deux quelconques des binomes $t'+a$ , $u'+b$ , $v'+c$ , au moyen des relations (20) , (21) , les deux autres binomes en disparaîtront d'eux-mêmes et l'on aura pour la condition à joindre aux quatre déjà établies , afin que les demi-diamètres (12) , (13) soient conjugués l'un à l'autre

$$\left\{\begin{array}{l} \quad D\text{Cos}.\alpha\text{Cos}.\alpha'+G(\text{Cos}.\beta\text{Cos}.\gamma'+\text{Cos}.\gamma\text{Cos}.\beta') \\ +E\text{Cos}.\beta\text{Cos}.\beta'+H(\text{Cos}.\gamma\text{Cos}.\alpha'+\text{Cos}.\alpha\text{Cos}.\gamma') \\ +F\text{Cos}.\gamma\text{Cos}.\gamma'+K(\text{Cos}.\delta\text{Cos}.\beta'+\text{Cos}.\beta\text{Cos}.\alpha') \end{array}\right\}=0\,; \quad (22)$$

On sait que, dans une hyperbole, une seule asymptote fait la fonction de deux diamètres conjugués qui se confondent ; d'où il suit que, si l'on veut que le diamètre (12) soit une asymptote de la courbe supposée hyperbolique, il ne s'agira que de poser $\alpha'=\alpha$, $\beta'=\beta$, $\gamma'=\gamma$ ; de sorte qu'on aura alors, pour déterminer $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, outre les équations (14) et (16), ce que devient l'équation (22) dans cette hypothèse, c'est-à-dire

$$\left.\begin{array}{l} D\text{Cos.}^2\alpha+2G\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma \\ +E\text{Cos.}^2\beta+2H\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\alpha \\ +F\text{Cos.}^2\gamma+2K\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta \end{array}\right\}=0\,. \qquad (23)$$

Si donc on substituait, tour à tour, dans la double équation (12), les doubles valeurs de $\text{Cos.}\alpha$, $\text{Cos.}\beta$, $\text{Cos.}\gamma$ données par les équations (14), (16), (23), on obtiendrait ainsi les équations des deux asymptotes de la section supposée hyperbolique. Or, cela revient à éliminer $\text{Cos.}\alpha$, $\text{Cos.}\beta$, $\text{Cos.}\gamma$ entre la double équation (12) et les trois autres ; ce qui peut se faire beaucoup plus simplement en substituant dans celles-ci les valeurs des trois cosinus tirées de l'autre, ce qui donnera, outre l'équation (10), l'équation

$$Dt^2+Eu^2+Fv^2+2Guv+2Hvt+2Ktu=0\,, \qquad (24)$$

qui, dans le cas d'une section hyperbolique, appartient ainsi au système de deux plans qui coupent le plan (10) suivant les asymptotes de la courbe.

Si l'on veut que les deux diamètres conjugués (12) et (13) soient rectangulaires ou principaux, il faudra aux cinq conditions déjà obtenues ajouter encore la suivante :

$$\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\alpha'+\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\beta'+\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\gamma'=0\,, \qquad (25)$$

qui exprime que les deux diamètres conjugués (12) et (13) sont perpendiculaires l'un à l'autre ; et alors nos six angles se trouveront complètement déterminés, puisqu'ils seront liés entre eux par six relations distinctes.

Mais comme ces relations demeurent invariables, lorsqu'on y permute simultanément entre eux $\alpha$ et $\alpha'$, $\beta$ et $\beta'$, $\gamma$ et $\gamma'$, il s'ensuit que ces six angles doivent être déterminables par trois équations seulement en $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, donnant deux valeurs pour le cosinus de chacun de ces trois angles. Deux de ces équations sont les équations (14) et (16), et la troisième s'obtient en éliminant deux quelconques des quantités $\mathrm{Cos}.\alpha'$, $\mathrm{Cos}.\beta'$, $\mathrm{Cos}.\gamma'$ entre les équations (17), (22), (25) ; ce qui en fait aussi disparaître la troisième et donne

$$\left\{\begin{aligned}&(B\mathrm{Cos}\,\gamma-C\mathrm{Cos}.\beta)(D\mathrm{Cos}.\alpha+K\mathrm{Cos}.\beta+H\mathrm{Cos}.\gamma)\\&+(C\mathrm{Cos}.\alpha-A\mathrm{Cos}.\gamma)(E\mathrm{Cos}.\beta+G\mathrm{Cos}.\gamma+K\mathrm{Cos}.\alpha)\\&+(A\mathrm{Cos}.\beta-B\mathrm{Cos}.\alpha)(F\mathrm{Cos}.\gamma+H\mathrm{Cos}.\alpha+G\mathrm{Cos}.\beta)\end{aligned}\right\}. \quad (26)$$

Telle est donc l'équation qu'il faudra combiner avec les équations (14) et (16) pour obtenir les doubles valeurs de $\mathrm{Cos}.\alpha$, $\mathrm{Cos}.\beta$, $\mathrm{Cos}.\gamma$ qui conviennent aux deux diamètres principaux.

Si, ayant déterminé les doubles valeurs des trois cosinus, au moyen de ces équations, on les substitue tour à tour dans la double équation (12), on obtiendra les équations des deux diamètres principaux de la courbe donnée par les deux équations (10) et (11). Or, cela revient évidemment à éliminer $\mathrm{Cos}.\alpha$, $\mathrm{Cos}.\beta$, $\mathrm{Cos}.\gamma$ entre la double équation (12) et les équations (16) et (26), ce qu'on peut faire beaucoup plus simplement en substituant dans les deux dernières les valeurs de deux quelconques de ces trois cosinus, ce qui en fera aussi disparaître le troisième et donnera, outre l'équation (10), l'équation

$$\left.\begin{array}{l}(Bv-Cu)(Dt+Ku+Hv)\\+(Ct-Av)(Eu+Gv+Kt)\\+(Au-Bt)(Fv+Ht+Gu)\end{array}\right\}=0\ ; \qquad (27)$$

équation commune à deux plans coupant le plan (10) suivant les diamètres principaux de la courbe donnée par les équations (10) et (11). Il est visible d'ailleurs que ces deux plans se coupent suivant une droite donnée par la double équation

$$\frac{t}{A}=\frac{u}{B}=\frac{v}{C}\ , \qquad (28)$$

perpendiculaire au plan (10) de la courbe et passant par son centre ; de manière qu'ils sont eux-mêmes perpendiculaires à ce plan.

Si, dans l'équation (11), on substitue pour $t$, $u$, $v$ leurs valeurs en $r$, données par la double équation (12), elle deviendra

$$\left.\begin{array}{l}D\mathrm{Cos.}^2\alpha+2G\mathrm{Cos.}\beta\mathrm{Cos.}\gamma\\+E\mathrm{Cos.}^2\beta+2H\mathrm{Cos.}\gamma\mathrm{Cos.}\alpha\\+F\mathrm{Cos.}^2\gamma+2K\mathrm{Cos.}\alpha\mathrm{Cos.}\beta\end{array}\right\}r^2=L\ ; \qquad (29)$$

de sorte que, si l'on substitue, tour à tour, dans cette dernière, pour $\mathrm{Cos.}\alpha$, $\mathrm{Cos.}\beta$, $\mathrm{Cos.}\gamma$, les doubles valeurs données par les équations (14), (16), (26), on obtiendra les deux valeurs de $r^2$ qui conviennent aux demi-diamètres principaux de la courbe. Donc aussi on obtiendra l'équation de laquelle dépendent ces deux valeurs de $r^2$, en éliminant ces trois cosinus entre les quatre équations (14), (16), (26), (29).

Mais, pour faciliter l'élimination, tâchons de remplacer les équations (16) et (29) par deux autres qui soient linéaires par rapport à ces mêmes cosinus. Pour cela remarquons d'abord que l'équation (29) peut être écrite comme il suit :

$$\left.\begin{array}{r} r^2(D\text{Cos}.\alpha+K\text{Cos}.\beta+H\text{Cos}.\gamma)\text{Cos}.\alpha \\ +r^2(E\text{Cos}.\beta+G\text{Cos}.\gamma+K\text{Cos}.\alpha)\text{Cos}.\beta \\ +r^2(F\text{Cos}.\gamma+H\text{Cos}.\alpha+G\text{Cos}.\beta)\text{Cos}.\gamma \end{array}\right\}=L\,. \quad (30)$$

Or, si présentement on élimine, tour à tour, entre les deux équations (26) et (30) chacun des trinomes

$$D\text{Cos}.\alpha+K\text{Cos}.\beta+H\text{Cos}.\gamma\;,$$

$$E\text{Cos}.\beta+G\text{Cos}.\gamma+K\text{Cos}.\alpha\;;$$

$$F\text{Cos}.\gamma+H\text{Cos}.\alpha+G\text{Cos}.\beta\;;$$

en opérant toutes les simplifications que pourront permettre les relations (14) et (16), on trouvera

$$\left.\begin{array}{r} B(F\text{Cos}.\gamma+H\text{Cos}.\alpha+G\text{Cos}.\beta) \\ -C(E\text{Cos}.\beta+G\text{Cos}.\gamma+K\text{Cos}.\alpha) \end{array}\right\}r^2=(B\text{Cos}.\gamma-C\text{Cos}.\beta)L\;,$$

$$\left.\begin{array}{r} C(D\text{Cos}.\alpha+K\text{Cos}.\beta+H\text{Cos}.\gamma) \\ -A(F\text{Cos}.\gamma+H\text{Cos}.\alpha+G\text{Cos}.\beta) \end{array}\right\}r^2=(C\text{Cos}.\alpha-A\text{Cos}.\gamma)L\;,$$

$$\left.\begin{array}{r} A(E\text{Cos}.\beta+G\text{Cos}.\gamma+K\text{Cos}.\alpha) \\ -B(D\text{Cos}.\alpha+K\text{Cos}.\beta+H\text{Cos}.\gamma) \end{array}\right\}r^2=(A\text{Cos}.\beta-B\text{Cos}.\alpha)L\;;$$

équations linéaires dont chacune est évidemment comportée par les deux autres, et dont deux quelconques peuvent remplacer les équations (26) et (29). Si, dans les deux premières, par exemple, on substitue pour Cos.$\gamma$ sa valeur donnée par l'équation (16), elles deviendront

$$\left.\begin{array}{l} \{[C^2K-C(AG+BH)+ABF]r^2-ABL\}\text{Cos.}\alpha \\ +\{(B^2F-2BCG+C^2E)r^2-(B^2+C^2)L\}\text{Cos.}\beta \end{array}\right\}=0\ , \qquad (31)$$

$$\left.\begin{array}{l} \{[C^2K-C(AG+BH)+ABF]r^2-ABL\}\text{Cos.}\beta \\ +\{(C^2D-2CAH+A^2F)r^2-(C^2+A^2)L\}\text{Cos.}\alpha \end{array}\right\}=0\ , \qquad (32)$$

ce qui donnera, en transposant, multipliant membre à membre, et supprimant le facteur Cos.$\alpha$, Cos.$\beta$, commun aux deux membres de l'équation résultante

$$\{[C^2K-C(AG+BH)+ABF]r^2-ABL\}^2$$

$$-\{(B^2F-2BCG+C^2E)r^2-(B^2+C^2)L\}\{(C^2D-2CAH+A^2E)r^2-(C^2+A^2L)\}=0$$

En développant, réduisant, divisant par $C^2$, ordonnant et posant, pour abréger

$$\left.\begin{array}{l} A^2(G^2-EF)+2BC(DG-HK) \\ +B^2(H^2-FD)+2CA(EH-KG) \\ +C^2(K^2-DE)+2AB(FK-GH) \end{array}\right\}=P\ , \qquad (33)$$

$$\left.\begin{array}{l} B^2D-2BCG+C^2E \\ +C^2E-2CAH+A^2F \\ +A^2F-2ABK+B^2D \end{array}\right\}=Q\ , \qquad (34)$$

$$A^2+B^2+C^2=R\ , \qquad (35)$$

cette équation deviendra

$$Pr^4 + QLr^2 - RL^2 = 0 , \qquad (36)$$

et donnera, pour ses quatre racines, ne différant deux à deux que par le signe, les quatre demi-diamètres principaux de la courbe exprimée par l'ensemble des équations (10) et (11).

Le dernier terme de l'équation (36) étant essentiellement négatif, cette équation ne pourra signifier quelque chose qu'autant que les coefficiens $P$ et $QL$ ne seront pas tous deux négatifs. Si alors $P$ est positif, quel que soit d'ailleurs le signe de $QL$, l'équation aura toujours une variation et une permanence; c'est-à-dire, que les deux valeurs de $r^2$ seront alors de signes contraires; de sorte que, des quatre valeurs de $r$ deux seront réelles et les deux autres imaginaires, la courbe donnée par les deux équations (10) et (11) sera donc alors une hyperbole.

Si, dans le cas de $P$ positif, $Q$ se trouvait être nul, les deux valeurs de $r^2$ ne différant alors l'une de l'autre que par le signe, l'hyperbole serait équilatère.

Lorsqu'au contraire $P$ est négatif, l'équation (36) ne peut signifier quelque chose qu'autant que $QL$ est positif; et comme alors cette équation présente deux variations, les deux valeurs de $r^2$ doivent être positives, et, par suite, les valeurs de $r$ sont toutes quatre réelles; la courbe doit donc être une ellipse.

Si l'on avait $P=0$ et $QL$ positifs; des deux valeurs de $r^2$ une serait infinie et l'autre finie et positive; des quatre valeurs de $r$ deux seraient donc infinies et les deux autres finies et réelles; la courbe se réduirait donc ainsi à deux droites parallèles, d'autant plus rapprochées l'une de l'autre que $L$ serait plus petit, et qui conséquemment se confondraient en une seule droite, si $L$ était nul.

Pour que la courbe soit un cercle, c'est-à-dire, pour qu'elle ait une infinité de systèmes de diamètres principaux, il faut qu'en exprimant que le diamètre (12) est un diamètre principal, $\cos\alpha$, $\cos.\beta$, $\cos.\gamma$ demeurent indéterminés, et que conséquemment il en soit de même de leurs rapports deux à deux ; il faudra donc que, dans les équations (31) et (32), on ait

$$(B^2F-2BCG+C^2E)r^2=(B^2+C^2)L\ , \qquad (37)$$

$$(C^2D-2CAH+A^2F)r^2=(C^2+A^2)L\ , \qquad (38)$$

$$\{C^2K-C(AG+BH)+ABF\}r^2=ABL\ .$$

En prenant la somme des produits respectifs de ces trois équations par $A^2$, $B^2$ et $-2AB$, on obtient, en réduisant et divisant par $C^2$,

$$(A^2E-2ABK+B^2G)r^2=(A^2+B^2)L\ ; \qquad (39)$$

équation qui peut conséquemment remplacer la dernière. Les équations (37), (38), (39) donneront la valeur du quarré du rayon du cercle, sous trois formes différentes ; et, en égalant entre elles les trois expressions obtenues, on obtiendra, pour la double condition exprimant que la courbe donnée par les équations (10) et (11) est un cercle,

$$\frac{B^2F-2BCG+C^2E}{B^2+C^2}=\frac{C^2D-2CAH+A^2F}{C^2+A^2}=\frac{A^2E-2ABK+B^2G}{A^2+B^2}\ . \qquad (40)$$

VI. Pour appliquer présentement ces divers résultats au point de contact d'une surface courbe avec son plan tangent, il ne s'agit que de faire coïncider respectivement les deux équations (10) et (11) avec les deux équations (6) et (9), ce qui se réduit simplement à poser, en supprimant les accens,

$$\left.\begin{array}{lll} A=\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\,, & B=\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\,, & C=\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}\,, \\[2ex] D=\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x^2}\,, & E=\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y^2}\,, & F=\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}z^2}\,, \\[2ex] G=\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}\,, & H=\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}\,, & K=\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\,. \end{array}\right\} \quad (41)$$

et l'on obtiendra ainsi les propositions suivantes :

1.° *Il existe, en général, sur toute surface courbe une courbe à double courbure le long de laquelle les points de contact des plans tangens sont tous paraboliques. Cette courbe partage la surface courbe en deux régions dans l'une desquelles les points de contact des plans tangens sont hyperboliques tandis, que, dans l'autre, ils sont elliptiques.*

Si $S=\mathrm{f}(x,y,z)=0$ est l'équation de la surface courbe dont il s'agit, rapportée à trois axes rectangulaires quelconques, la courbe à double courbure, dont il vient d'être question, sera donnée sur cette surface, par son intersection avec une autre surface ayant (33) pour équation

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)^2\left[\left(\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}\right)^2-\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y^2}\,\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}z^2}\right]+2\,\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\,\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x^2}\,\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}-\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}\,\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) \\[2ex] +\left(\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\right)^2\left[\left(\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}\right)^2-\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}z^2}\,\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x^2}\right]+2\,\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}\,\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y^2}\,\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}-\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\,\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}\right) \\[2ex] +\left(\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}\right)^2\left[\left(\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right)^2-\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x^2}\,\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y^2}\right]+2\,\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\,\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}z^2}\,\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}-\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}\,\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}\right) \end{array}\right\}=0\,, \quad (42)$$

Un point $(x,y,z)$ de la surface $S=0$ appartient à la région des points de contact hyperboliques ou à la région des points de contact elliptiques, suivant que, pour ce point, le premie membre de l'équation (42) est positif ou négatif.

2.° *Dans la région des points de contact hyperboliques, il existe une courbe à double courbure le long de laquelle les points de contact sont tous des hyperboles équilatères. Cette courbe à double courbure subdivise cette région en deux autres telles que, dans l'une, l'angle des asymptotes est aigu, tandis qu'il est obtus dans l'autre.*

Cette nouvelle courbe à double courbure est donnée, sur la surface $S=0$, par son intersection avec une autre surface ayant pour équation (34)

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{dS}{dy}\right)^2\frac{d^2S}{dz^2}-2\frac{dS}{dy}\,\frac{dS}{dz}\,\frac{d^2S}{dydz}+\left(\frac{dS}{dz}\right)^2\frac{d^2S}{dy^2} \\ +\left(\frac{dS}{dz}\right)^2\frac{d^2S}{dx^2}-2\frac{dS}{dz}\,\frac{dS}{dx}\,\frac{d^2S}{dzdx}+\left(\frac{dS}{dx}\right)^2\frac{d^2S}{dz^2} \\ +\left(\frac{dS}{dx}\right)^2\frac{d^2S}{dy^2}-2\frac{dS}{dx}\,\frac{dS}{dy}\,\frac{d^2S}{dxdy}+\left(\frac{dS}{dy}\right)^2\frac{d^2S}{dx^2} \end{array}\right\}=0\,. \quad (43)$$

3.° *Enfin dans la région des points de contact elliptiques, il se trouve un nombre limité de ces points de contact qui sont circulaires.* Ce sont les points de contact de cette dernière sorte que Monge a appelé des *Ombilic.*

Les points ombilicaux de la surface $S=0$ sont ceux où cette surface est percée par la courbe à double courbure donnée (40) par la double équation

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\left(\dfrac{dS}{dy}\right)^2\dfrac{d^2S}{dz^2}-2\dfrac{dS}{dy}\dfrac{dS}{dz}\dfrac{d^2S}{dydz}+\left(\dfrac{dS}{dz}\right)^2\dfrac{d^2S}{dy^2}}{\left(\dfrac{dS}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{dS}{dz}\right)^2}\\[2ex]
=\dfrac{\left(\dfrac{dS}{dz}\right)^2\dfrac{d^2S}{dx^2}-2\dfrac{dS}{dz}\dfrac{dS}{dx}\dfrac{d^2S}{dzdx}+\left(\dfrac{dS}{dx}\right)^2\dfrac{d^2S}{dz^2}}{\left(\dfrac{dS}{dz}\right)^2+\left(\dfrac{dS}{dx}\right)^2}\\[2ex]
=\dfrac{\left(\dfrac{dS}{dx}\right)^2\dfrac{d^2S}{dy^2}-2\dfrac{dS}{dx}\dfrac{dS}{dy}\dfrac{d^2S}{dxdy}+\left(\dfrac{dS}{dy}\right)^2\dfrac{d^2S}{dx^2}}{\left(\dfrac{dS}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{dS}{dy}\right)^2}
\end{array}\right\}. \quad (44)$$

On peut ajouter à tout ceci que, généralement pour que deux droites menées par un quelconque $(x, y, z)$, des points de la surface $S=0$, et formant avec les axes des coordonnées des angles $\alpha$ et $\alpha'$, $\beta$ et $\beta'$, $\gamma$ et $\gamma'$, soient des diamètres conjugués du point de contact de cette surface avec son plan tangent en ce point, il faut qu'on ait (14), (15), (16), (17), (22),

$$\text{Cos.}^2\alpha+\text{Cos.}^2\beta+\text{Cos.}^2\gamma=1\,, \quad (45) \qquad \text{Cos.}^2\alpha'+\text{Cos.}^2\beta'+\text{Cos.}^2\gamma'=1\,, \quad (46)$$

$$\frac{dS}{dx}\text{Cos.}\alpha+\frac{dS}{dy}\text{Cos.}\beta+\frac{dS}{dz}\text{Cos.}\gamma=0\,, \quad (47) \qquad \frac{dS}{dx}\text{Cos.}\alpha'+\frac{dS}{dy}\text{Cos.}\beta'+\frac{dS}{dz}\text{Cos.}\gamma'=0\,, \quad (48)$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{d^2S}{dx^2}\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\alpha'+\dfrac{d^2S}{dydz}(\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma'+\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\beta')\\[1ex]
+\dfrac{d^2S}{dy^2}\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\beta'+\dfrac{d^2S}{dzdx}(\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\alpha'+\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\gamma')\\[1ex]
+\dfrac{d^2S}{dz^2}\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\gamma'+\dfrac{d^2S}{dxdy}(\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta'+\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\alpha')
\end{array}\right\}=0\,. \quad (49)$$

En outre, pour un point déterminé quelconque $(x', y', z')$ de la surface $S=0$, pour lequel on a conséquemment $S'=0$, les directions des diamètres principaux du point de contact sont donnés par les intersections du plan tangent (6) avec les deux plans donnés (27) par l'équation unique

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{dS'}{dy'}v - \frac{dS'}{dz'}u\right)\left(\frac{d^2S'}{dx'^2}t + \frac{d^2S'}{dx'dy'}u + \frac{d^2S'}{dz'dx'}v\right) \\ \left(\frac{dS'}{dz'}t - \frac{dS'}{dx'}v\right)\left(\frac{d^2S'}{dy'^2}u + \frac{d^2S'}{dy'dz'}v + \frac{d^2S'}{dx'dy'}t\right) \\ \left(\frac{dS'}{dx'}u - \frac{dS'}{dy'}t\right)\left(\frac{d^2S'}{dz'^2}v + \frac{d^2S'}{dz'dx'}t + \frac{d^2S'}{dy'dz'}u\right) \end{array}\right\} = 0 \;. \qquad (50)$$

Enfin si ce point de contact est hyperbolique, les directions de ses asymptotes seront déterminées par les intersections du même plan tangent (6) avec les deux plans donnés (24) par l'équation unique

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d^2S'}{dx'^2}t^2 + 2\frac{d^2S'}{dy'dz'}uv \\ + \frac{d^2S'}{dy'^2}u^2 + 2\frac{d^2S'}{dz'dx'}vt \\ + \frac{d^2S'}{dz'^2}v^2 + 2\frac{d^2S'}{dx'dy'}tu \end{array}\right\} = 0 \;. \qquad (51)$$

On rendra ces deux derniers résultats propres au système de coordonnées primitifs, en y remplaçant $t$, $u$, $v$ par leurs valeurs $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, données par les formules (5).

Par l'un quelconque des points d'une surface courbe, on peut toujours concevoir, tracée sur cette surface, une courbe telle que sa tangente, en chacun de ses points, soit dirigée suivant l'un des diamètres principaux du point de contact du plan tangent en ce point. Une telle courbe, qui est en général une courbe à double courbure, est ce que Euler a appelé une *ligne de courbure* de la surface dont il s'agit. Il est clair qu'il doit, en général, en passer deux par chacun des points de cette surface, et qu'elles doivent s'y couper orthogonalement, comme le font les deux diamètres principaux de ce point, considéré comme point de contact du plan tangent. Toutes les lignes de courbure d'une même série doivent aller concourir aux différens points ombilicaux, tandis que celles de l'autre série, à mesure qu'elles se rapprochent d'un tel point, tendent de plus en plus à devenir des cercles, dont il est le centre commun. Les lignes de courbure d'une surface courbe, que nous verrons se représenter plus loin sous un autre aspect, partagent donc cette surface en quadrilatères curvilignes, ayant leurs quatre angles droits, comme le font les méridiens et les parallèles dans l'ellipsoïde de révolution.

VII. En repassant au système primitif, au moyen des formules (5), l'équation (6) du plan tangent à la surface $S=0$, en un quelconque $(x', y', z')$ de ses points, devient

$$\frac{dS'}{dx'}(x-x')+\frac{dS'}{dy'}(y-y')+\frac{dS'}{dz'}(z-z')=0\ ; \qquad (52)$$

et rien, d'après cela, ne sera plus facile que d'obtenir l'équation du plan tangent à une surface proposée, en un point donné sur cette surface.

Si le point $(x', y', z')$ n'est pas donné, cette équation (52), en y mettant pour $x'$, $y'$, $z'$ tous les systèmes de valeurs compatibles avec la relation $S'=0$, pourra indistinctement exprimer tous les plans tangens à la surface proposée. On pourra donc alors profiter de l'indétermination de $x'$, $y'$, $z'$ pour assujétir le plan tangent à deux conditions données. Comme cela ne saurait offrir de difficulté, d'après ce que nous avons déjà dit (pag. 9), sur les tangentes aux courbes planes, nous ne nous y arrêterons pas.

D'après l'équation (52), la *normale* à la surface $S=0$ au point $(x', y', z')$ de cette surface, c'est-à-dire, la perpendiculaire à son plan tangent en ce point, aura pour sa double équation

$$\frac{x-x'}{\frac{dS'}{dx'}}=\frac{y-y'}{\frac{dS'}{dy'}}=\frac{z-z'}{\frac{dS'}{dz'}}, \qquad (53)$$

et rien, d'après cela, ne sera plus facile que d'obtenir les équations de la normale à une surface proposée, en un point donné sur cette surface.

Si le point $(x', y', z')$ n'est pas donné, cette équation (53), en y mettant pour $x'$, $y'$, $z'$, tous les systèmes de valeur compatibles avec la relation $S'=0$, pourra indistinctement exprimer toutes les normales à la surface proposées. On pourra donc alors profiter de l'indétermination de $x'$, $y'$, $z'$, pour assujétir la normale à une condition donnée. Comme cela ne saurait offrir de difficulté, d'après ce que nous avons déjà dit (pag. 12) sur les normales aux courbes planes, nous ne nous y arrêterons pas.

VIII. D'après ce qui vient d'être dit, si, pour abréger, on représente par $\Omega$ le second membre de l'équation (4) et par $\Omega'$ ce que devient ce second membre, lorsque $t$, $u$, $v$ se changent respectivement en $t'$, $u'$, $v'$, l'équation du plan tangent à la surface (4), en un quelconque $(t', u', v')$ de ses points, sera

$$\frac{d\Omega'}{dt'}(t-t')+\frac{d\Omega'}{du'}(u-u')+\frac{d\Omega'}{dv'}(v-v')=0,$$

ou bien encore

$$\frac{\mathrm{d}\Omega'}{\mathrm{d}t'}t+\frac{\mathrm{d}\Omega'}{\mathrm{d}u'}u+\frac{\mathrm{d}\Omega'}{\mathrm{d}v'}v=\frac{\mathrm{d}\Omega'}{\mathrm{d}t'}t'+\frac{\mathrm{d}\Omega'}{\mathrm{d}u'}u'+\frac{\mathrm{d}\Omega'}{\mathrm{d}v'}v', \qquad (54)$$

sous la condition

$$\begin{aligned}0=\Omega'=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}t'+\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}u'&+\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x^2}\frac{t'^2}{1.2}+2\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\frac{t'u'}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y^2}\frac{u'^2}{1.2}+\ldots\ldots \qquad (55)\\ +\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}v' \qquad &+2\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}\frac{v't'}{1.2}+2\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}\frac{u'v'}{1.2}\\ &+\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}z^2}\frac{v'^2}{1.2},\end{aligned}$$

en ne conservant, pour la facilité de l'écriture, que les accens de $t$, $u$, $v$. Or, cela donne

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Omega'}{\mathrm{d}t'}&=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}+\left(\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x^2}t'+\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}u'+\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}v'\right)+\ldots\ldots\\ \frac{\mathrm{d}\Omega'}{\mathrm{d}u'}&=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}+\left(\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y^2}u'+\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}v'+\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}t'\right)+\ldots\ldots\\ \frac{\mathrm{d}\Omega'}{\mathrm{d}v'}&=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}+\left(\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}z^2}v'+\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}t'+\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}u'\right)+\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Omega'}{\mathrm{d}t'}t'+\frac{\mathrm{d}\Omega'}{\mathrm{d}u'}u'+\frac{\mathrm{d}\Omega'}{\mathrm{d}v'}v'=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}t'+\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}u'&+\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x^2}t'^2+2\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}t'u'+\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y^2}u'^2+\ldots\ldots\\ +\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}v' \qquad &+2\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}v't'+2\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}u'v'\\ &+\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}z^2}v'^2\end{aligned}$$

ou bien, en ayant égard à la relation (55),

$$\frac{d\Omega'}{dt'}t'+\frac{d\Omega'}{du'}u'+\frac{d\Omega'}{dv'}v'=\frac{d^2S}{dx^2}\frac{t'^2}{1.2}+2\frac{d^2S}{dxdy}\frac{t'u'}{1.2}+\frac{d^2S}{dy^2}\frac{u'^2}{1.2}+\dots$$
$$+2\frac{d^2S}{dzdx}\frac{v't'}{1.2}+2\frac{d^2S}{dxdy}\frac{u'v'}{1.2}$$
$$+\frac{d^2S}{dz^2}\frac{v'^2}{1.2}$$

ce qui donnera, en substituant dans l'équation (54) du plan tangent en $(t', u', v')$,

$$\left\{\begin{aligned}&\left[\frac{dS}{dx}+\left(\frac{d^2S}{dx^2}t'+\frac{d^2S}{dxdy}u'+\frac{d^2S}{dzdx}v'\right)+\dots\right]t\\+&\left[\frac{dS}{dy}+\left(\frac{d^2S}{dy^2}u'+\frac{d^2S}{dydz}v'+\frac{d^2S}{dxdy}t'\right)+\dots\right]u\\+&\left[\frac{dS}{dz}+\left(\frac{d^2S}{dz^2}v'+\frac{d^2S}{dzdx}t'+\frac{d^2S}{dydz}u'\right)+\dots\right]v\end{aligned}\right\}=\frac{d^2S}{dx^2}\frac{t'^2}{1.2}+2\frac{d^2S}{dxdy}\frac{t'u'}{1.2}+\frac{d^2S}{dy^2}\frac{u'}{1.2}+\dots\dots;\quad(57)$$
$$+2\frac{d^2S}{dzdx}\frac{v't'}{1.2}+2\frac{d^2S}{dxdy}\frac{u'v'}{1.2}$$
$$+\frac{d^2S}{dz^2}\frac{v'^2}{1.2}$$

Ce plan coupera le plan tangent à l'origine des $t$, $u$, $v$ suivant une droite qui sera donnée par l'ensemble de cette dernière équation et de l'équation

$$\frac{dS}{dx}t+\frac{dS}{dy}u+\frac{dS}{dz}v=0\;;\qquad(58)$$

on pourra d'ailleurs, dans la recherche de cette droite, substituer à l'une ou à l'autre équation toute combinaison qu'on en voudra faire, de manière à n'en pas élever le degré. On pourra, par exemple, substituer à l'équation (57) sa différence avec l'équation (58), et dire, en conséquence, que l'intersection du plan tangent à l'origine des $t$, $u$, $v$, avec le plan tangent ($t'$, $u'$, $v'$) est donnée par l'équation (58), combinée avec l'équation

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{d^2S}{dx^2}t'+\frac{d^2S}{dxdy}u'+\frac{d^2S}{dzdx}v'+\ldots\right)t\\+\left(\frac{d^2S}{dy^2}u'+\frac{d^2S}{dydz}v'+\frac{d^2S}{dxdy}t'+\ldots\right)u\\+\left(\frac{d^2S}{dz^2}v'+\frac{d^2S}{dzdx}t'+\frac{d^2S}{dydz}u'+\ldots\right)v\end{array}\right\}=\begin{array}{r}\frac{d^2S}{dx^2}\,\frac{t'^2}{1.2}+2\frac{d^2S}{dxdy}\,\frac{t'u'}{1.2}+\frac{d^2S}{dy^2}\,\frac{u'^2}{1.2}+\ldots\ldots;\\+2\frac{d^2S}{dzdx}\,\frac{v't'}{1.2}+2\frac{d^2S}{dydx}\,\frac{u'v'}{1.2}\\+\frac{d^2S}{dz^2}\,\frac{v'^2}{1.2}\end{array}\quad(59)$$

et, quant à la droite qui joindra les deux points de contact, elle sera donnée par la double équation

$$\frac{t}{t'}=\frac{u}{u'}=\frac{v}{v'}\,. \qquad (60)$$

Si présentement on suppose que le point ($t'$, $u'$, $v'$) est très-voisin de l'origine des $t$, $u$, $v$, à raison de la petitesse de $t'$, $u'$, $v'$, on pourra, sans erreur sensible, supprimer, dans l'équation (59), tous les termes de plus d'une dimension, par rapport à ces coordonnées ; ce qui la changera en celle-ci :

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{d^2S}{dx^2}t'+\frac{d^2S}{dxdy}u'+\frac{d^2S}{dzdx}v'\right)t\\+\left(\frac{d^2S}{dy^2}u'+\frac{d^2S}{dydz}v'+\frac{d^2S}{dxdy}t'\right)u\\+\left(\frac{d^2S}{dz^2}v'+\frac{d^2S}{dzdx}t'+\frac{d^2S}{dydz}u'\right)v\end{array}\right\}=0\;;$$

ou bien encore

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{d^2S}{dx^2}tt'+\frac{d^2S}{dydz}(uv'+vu')\\+\frac{d^2S}{dy^2}uu'+\frac{d^2S}{dzdx}(vt'+tv')\\+\frac{d^2S}{dz^2}vv'+\frac{d^2S}{dxdy}(tu'+ut')\end{array}\right\}=0\;; \qquad (61)$$

et telle sera alors l'équation qu'il faudra combiner avec l'équation (58) pour avoir, par approximation, la droite intersection des deux plans. Ces deux équations donneront donc rigoureusement cette droite, lorsque le point ($t'$, $u'$, $v'$) sera venu se confondre avec l'origine des $t$, $u$, $v$. On voit, en effet, que les deux plans qui, déterminent cette droite, passant alors l'un et l'autre par l'origine, cette droite y passera elle-même ; et, comme l'un de ces plans est le plan tangent à l'origine, cette droite sera devenue elle-même, comme la droite (58), une tangente à la surface courbe en ce point.

Soient présentement $\alpha$ et $\alpha'$, $\beta$ et $\beta'$, $\gamma$ et $\gamma'$ les angles que font ces deux droites avec les trois axes, de telle sorte qu'on ait

$$\frac{t}{\text{Cos.}\alpha}=\frac{u}{\text{Cos.}\beta}=\frac{v}{\text{Cos.}\gamma}\,, \quad (62) \qquad \frac{t'}{\text{Cos.}\alpha'}=\frac{u'}{\text{Cos.}\beta'}=\frac{v'}{\text{Cos.}\gamma'}\,; \quad (63)$$

il en résultera d'abord

$$\text{Cos.}^2\alpha+\text{Cos.}^2\beta+\text{Cos.}^2\gamma=1\,, \quad (64) \qquad \text{Cos.}^2\alpha'+\text{Cos.}^2\beta'+\text{Cos.}^2\gamma'=1\,; \quad (65)$$

ensuite, parce que ces droites sont dans le plan tangent (53), on aura

$$\frac{dS}{dx}\text{Cos.}\alpha+\frac{dS}{dy}\text{Cos.}\beta+\frac{dS}{dz}\text{Cos.}\gamma=0\,, \quad (66) \qquad \frac{dS}{dx}\text{Cos.}\alpha'+\frac{dS}{dy}\text{Cos.}\beta'+\frac{dS}{dz}\text{Cos.}\gamma'=0\,, \quad (67)$$

enfin, en éliminant de l'équation (61), au moyen des équations (62) et (63), deux quelconques des coordonnées $t$, $u$, $v$, et deux quelconques des coordonnées $t'$, $u'$, $v'$, les deux coordonnées restantes disparaîtront d'elles-mêmes, et il viendra

$$\left.\begin{array}{l}\quad\;\dfrac{d^2S}{dx^2}\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\alpha'+\dfrac{d^2S}{dydz}(\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma'+\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\beta') \\ +\dfrac{d^2S}{dy^2}\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\beta'+\dfrac{d^2S}{dzdx}(\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\alpha'+\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\gamma') \\ +\dfrac{d^2S}{dz^2}\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\gamma'+\dfrac{d^2S}{dxdy}(\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta'+\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\alpha')\end{array}\right\}=0\,; \quad (68)$$

or, ces cinq dernières équations sont exactement les mêmes que les équations (45), (46), (47), (48), (49), qui expriment que deux tangentes en un même point de la surface (4) sont dirigées suivant des diamètres conjugués de ce point, considéré comme point de contact du plan tangent ; on a donc ce théorème :

*Si un angle dièdre mobile et variable est constamment circonscrit à une surface courbe ; à mesure que l'angle s'ouvrira, son arrête et la droite qui joindra les points de contact de ses deux faces s'approcheront de plus en plus de la surface courbe, de laquelle elles deviendront enfin deux tangentes en un même point, lorsque l'angle dièdre sera devenu égal à deux angles droits ; et ces deux tangentes auront alors les directions de deux diamètres conjugués de leur point de concours, considéré comme point de contact de la surface courbe avec son plan tangent ; de sorte que la direction de l'une de ces tangentes étant déterminées à l'avance, celle de l'autre le sera aussi.*

A raison de cette propriété, M. Ch. Dupin, qui en a fait le premier la remarque, a désigné un tel système de tangentes sous la dénomination de *tangentes conjuguées* ; d'où l'on voit que, non seulement, *une surface courbe a, en chacun de ses points, une infinité de systèmes de deux tangentes conjuguées*, mais qu'en outre *il n'est aucune tangente à une surface courbe à laquelle il n'en réponde une autre comme conjuguée de celle-là.* On voit aussi que *les directions de deux tangentes conjuguées rectangulaires ne sont autre chose que celles des deux diamètres principaux de leur point de concours, considéré comme point de contact de la surface avec son plan tangent.* A raison de cette propriété, les tangentes conjuguées de cette dernière sorte sont appelées des *tangentes conjuguées principales.*

Il est encore facile de conclure de tout cela, avec M. Ch. Dupin, que *si, à une surface courbe quelconque, on circonscrit arbitrairement une surface développable, la tangente à la ligne de contact, en l'un quelconque de ses points, et la génératrice rectiligne de la surface développable qui répondra à ce point, seront deux tangentes conjuguées de la surface en ce même point.*

IX. Soit conduit par l'origine des $t$, $u$, $v$, un plan arbitraire, ayant pour équation

$$At+Bu+Cv=0\ , \qquad (69)$$

dans laquelle il est permis de supposer, sans que le plan cesse d'être quelconque,

$$A^2+B^2+C^2=1\ . \qquad (70)$$

Ce plan déterminera, dans la surface (4), une section plane. Proposons-nous de déterminer le centre et le rayon de courbure de cette section pour celui des points de son périmètre qui répond à l'origine des coordonnées. D'après ce que nous avons déjà dit ( pag. 24 ) sur les centres et rayons de courbure des courbes planes, il faudra pour cela concevoir deux normales à la section, la première par l'origine des $t$, $u$, $v$, et la seconde par un autre point ( $t'$, $u'$, $v'$ ) de son périmètre. Ces deux normales concourront en un point qui variera de position sur la première, à mesure que le point ( $t'$, $u'$, $v'$ ) variera lui-même de position sur la courbe, et qui deviendra le centre de courbure cherché, lorsque ce point ( $t'$, $u'$, $v'$ ) sera venu se confondre avec l'origine.

Les deux normales seront évidemment données par l'équation (69) combinée tour à tour avec celles de deux plans conduits par l'origine des $t$, $u$, $v$ et par le point ( $t'$, $u'$, $v'$ ), perpendiculairement aux tangentes à la courbe en ces deux points; et ces tangentes, à leur tour, seront données, en combinant tour à tour l'équation (69) avec celles des tangentes à la surface (4), en ces deux mêmes points.

Imitons, par le calcul, cette conception géométrique. D'abord, parce que le point ( $x'$, $y'$, $z'$ ) est supposé un des points du périmètre de la section; on doit avoir, à la fois,

$$At'+Bu'+Cv'=0\ , \quad (71) \qquad \Omega'=0\ ; \quad (55)$$

$\Omega$ ayant la même signification que ci-dessus ( VIII ), ce qui permettra de mettre l'équation (69) sous la forme

$$A(t-t')+B(u-u')+C(v-v')=0\ . \qquad (72)$$

Les plans tangens à la surface (4), en ces deux points, auront respectivement pour équations

$$\frac{dS}{dx}t+\frac{dS}{dy}u+\frac{dS}{dz}v=0\ ; \qquad (58)$$

$$\frac{d\Omega'}{dt'}(t-t')+\frac{d\Omega'}{du'}(u-u')+\frac{d\Omega'}{dv'}(v-v')=0\ . \qquad (54)$$

En combinant la première avec l'équation (69) et la seconde avec l'équation (72), on obtiendra, pour les équations des tangentes à la section, en ces deux points,

$$\frac{t}{B\dfrac{dS}{dz}-C\dfrac{dS}{dy}}=\frac{u}{C\dfrac{dS}{dx}-A\dfrac{dS}{dz}}=\frac{v}{A\dfrac{dS}{dy}-B\dfrac{dS}{dx}}\ , \qquad (73)$$

$$\frac{t-t'}{B\dfrac{d\Omega'}{dv'}-C\dfrac{d\Omega'}{du'}}=\frac{u-u'}{C\dfrac{d\Omega'}{dt'}-A\dfrac{d\Omega'}{dv'}}=\frac{v-v'}{A\dfrac{d\Omega'}{du'}-B\dfrac{d\Omega'}{dt'}}\ . \qquad (74)$$

En conséquence, les plans conduits par ces mêmes points, perpendiculairement à ces mêmes tangentes, auront respectivement pour équations

$$\left(B\frac{dS}{dz}-C\frac{dS}{dy}\right)t+\left(C\frac{dS}{dx}-A\frac{dS}{dz}\right)u+\left(A\frac{dS}{dy}-B\frac{dS}{dx}\right)v=0\ , \qquad (75)$$

$$\left(B\frac{d\Omega'}{dv'}-C\frac{d\Omega'}{du'}\right)(t-t')+\left(C\frac{d\Omega'}{dt'}-A\frac{d\Omega'}{dv'}\right)(u-u')+\left(A\frac{d\Omega'}{du'}-B\frac{d\Omega'}{dt'}\right)(v-v')=0\ , \qquad (76)$$

et couperont le plan (69) suivant les normales menées à la section par l'origine et par le point ($t'$, $u'$, $v'$); on aura donc le point de concours de ces deux normales, en combinant entre elles les trois équations (69), (75), (76). En traitant donc ces trois équations comme celles d'un même problème déterminé, opérant toutes les simplifications que pourra permettre la relation (70), et posant, pour abréger,

$$M=\left\{\begin{array}{l}(Bv'-Cu')\dfrac{d\Omega'}{dt'}\\ +(Ct'-Av')\dfrac{d\Omega'}{du'}\\ +(Au'-Bt')\dfrac{d\Omega'}{dv'}\end{array}\right\}, \quad (77) \qquad N=\left\{\begin{array}{l}\left(B\dfrac{dS}{dz}-C\dfrac{dS}{dy}\right)\dfrac{d\Omega'}{dt'}\\ +\left(C\dfrac{dS}{dx}-A\dfrac{dS}{dz}\right)\dfrac{d\Omega'}{du'}\\ +\left(A\dfrac{dS}{dy}-B\dfrac{dS}{dx}\right)\dfrac{d\Omega'}{dv'}\end{array}\right\}; \quad (78)$$

on obtiendra, pour les équations du point de concours des deux normales,

$$\left.\begin{aligned} t&=\frac{M}{N}\left\{\frac{dS}{dx}-A\left(A\frac{dS}{dx}+B\frac{dS}{dy}+C\frac{dS}{dz}\right)\right\},\\ u&=\frac{M}{N}\left\{\frac{dS}{dy}-B\left(A\frac{dS}{dx}+B\frac{dS}{dy}+C\frac{dS}{dz}\right)\right\},\\ v&=\frac{M}{N}\left\{\frac{dS}{dz}-C\left(A\frac{dS}{dx}+B\frac{dS}{dy}+C\frac{dS}{dz}\right)\right\};\end{aligned}\right\}\quad(79)$$

de sorte qu'en désignant par $\rho$ la distance de ce point de concours à l'origine des $t$, $u$, $v$, ce qui donnera

$$\rho^2=t^2+u^2+v^2\,,\qquad(80)$$

on aura, en faisant toujours usage de la relation (70),

$$\rho^2=\frac{M^2}{N^2}\left\{\begin{aligned}&\left(B\frac{dS}{dz}-C\frac{dS}{dy}\right)^2\\+&\left(C\frac{dS}{dx}-A\frac{dS}{dz}\right)^2\\+&\left(A\frac{dS}{dy}-B\frac{dS}{dx}\right)^2\end{aligned}\right\};\qquad(81)$$

employant donc cette relation pour éliminer $\frac{M}{N}$ des formules (79), on trouvera

$$\left.\begin{aligned} t&=\frac{\rho\left\{\frac{dS}{dx}-A\left(A\frac{dS}{dx}+B\frac{dS}{dy}+C\frac{dS}{dz}\right)\right\}}{\sqrt{\left(B\frac{dS}{dz}-C\frac{dS}{dy}\right)^2+\left(C\frac{dS}{dx}-A\frac{dS}{dz}\right)^2+\left(A\frac{dS}{dy}-B\frac{dS}{dx}\right)^2}}\\ u&=\frac{\rho\left\{\frac{dS}{dy}-B\left(A\frac{dS}{dx}+B\frac{dS}{dy}+C\frac{dS}{dz}\right)\right\}}{\sqrt{\left(B\frac{dS}{dz}-C\frac{dS}{dy}\right)^2+\left(C\frac{dS}{dx}-A\frac{dS}{dz}\right)^2+\left(A\frac{dS}{dy}-B\frac{dS}{dx}\right)^2}}\\ v&=\frac{\rho\left\{\frac{dS}{dz}-C\left(A\frac{dS}{dx}+B\frac{dS}{dy}+C\frac{dS}{dz}\right)\right\}}{\sqrt{\left(B\frac{dS}{dz}-C\frac{dS}{dy}\right)^2+\left(C\frac{dS}{dx}-A\frac{dS}{dz}\right)^2+\left(A\frac{dS}{dy}-B\frac{dS}{dx}\right)^2}}\end{aligned}\right\}\quad(82)$$

A mesure que le point $(x', y', z')$ se rapprochera de l'origine, en suivant le périmètre de la section, le point (82) tendra de plus en plus à devenir, pour cette origine, le centre de courbure de la courbe, et $\rho$ à être son rayon de courbure pour le même point.

Si présentement on substitue dans $M$ et $N$ (77) et (78), pour $\frac{d\Omega'}{dt'}$, $\frac{d\Omega'}{du'}$, $\frac{d\Omega'}{dv'}$, leurs valeurs (56), on trouvera

$$\left\{\begin{array}{l} A\left(\frac{dS}{dz}u'-\frac{dS}{dy}v'\right)+(Bv'-Cu')\left(\frac{d^2S}{dx^2}t'+\frac{d^2S}{dxdy}u'+\frac{d^2S}{dzdx}v'\right)+\ldots\ldots \\ +B\left(\frac{dS}{dx}v'-\frac{dS}{dz}t'\right)+(Ct'-Av')\left(\frac{d^2S}{dy^2}u'+\frac{d^2S}{dydz}v'+\frac{d^2S}{dxdy}t'\right)+\ldots\ldots \\ +C\left(\frac{dS}{dy}t'-\frac{dS}{dx}u'\right)+(Au'-Bt')\left(\frac{d^2S}{dz^2}v'+\frac{d^2S}{dzdx}t'+\frac{d^2S}{dydz}u'\right)+\ldots\ldots \end{array}\right\}, \quad (83)$$

$$N=\left\{\begin{array}{l} \left(B\frac{dS}{dz}-C\frac{dS}{dy}\right)\left(\frac{d^2S}{dx^2}t'+\frac{d^2S}{dxdy}u'+\frac{d^2S}{dzdx}v'\right)+\ldots \\ +\left(C\frac{dS}{dx}-A\frac{dS}{dz}\right)\left(\frac{d^2S}{dy^2}u'+\frac{d^2S}{dydz}v'+\frac{d^2S}{dxdy}t'\right)+\ldots \\ +\left(A\frac{dS}{dy}-B\frac{dS}{dx}\right)\left(\frac{d^2S}{dz^2}v'+\frac{d^2S}{dzdx}t'+\frac{d^2S}{dydz}u'\right)+\ldots\ldots \end{array}\right\}; \quad (84)$$

valeurs qui devront être substituées dans la formule (81). Mais, si l'on suppose que le point $(t', u', v')$ est très-voisin de l'origine des $t$, $u$, $v$, on pourra, sans erreur sensible, négliger, dans $M$ et $N$, les termes de plus d'une dimension, par rapport à ces coordonnées, ce qui donnera simplement

$$\frac{M}{N}=-\frac{\left(B\frac{dS}{dz}-C\frac{dS}{dy}\right)t'+\left(C\frac{dS}{dx}-A\frac{dS}{dz}\right)u'+\left(A\frac{dS}{dy}-B\frac{dS}{dx}\right)v'}{\left\{\begin{array}{l} \left(B\frac{dS}{dz}-C\frac{dS}{dy}\right)\left(\frac{d^2S}{dx^2}t'+\frac{d^2S}{dxdy}u'+\frac{d^2S}{dzdx}v'\right) \\ +\left(C\frac{dS}{dx}-A\frac{dS}{dz}\right)\left(\frac{d^2S}{dy^2}u'+\frac{d^2S}{dydz}v'+\frac{d^2S}{dxdy}t'\right) \\ +\left(A\frac{dS}{dy}-B\frac{dS}{dx}\right)\left(\frac{d^2S}{dz^2}v'+\frac{d^2S}{dzdx}t'+\frac{d^2S}{dydz}u'\right) \end{array}\right\}}; \quad (85)$$

mais, dans la même hypothèse, l'équation $\Omega'=0$ se réduit à

$$\frac{dS}{dx}t'+\frac{dS}{dy}u'+\frac{dS}{dz}v'=0, \quad (86)$$

qui, combinée avec (71), donne

$$\frac{t'}{B\dfrac{dS}{dz}-C\dfrac{dS}{dy}}=\frac{u'}{C\dfrac{dS}{dx}-A\dfrac{dS}{dz}}=\frac{v'}{A\dfrac{dS}{dy}-B\dfrac{dS}{dx}}\ ; \qquad (87)$$

de sorte que, $\lambda$ étant un multiplicateur convenable, on aura

$$t'=\lambda\left(B\frac{dS'}{dz'}-C\frac{dS'}{dy'}\right),\quad u'=\lambda\left(C\frac{dS'}{dx'}-A\frac{dS'}{dz'}\right),\quad v'=\lambda\left(A\frac{dS'}{dy'}-B\frac{dS'}{dx'}\right).$$

En substituant ces valeurs dans la formule (85), $\lambda$ disparaîtra de lui-même, et nous aurons

$$\frac{M}{N}=-\frac{\left(B\dfrac{dS'}{dz'}-C\dfrac{dS'}{dy'}\right)^2+\left(C\dfrac{dS'}{dx'}-A\dfrac{dS'}{dz'}\right)^2+\left(A\dfrac{dS'}{dy'}-B\dfrac{dS'}{dx'}\right)^2}{\left\{\begin{array}{l}\left(B\dfrac{dS'}{dz'}-C\dfrac{dS'}{dy'}\right)^2\dfrac{d^2S'}{dx'^2}+2\left(C\dfrac{dS'}{dx'}-A\dfrac{dS'}{dz'}\right)\left(A\dfrac{dS'}{dy'}-B\dfrac{dS'}{dx'}\right)\dfrac{d^2S'}{dy'dz'}\\+\left(C\dfrac{dS'}{dx'}-A\dfrac{dS'}{dz'}\right)^2\dfrac{d^2S'}{dy'^2}+2\left(A\dfrac{dS'}{dy'}-B\dfrac{dS'}{dx'}\right)\left(B\dfrac{dS'}{dz'}-C\dfrac{dS'}{dy'}\right)\dfrac{d^2S'}{dz'dx'}\\+\left(A\dfrac{dS'}{dy'}-B\dfrac{dS'}{dx'}\right)^2\dfrac{d^2S'}{dz'^2}+2\left(B\dfrac{dS'}{dz'}-C\dfrac{dS'}{dy'}\right)\left(C\dfrac{dS'}{dx'}-A\dfrac{dS'}{dz'}\right)\dfrac{d^2S'}{dx'dy'}\end{array}\right\}},$$

d'où nous conclurons (81)

$$\rho=-\frac{\left\{\left(B\dfrac{dS'}{dz'}-C\dfrac{dS'}{dy'}\right)^2+\left(C\dfrac{dS'}{dx'}-A\dfrac{dS'}{dz'}\right)^2+\left(A\dfrac{dS'}{dy'}-B\dfrac{dS'}{dx'}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left\{\begin{array}{l}\left(B\dfrac{dS'}{dz'}-C\dfrac{dS'}{dy'}\right)^2\dfrac{d^2S'}{dx'^2}+2\left(C\dfrac{dS'}{dx'}-A\dfrac{dS'}{dz'}\right)\left(A\dfrac{dS'}{dy'}-B\dfrac{dS'}{dx'}\right)\dfrac{d^2S'}{dy'dz'}\\+\left(C\dfrac{dS'}{dx'}-A\dfrac{dS'}{dz'}\right)^2\dfrac{d^2S'}{dy'^2}+2\left(A\dfrac{dS'}{dy'}-B\dfrac{dS'}{dx'}\right)\left(B\dfrac{dS'}{dz'}-C\dfrac{dS'}{dy'}\right)\dfrac{d^2S'}{dz'dx'}\\+\left(A\dfrac{dS'}{dy'}-B\dfrac{dS'}{dz'}\right)^2\dfrac{d^2S'}{dz'^2}+2\left(B\dfrac{dS'}{dz'}-C\dfrac{dS'}{dy'}\right)\left(C\dfrac{dS'}{dx'}-A\dfrac{dS'}{dx'}\right)\dfrac{d^2S'}{dx'dy'}\end{array}\right\}}. \qquad (88)$$

Comme $t'$, $u'$, $v'$ ont disparu, nous pouvons les supposer nuls; de sorte que cette valeur de $\rho$ est rigoureusement celle du rayon de courbure, à l'origine des coordonnées, de la section faite dans la surface $S=0$ par le plan (69). En substituant cette valeur dans les formules (82), nous obtiendrons rigoureusement les coordonnées du centre de courbure de la section.

La formule générale (88), que nous n'avons encore rencontrée nulle part, est susceptible d'un grand nombre de conséquences qu'il nous reste présentement à développer.

# GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

## *Exposition d'une méthode élémentaire propre à obtenir les équations des développées orthogonales et obliques des courbes planes ;*

Par M. Bary.

Si l'on conçoit qu'une droite indéfinie se meuve sur le plan d'une courbe, de manière à lui rester constamment normale, cette droite, dans son mouvement, demeurera constamment tangente à une autre courbe qui sera ce qu'on appelle la *développée* de la première.

On peut aussi concevoir une autre droite indéfinie, suivant la première dans son mouvement, de manière à couper la courbe proposée aux mêmes points qu'elle, et à faire avec elle, toujours d'un même côté, un angle constant ou un angle variable suivant une loi mathématique donnée quelconque. Cette seconde droite sera, dans son mouvement, comme la première, tangente à une certaine courbe qui pourra être également considérée comme une sorte de développée de la proposée, et qui paraît avoir été considérée pour la première fois ( *Annales*, tom. XX, pag. 97 ), par M. Lambert qui, pour distinguer les unes des autres ces deux sortes de développées, a appelé, celles de la première, sorte des *développées orthogonales*, et celles de la seconde, des *développées obliques* ; d'où l'on voit qu'une courbe plane proposée ne saurait avoir qu'une seule développée orthogonale, tandis qu'elle peut avoir une infinité de développées obliques différentes.

On a ramené, depuis long-temps, à des procédés élémentaires la recherche des tangentes et des normales aux courbes, soit par des points donnés sur leur périmètre, soit par des points extérieurs; mais il n'en est pas de même des développées orthogonales ou obliques, dont jusqu'ici, malgré leur importance dans la géométrie et dans ses applications à la physique, on a toujours fait dépendre la recherche des procédés de la haute analyse; de sorte que les personnes qui, après avoir suivi les cours de mathématiques de nos colléges, n'ont ensuite ni le loisir ni l'occasion de s'élever jusqu'à l'étude du calcul différentiel, se trouvent ainsi condamnées à rester, pour jamais, étrangères à tout ce qui concerne cette branche importante de la science.

Nous croyons donc faire une chose utile en montrant avec quelle facilité on peut présenter la théorie des développées, soit orthogonales soit obliques, de manière à l'introduire dans les simples élémens. Nous exposerons d'abord le procédé général; nous en ferons ensuite diverses applications.

Concevons que, par un quelconque $(x',y')$ des points d'une courbe plane, on mène une normale à cette courbe; si, par un autre point quelconque de cette courbe, on lui mène une nouvelle normale, celle-ci, en général, coupera la première en un certain point $(\alpha,\beta)$. La première normale étant supposée fixe, si la seconde marche vers elle, en demeurant constamment normale à la courbe, le point $(\alpha,\beta)$ marchera sur cette normale fixe jusqu'à ce qu'enfin les deux normales venant à se confondre, ce point $(\alpha,\beta)$ s'arrêtera sur la normale fixe, dans une certaine situation, et il est manifeste qu'alors il appartiendra à la développée de la courbe proposée.

Ainsi, à chaque point $(x',y')$ de la courbe donnée, répond un certain point $(\alpha,\beta)$ de sa développée, situé sur la normale à cette courbe en $(x',y')$; tout comme, à chaque point $(\alpha,\beta)$ de la développée doit répondre un point $(x',y')$ de la courbe proposée, intersection de cette courbe avec la tangente à cette développée en ce point $(\alpha,\beta)$ ; de sorte que l'un quelconque de ces deux points est nécessairement déterminé par l'autre.

Si l'on conçoit présentement que la normale fixe au point $(x',y')$, devenue mobile, marche sur la courbe, en lui restant constamment normale, le point $(\alpha,\beta)$ marchera sur elle, et décrira précisément la développée demandée. Il ne s'agit donc, pour obtenir l'équation de cette développée, que d'imiter, par l'analyse, cette construction mécanique.

Soit supposée

$$F(x,y)=0\,, \qquad (1)$$

l'équation de la courbe dont il s'agit ; pour le point $(x',y')$ on aura

$$F(x',y')=0\ ; \qquad (2)$$

l'équation de la normale, en ce point, sera de la forme

$$f(x,y,x',y')=0\ . \qquad (3)$$

Si l'on veut que cette normale passe par un point donné $(\alpha, \beta)$, on exprimera cette condition en écrivant

$$f(\alpha,\beta,x',y')=0\ ; \qquad (4)$$

équation qui, combinée avec l'équation (2), donnera les pieds $(x',y')$ de toutes les normales issues du point $(\alpha,\beta)$.

Au lieu de résoudre les deux équations (2) et (4), par rapport à $x'$ et $y'$, on peut, dans l'une et dans l'autre, considérer ces deux coordonnées comme variables, et construire pour les mêmes axes, les deux courbes qu'elles expriment. Les intersections de ces deux courbes seront également les pieds $(x',y')$ de toutes les normales issues du point $(\alpha,\beta)$.

Or, la première de ces deux courbes est la courbe proposée elle-même ; d'où il résulte que l'équation (4) est celle d'une certaine courbe qui coupe la proposée aux pieds de toutes les normales qui peuvent lui être menées du point $(\alpha, \beta)$.

Si présentement deux de ces normales viennent à se confondre, d'après ce qui a été dit ci-dessus, le point $(\alpha, \beta)$ deviendra un de ceux de la développée. Or, pour que ces deux normales se confondent en effet, il est nécessaire que deux des points d'intersection des courbes (2) et (4) se confondent en un seul, ou, ce qui revient au même que ces deux courbes se touchent et aient conséquemment la même tangente au point $(x', y')$. Cherchant donc les équations des tangentes aux deux courbes

$$F(x, y)=0 \;, \qquad f(\alpha, \beta, x, y)=0 \;,$$

au point $(x', y')$, et écrivant que ces deux tangentes se confondent, leur coïncidence entraînera deux conditions de la forme

$$\varphi(x', y', \alpha, \beta)=0 \;, \qquad \psi(x', y', \alpha, \beta)=0 \;;$$

lesquelles, comme nous l'avons dit ci-dessus, donneront indistinctement $\alpha$ et $\beta$ en $x'$, $y'$, ou $x'$, $y'$ en $\alpha$ et $\beta$. Si, en particulier, on en tire les valeurs de $x'$ et $y'$, en $\alpha$ et $\beta$, pour les substituer dans l'équation (2), l'équation résultante, en $\alpha$ et $\beta$, sera l'équation cherchée de la développée de la courbe (1). On pourra d'ailleurs, chemin faisant, employer les relations (2) et (4) à simplifier les calculs et leurs résultats.

Voilà pour ce qui concerne les développées orthogonales. Si, au contraire, il s'agissait de développées obliques, il n'y aurait d'autre changement à faire dans le procédé que celui de remplacer l'équation (3) de la normale au point $(x', y')$ par celle d'une droite passant par le même point et faisant avec elle un angle égal à l'angle, constant ou variable, requis par les conditions du problème.

Pour première application de ce procédé, cherchons l'équation de la développée de l'ellipse donnée par l'équation

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \; ; \qquad (1)$$

L'équation de la normale à cette ellipse au point $(x', y')$ sera, comme l'on sait, en posant, pour abréger, $a^2-b^2=c^2$,

$$b^2x'y-a^2y'x+c^2x'y'=0 \; , \qquad (3)$$

sous la condition

$$b^2x'^2+a^2y'^2=a^2b^2 \; ; \qquad (2)$$

On exprimera que cette normale contient le point $(\alpha, \beta)$ en écrivant

$$b^2\beta x'-a^2\alpha y'+c^2x'y'=0 \; ; \qquad (4)$$

de sorte que les pieds de toutes les normales issues du point $(\alpha, \beta)$ seront les intersections de la courbe (1) avec la courbe donnée par l'équation

$$b^2\beta x-a^2\alpha y+c^2xy=0 \; .$$

Les équations des tangentes à ces deux courbes au point $(x', y')$ sont

$$b^2x'x+a^2y'y=a^2b^2 \; ,$$

$$(c^2y'+b^2\beta)x+(c^2x'-a^2\alpha)y=c^2x'y' \; ,$$

sous les conditions (2) et (4).

Pour exprimer que ces deux tangentes se confondent en une seule et même ligne droite, il faudra écrire

$$\frac{x'}{a^2}=\frac{c^2y'+b^2\beta}{c^2x'y'} \; , \qquad \frac{y'}{b^2}=\frac{c^2x'-a^2\alpha}{c^2x'y'} \; ;$$

équations qui donneront $\alpha$ et $\beta$ en $x'$ et $y'$, et réciproquement. Mais la relation (4) donne

$$c^2y'+b^2\beta=\frac{a^2\alpha y'}{x'}\,,\qquad c^2x'-a^2\alpha=-\frac{b^2\beta x'}{y'}\,;$$

il viendra donc, en substituant,

$$\frac{x'}{a^2}=+\frac{a^2\alpha}{c^2x'^2}\,,\qquad \frac{y'}{b^2}=-\frac{b^2\beta}{c^2y'^2}\,;$$

équations plus simples desquelles on tire

$$x'=a\left(\frac{a\alpha}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}}\,,\qquad y'=-b\left(\frac{b\beta}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}}\,;$$

ce qui donnera, en substituant dans la relation (2), et reduisant,

$$\left(\frac{a\alpha}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{b\beta}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1\,;$$

équation connue de la développée de l'ellipse dans laquelle $\alpha$ et $\beta$ sont les coordonnées courantes.

En changeant ces coordonnées en $x$ et $y$, et en posant en outre

$$c^2=aa'=bb'\,,$$

$a'$ et $b'$ étant deux nouvelles longueurs, cette équation prend la forme

$$\left(\frac{x}{a'}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b'}\right)^{\frac{2}{3}}=1\,;$$

ce qui offre un rapprochement remarquable entre l'équation de la développée d'une ellipse et celle de cette courbe qui peut être mise sous la forme

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1 .$$

Pour deuxième application nous choisirons une classe de développées obliques dont l'étude est indispensable au physicien ; savoir : les *caustiques par réflexion*.

Nous supposerons que des rayons de lumière parallèles à une droite fixe, tracée sur le plan d'un cercle, viennent rencontrer la circonférence de ce cercle, contre laquelle ils se réfléchissent en faisant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence ; et nous chercherons à quelle courbe les rayons ainsi réfléchis sont tangens.

Soit $r$ le rayon du cercle réflecteur, plaçons à son centre l'origine des coordonnées rectangulaires en dirigeant l'axe des $x$ parallèlement à la direction commune des rayons incidens. En prenant $(x', y')$ pour un point incident quelconque, nous aurons

$$x'^2+y'^2=r^2 , \qquad (2)$$

On trouvera aisément ensuite, pour l'équation du rayon réfléchi qui répond à ce point,

$$(x'^2-y'^2)(y-y')=2x'y'(x-x') ;$$

ou bien, en simplifiant, au moyen de la relation (2)

$$2x'y'x-(x'^2-y'^2)y=r^2y' . \qquad (3)$$

Si l'on veut que ce rayon réfléchi passe par un point donné $(\alpha, \beta)$, on devra avoir

$$2\alpha x'y'-\beta(x'^2-y'^2)=r^2y' ; \qquad (4)$$

de sorte que l'équation

$$2\alpha xy-\beta(x^2-y^2)=r^2y\ ,$$

est celle d'une courbe qui coupe le cercle donné aux points d'incidence de tous les rayons qui, après leur réflexion à la rencontre de ce cercle, vont concourir au point $(\alpha\,,\beta)$.

Les équations des tangentes à ces deux courbes, par le point $(x'\,,y')$, sont

$$x'x+y'y=r^2\ ,$$

$$2(\alpha y'-\beta x')x+(2\alpha x'+2\beta y'-r^2)y=r^2y'\ .$$

Pour exprimer que ces deux droites se confondent en une seule, il faudra écrire

$$x'=\frac{2(\alpha y'-\beta x')}{y'}\ ,\qquad y'=\frac{2\alpha x'+2\beta y'-r^2}{y'}\ ;$$

équations qui donneront $\alpha$ et $\beta$ par $x'$ et $y'$, et réciproquement.

En les résolvant par rapport à $\alpha$ et $\beta$, on trouve

$$\alpha=\frac{2x'y'^2+r^2x'}{2r^2}\ ,$$

$$\beta=\frac{r^2y'-y'(x'^2-y'^2)}{2r^2}=\frac{y'(r^2-x'^2)+y'^3}{2r^2}=\frac{2y'^3}{2r^2}=\frac{y'^3}{r^2}\ ;$$

il en résulte, en faisant usage de la relation (2),

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{4y'^4(x'^2+y'^2)+4r^2x'^2y'^2+r^4x'^2}{4r^4}=\frac{4y'^2(x'^2+y'^2)+r^2x'^2}{4r^2}\ ,$$

ou encore

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{4y'^2+x'^2}{4}=\frac{3y'^2+r^2}{4}\ ;$$

donc

$$4(\alpha^2+\beta^2)-r^2=3y'^2\ ,$$

et, par suite,

$$\{4(\alpha^2+\beta^2)-r^2\}^3=27y'^6\ ;$$

mais, de la valeur de $\beta$, on tire

$$y'^6=r^4\beta^2\ ;$$

ce qui donne, en substituant,

$$\{4(\alpha^2+\beta^2)-r^2\}^3=27r^4\beta^2\ ;$$

ou bien, en changeant respectivement $\alpha$ et $\beta$ en $x$ et $y$,

$$\{4(x^2+y^2)-r^2\}^3=27r^4y^2\ ;$$

équation exactement la même que celle qui a été trouvée par M. de St.-Laurent, à la pag. 18 du XVII.[me] volume du présent recueil, pour celle de la caustique par réflexion dans le cercle, et de laquelle on tirera les mêmes conséquences.

La théorie des racines égales peut quelquefois simplifier les recherches qui nous occupent. Pour en donner un exemple, cherchons à quelle courbe sont tangentes les droites menées par tous les points d'une parabole, de manière à faire, dans le même sens, des angles constans avec les normales en ces mêmes points. Soit l'équation de la parabole dont il s'agit

$$y^2=2px\ , \qquad (1)$$

on aura, pour un quelconque $(x',y')$ de ses points,

$$y'^2=2px'\ . \qquad (2)$$

L'équation de la normale en ce point sera, comme l'on sait,

$$y-y'=-\frac{y'}{p}(x-x') .$$

Si l'on désigne par $t$ la tangente tabulaire de l'angle constant que fait l'oblique avec la normale en chacun des points de la courbe, et par $T$ la tangente tabulaire de l'angle variable que fait cette même oblique avec l'axe des $x$, on aura

$$\frac{-\frac{y'}{p}-T}{1-T\frac{y'}{p}}=t \text{ ;} \qquad \text{d'où} \qquad T=\frac{pt+y'}{ty'-p} \text{ ;}$$

de sorte que l'équation de l'oblique sera

$$y-y'=\frac{pt+y'}{ty'-p}(x-x') . \tag{3}$$

Soit $(\alpha, \beta)$ un point par lequel cette oblique doive passer, on aura

$$\beta-y'=\frac{pt+y'}{ty'-p}(\alpha-x') \text{ ;} \tag{4}$$

de sorte que l'équation

$$(ty-p)(y-\beta)-(pt+y)(x-\alpha)=0 \text{ ;} \tag{5}$$

sera celle d'une courbe coupant la proposée (1) en tous les points où elle est rencontrée par les obliques issues du point $(\alpha, \beta)$, sous les conditions données.

On pourrait présentement achever le calcul comme dans les exemples précédens; mais ici, où, dans l'équation (1), $x$ ne se trouve qu'à la première puissance, il est plus court d'en tirer la valeur pour la substituer dans cette dernière, ce qui conduira à l'équation suivante, du troisième degré en $y$,

$$y^3-pty^2+2p(t\beta-\alpha+p)y-2p^2(\beta+t\alpha)=0 \ .$$

On voit par là que, généralement parlant, on peut, d'un même point ( $\alpha$, $\beta$ ) du plan de la parabole, mener à cette courbe trois obliques qui remplissent les conditions prescrites. Mais, si ce point est un des points de la développée oblique demandée, deux de ces obliques se confondront en une seule ; de sorte que l'équation ci-dessus devra avoir deux racines égales. Or, on sait que, pour qu'une équation du troisième degré, telle que

$$ay^3+by^2+cy+d=0 \ ,$$

ait deux racines égales, il faut qu'on ait

$$4(b^2-3ac)(c^2-3bd)-(bc-9ad)^2=0 \ ;$$

appliquant donc cette condition à la formule ci-dessus, il viendra

$$4\{p^2t^2-6p(t\beta-\alpha+p)\}\{4p^2(t\beta-\alpha+p)^2-6p^3t(\beta+t\alpha)\}$$
$$-\{-2p^2t(t\beta-\alpha+p)+18p^2(\beta+t\alpha)\}^2 \ ;$$

ou bien, en réduisant,

$$2\{pt^2-6(t\beta-\alpha+p)\}\{2(t\beta-\alpha+p)^2-3pt(\beta+t\alpha)\}$$
$$+p\{t(t\beta-\alpha+p)-9(\beta+t\alpha)\}^2=0 \ .$$

Telle est donc la relation qui doit exister entre $\alpha$ et $\beta$, pour que le point ( $\alpha$, $\beta$ ) soit un des points de la développée oblique demandée ; c'est donc là l'équation même de cette développée, en y considérant $\alpha$ et $\beta$ comme des coordonnées courantes.

Si l'on veut déduire de là l'équation de la développée orthogonale de la parabole proposée, il suffira de supposer $t=0$, ce qui donnera, en changeant respectivement $\alpha$ et $\beta$ en $x$ et $y$,

$$8(x-p)^3=27py^2 \ ;$$

équation connue de la développée ordinaire de la parabole.

Si, après avoir divisé par $t^4$ l'équation générale de la développée oblique, on y suppose ensuite $t=\infty$, en changeant toujours $\alpha$ et $\beta$ en $x$ et $y$, on retombera de nouveau sur l'equation

$$y^2=2px \ ,$$

de la parabole proposée, ainsi que cela doit être, puisqu'alors la question revient à demander quelle est la courbe qu'enveloppent les perpendiculaires à toutes les normales à une parabole donnée.

Le procédé que nous venons d'employer, pour parvenir à l'équation de l'une des développées obliques d'une parabole, s'appliquera également, sans difficulté, à toute autre courbe dans l'équation de laquelle l'une des coordonnées n'entrera qu'au premier degré. Mais il n'en sera pas toujours de même dans le cas où, à une même valeur de chaque coordonnée, répondront plusieurs valeurs de l'autre ; car alors il ne suffira pas, pour exprimer que deux points de la courbe se confondent en un seul, d'écrire que ces deux points ont une coordonnée commune. L'équation en $\alpha$ et $\beta$, qu'on obtient dans ce cas, peut donc alors se trouver compliquée de solutions étrangères, dont il est préalablement nécessaire de la délivrer.

Pour faire mieux comprendre cette difficulté, par un exemple où elle est facile à faire disparaître, nous reprendrons la question que nous venons de traiter ; mais, au lieu d'éliminer $x$ entre les équations (1) et (5), nous en éliminerons $y$ ; ce qui, en supposant $t=0$, conduira à l'équation du troisième degré en $x$

$$2x^3-4(\alpha-p)x^2+2(\alpha-p)^2x-p\beta^2=0 \ .$$

Si l'on exprime que cette équation a deux racines égales, cela donnera

$$\beta^2\{8(\alpha-p)^3-27p\beta^2\}=0\ .$$

En égalant le deuxième facteur à zéro, on obtient, comme ci-dessus, l'équation de la développée. Le premier facteur égalé à zéro donne l'axe des $x$, c'est-à-dire, l'axe même de la courbe. Ce dernier résultat pouvait aisément être prévu. Si, en effet, par deux points d'une parabole, pris sur une même perpendiculaire à son axe, et ayant conséquemment la même abscisse, on mène des normales à cette courbe, ces normales concourront sur ce même axe. On devrait donc trouver cette droite pour le lieu des points de concours des normales menées à la courbe par des points ayant même abscisse, mais des ordonnées de signes contraires.

Un autre inconvénient, attaché à l'emploi de la théorie des racines égales, c'est que, lorsque l'équation finale, soit en $x$ soit en $y$, est d'un degré tant soit peu élevé, et complète, ou à peu près, la recherche de la condition nécessaire pour que deux de ses racines soient égales, peut être assez laborieuse pour décourager tout à fait le calculateur, ce qui semble militer en faveur de la méthode, incomparablement plus simple, dont nous venons de présenter l'essai.

Nous devons dire, en terminant, que nous n'ignorons pas que M. Poulet Delisle, dans son *Application de l'algèbre à la géométrie*, publiée en 1806, a déjà enseigné à obtenir, par les simples élémens, le cercle osculateur, et conséquemment le centre de courbure, pour chacune des trois lignes du second ordre; d'où il est ensuite facile de parvenir à l'équation de la développée. L'auteur, pour parvenir à son but, exprime qu'un cercle passe par trois points pris arbitrairement sur le périmètre de la courbe, et qu'ensuite ces trois points viennent se confondre en un seul; ce qui établit une parfaite analogie entre la recherche du cercle osculateur et celle de la tangente. L'idée de présenter une théorie purement élémentaire des développées n'est donc pas nouvelle;

mais le procédé suivi par M. Delisle n'est applicable, comme on le voit, qu'aux seules développées orthogonales, tandis que le nôtre, au contraire, s'applique, sans difficulté, à la recherche des développées obliques, de quelque nature qu'elles puissent être, et conséquemment à la recherche des caustiques, soit par réflexion, soit par réfraction.

---

# ANALYSE TRANSCENDANTE.

## *Méthode pour la transformation d'une série quelconque, ou du rapport entre deux séries, en une fraction continue équivalente;*

Par M. Le Barbier.

Pour rendre plus facile à saisir la méthode de transformation que nous nous proposons ici de faire connaître, nous l'appliquerons d'abord à une suite d'exemples de choix.

Soit d'abord la série

$$1-3x+5x^2-7x^3+9x^4-11x^5+13x^6-\ldots\ldots\,; \qquad (1)$$

en lui donnant l'unité pour dénominateur, on en fera une fraction ordinaire que l'on pourra ensuite, par un procédé analogue à celui qu'on enseigne en arithmétique, convertir en fraction continue, de la manière suivante :

Divisant le dénominateur 1 par la série, on obtiendra le quotient 1 et le reste

$$3x-5x^2+7x^3-9x^4+11x^5-\ldots\ldots ;$$

divisant ensuite la série par ce reste, on obtiendra le quotient $\frac{1}{3x}$ et le reste

$$-\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}x^2-\frac{12}{3}x^3+\frac{16}{3}x^4-\frac{20}{3}x^5+\ldots\ldots$$

Divisant le premier reste par celui-ci, on obiendra le quotient $-\frac{9}{4}$ et le nouveau reste

$$x^2-2x^3+3x^4-4x^5+5x^6-6x^7+\ldots\ldots$$

Divisant enfin l'avant-dernier reste par celui-ci, on obtiendra le quotient $-\frac{4}{3x}$, avec un reste nul. En conséquence la série proposée pourra être remplacée par la fraction continue

$$\cfrac{1}{1}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{3x}+\cfrac{1}{-\cfrac{9}{4}+\cfrac{1}{-\cfrac{4}{3x}}}},$$

qu'on réduira facilement à celle-ci

$$\cfrac{1}{1}+\cfrac{3x}{1}-\cfrac{4x}{3}+\cfrac{x}{1};$$

laquelle revient à la fraction ordinaire

$$\frac{1-x}{(1+x)^2},$$

dont la série proposée est en effet le développement.

Soit, pour second exemple, la série

$$1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-6x^5+7x^6-\ldots\ldots ; \qquad (2)$$

en la traitant comme la précédente on obtiendra les quotiens et les restes successifs dont le tableau suit :

$$\begin{array}{c|l}
 & 1 \\
1 & 1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-6x^5+7x^6-8x^7+\ldots\ldots , \\
\dfrac{1}{2x} & \quad 2x-3x^2+4x^3-5x^4+6x^5-7x^6+8x^7-\ldots\ldots , \\
-4 & -\frac{1}{2}x+\frac{2}{2}x^2-\frac{3}{2}x^3+\frac{4}{2}x^4-\frac{5}{2}x^5+\frac{6}{2}x^6-\frac{7}{2}x^7+\ldots\ldots , \\
-\dfrac{1}{2x} & \qquad x^2-2x^3+3x^4-4x^5+5x^6-6x^7+\ldots\ldots , \\
 & \qquad 0 ;
\end{array}$$

ce qui donnera, pour la fraction continue équivalente,

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{2x}+\cfrac{1}{-4+\cfrac{1}{-\cfrac{1}{2x}}}}} ;$$

ou bien

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{2x}{1-\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{1}}}} ;$$

laquelle revient à la fraction ordinaire

$$\frac{1}{(1+x)^2} ,$$

dont la série proposée est en effet le développement.

Soit, pour troisième exemple, la série

$$1+5x+9x^2+13x^3+17x^4+21x^5+25x^6+\ldots\ldots ; \qquad (3)$$

en la traitant comme les précédentes, on obtiendra les quotiens et les restes successifs dont le tableau suit :

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
1 & 1+5x+9x^2+13x^3+17x^4+21x^5+25x^6+29x^7+\ldots\ldots , \\
-\dfrac{1}{5x} & -5x-9x^2-13x^3-17x^4-21x^5-25x^6-29x^7-\ldots\ldots , \\
-\dfrac{25}{17} & +\frac{16}{5}x+\frac{32}{5}x^2+\frac{48}{5}x^3+\frac{64}{5}x^4+\frac{80}{5}x^5+\frac{96}{5}x^6+\frac{112}{5}x^7+\ldots , \\
+\dfrac{16}{5x} & \qquad x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+\ldots\ldots , \\
 & \qquad 0
\end{array}$$

ce qui donnera, pour la fraction continue équivalente,

$$\frac{1}{1}+\cfrac{1}{-\dfrac{1}{5x}+\cfrac{1}{-\dfrac{25}{16}+\cfrac{1}{\dfrac{16}{5x}}}} ;$$

qu'on réduira facilement à celle-ci

$$\frac{1}{1}-\frac{5x}{1}+\frac{16x}{5}-\frac{x}{1} ;$$

laquelle revient à la fraction ordinaire

$$\frac{1+3x}{(1-x)^2} ,$$

dont la série proposée est en effet le développement, Soit encore la série

$$4x+15x^2+40x^3+85x^4+156x^5+259x^6+400x^7+585x^8+\ldots\ ; \quad (4)$$

en la traitant exactement comme les précédentes, on trouvera pour sa fonction génératrice la fraction rationnelle

$$\frac{x(1+x^2)(4-x)}{(1-x)^4}\ .$$

Ces exemples suffisent pour faire voir que ce procédé, fondé sur la recherche du plus grand commun diviseur entre l'unité et une série proposée, offre une méthode directe et très-élémentaire pour sommer toute suite infinie dont la fonction génératrice est rationnelle; méthode différente de celle d'Euler, indiquée par M. LACROIX dans son *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral.* ( Deuxième édition, tom. III, pag. 344 ).

Le même procédé peut être également employé à transformer une série quelconque en fraction continue.

Soit d'abord la série

$$1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4+\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}x^5+\ldots., \quad (5)$$

que l'on sait être le développement de la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}\ ;$$

si l'on cherche le plus grand commun diviseur entre l'unité et cette série, les quotiens et les restes successifs seront tels qu'on les voit dans le tableau suivant :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
1 & 1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3x^2}{2.4}+\frac{1.3.5x^3}{2.4.6}+\frac{1.3.5.7x^4}{2.4.6.8}+\ldots\ldots, \\
-\frac{2}{x} & -\frac{1}{2}x-\frac{1.3x^2}{2.4}-\frac{1.3.5x^3}{2.4.6}-\frac{1.3.5.7.x^4}{2.4.6.8}+\ldots\ldots, \\
2 & +\frac{1.2}{2.4}x-\frac{12x^2}{2.4.6}-\frac{90x^3}{2.4.6.8}-\frac{840x^4}{2.4.6.8.10}+\ldots\ldots, \\
-\frac{2}{x} & \qquad +\frac{6x^2}{2.4.6}+\frac{60x^3}{2.4.6.8}+\frac{630x^4}{2.4.6.8.10}+\ldots\ldots; \\
2 & \qquad +\frac{24x^2}{2.4.6.8}+\frac{360x^3}{2.4.6.8}+\frac{5040x^4}{2.4.6.8.10.12}+\ldots\ldots, \\
-\frac{2}{x} & \qquad\qquad -\frac{120x^3}{2.4.6.8.10}-\frac{2520x^4}{2.4.6.8.10.12}-\ldots\ldots, \\
2 & \qquad\qquad -\frac{720x^3}{2.4.6.8.10.12}-\frac{20160x^4}{2.4.6.8.10.12.14}-\ldots., \\
-\frac{2}{x} & \qquad\qquad\qquad +\frac{5040x^4}{2.4.6.8.10.12.14}+\ldots.; \\
\ldots & \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{array}
$$

d'où résultera

$$
\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\frac{1}{1}+\cfrac{1}{-\frac{2}{x}+\frac{1}{2}+\cfrac{1}{-\frac{2}{x}+\frac{1}{2}+\cfrac{1}{-\frac{2}{x}+\frac{1}{2}+\ldots}}};
$$

ou bien encore

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{2-\dotsb}}}}}$$

En changeant le signe de $x$, cela donnera

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{2+\dotsb}}}}$$

Si, par exemple, on suppose $x=2$, cette dernière formule donnera

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\dotsb}}}}}}}.$$

Soit la série très-divergente

$$1-1.2x+1.2.3x^2-1.2.3.4x^3+1.2.3.4.5x^4-1.2.3.4.5.6x^5+\dots \quad (6)$$

que l'on a vu, à la pag. 81 du présent volume, être le développement de la fonction

$$\frac{\sqrt[x]{e}}{x^2}\int\frac{dx}{\sqrt[x]{e}};$$

en la traitant de la même manière, on trouvera

$$\frac{\sqrt[x]{e}}{x^2}\int\frac{dx}{\sqrt[x]{e}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{1.2x}+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{2.3x}+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cfrac{1}{3.4x}+\cfrac{1}{4+\dotsb}}}}}}};$$

ou bien encore

$$\frac{\sqrt[x]{e}}{x^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[x]{e}}=\frac{1}{1}+\frac{2x}{1}+\frac{x}{1}+\frac{3x}{1}+\frac{2x}{1}+\frac{4x}{1}+\frac{3x}{1}+\ldots\ldots$$

Si, dans la série, on pose $x=1$, il viendra

$$1-1.2+1.2.3-1.2.3.4+1.2.3.4.5-1.2.3.4.5.6+1.2.3.4.5.6.7-\ldots\ldots$$

$$=\frac{1}{1}+\frac{2}{1}+\frac{1}{1}+\frac{3}{1}+\frac{2}{1}+\frac{4}{1}+\frac{3}{1}+\frac{5}{1}+\frac{4}{1}+\ldots\,;$$

fraction continue qui est convergente; car, en formant les réduites successives, on trouve

$$1\,,\ \frac{1}{3}\,,\ \frac{1}{2}\,,\ \frac{5}{13}\,,\ \frac{5}{9}\,,\ \frac{17}{37}\,,\ \frac{7}{17}\,,\ \frac{67}{167}\,,\ \frac{85}{209}\,,\ \ldots\ldots;$$

fractions alternativement trop grandes et trop petites, mais qui convergent vers la véritable valeur de la série, qui est comme l'on sait (Voy. l'ouvrage cité de M. Lacroix, tom. III, pag. 348),

$$0,40365263\ldots\ldots$$

Pour transformer la série

$$x-1.x^2+1.2x^3-1.2.3x^4+1.2.3.4x^5-1.2.3.4.5x^5+\ldots\ldots \quad (9)$$

en fraction continue, Euler, en représentant cette série par $A$, pose $A=\frac{x}{1+B}$, il en conclut

$$B=\frac{x-2x^2+1.2.3x^3-1.2.3.4x^4+1.2.3.4.5x^5+\dots\dots}{1-x+1.2x^2-1.2.3x^3+1.2.3.4x^4-1.2.3.4.5x^5+\dots\dots}\;;$$

il pose de nouveau $B=\frac{x}{1+C}$, d'où il tire

$$C=\frac{x-4x^2+18x^3-96x^4+600x^5-4320x^6+\dots\dots}{1-1.2x+1.2.3x^2-1.2.3.4x^3+1.2.3.4.5x^4-\dots\dots}\;;$$

il pose ainsi successivement

$$A=\frac{x}{1+B}\,,\quad B=\frac{x}{1+C}\,,\quad C=\frac{x}{1+D}\,,\quad D=\frac{x}{1+E}\,,\quad E=\frac{x}{1+F}\,,\dots$$

ce qui lui donne finalement, comme on peut le voir dans l'ouvrage cité (pag. 392) où tout le calcul est développé,

$$x-1.x^2+1.2x^3-1.2.3x^4+1.2.3.4x^5-1.2.3.4.5x^6+\dots\dots$$

$$=\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{3x}{1+\cfrac{3x}{1+\cfrac{4x}{1+\cfrac{4x}{1+\cfrac{5x}{1+\cfrac{5x}{1+\dots}}}}}}}}}}}$$

En posant $x=1$, on a

$$1-1+1.2-1.2.3+1.2.3.4-1.2.3.4.5+\dots\dots$$

$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{4}{1+\dots}}}}}}}}}\,,$$

ce qui donne les réduites successives

$$\frac{1}{1}\,,\quad \frac{1}{2}\,,\quad \frac{2}{3}\,,\quad \frac{4}{7}\,,\quad \frac{8}{13}\,,\quad \frac{10}{17}\quad \frac{44}{73}\,,\quad \frac{124}{209}\,,\;\ldots\ldots,$$

fractions alternativement plus grande et plus petite que la valeur de la série, mais convergent sans cesse vers cette valeur.

On sait que, $e$ étant la base du système de logarithmes de Néper, on a

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\ldots$$

On en conclut

$$\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{2 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots}{\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots}\,.$$

En opérant sur la fraction qui forme le second membre de cette équation, comme on le fait dans la recherche du plus grand commun diviseur, on trouvera successivement les quotiens et les restes contenus dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|l}
\frac{2}{x} & \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\ldots \\[2ex]
\frac{6}{x} & \qquad \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{2x^3}{1.2.3.4} + \frac{3x^4}{1.2.3.4.5} + \frac{4x^5}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\ldots \\[2ex]
\frac{10}{x} & \qquad\qquad + \frac{2x^3}{1.2.3.4.5} + \frac{6x^4}{1.2.3.4.5.6} + \frac{12x^5}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots \\[2ex]
\frac{14}{x} & \qquad\qquad\qquad + \frac{6x^4}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{24x^5}{1.2.3.4.5.6.7.8} + \ldots \\[2ex]
\frac{18}{x} & \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{24x^5}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} + \ldots \\[2ex]
\ldots\ldots & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots\ldots
\end{array}$$

d'où on conclura le développement que voici:

$$\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{2}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{6}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{10}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{14}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{18}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{22}{x}+\ldots}}}}};$$

et, par suite,

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\cfrac{1}{\cfrac{2}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{6}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{10}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{14}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{18}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{22}{x}+\ldots}}}}}};$$

ou bien encore

$$x.\frac{e^x-1}{e^x+1}=\cfrac{x^2}{2+\cfrac{x^2}{6+\cfrac{x^2}{10+\cfrac{x^2}{14+\cfrac{x^2}{18+\cfrac{x^2}{22+\ldots}}}}}}$$

En posant $x=1$, on tire de là

$$\frac{e-1}{e+1}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\cfrac{1}{22+\ldots}}}}}};$$

ce qui donne les réduites successives

$$\frac{1}{2},\quad\frac{6}{13},\quad\frac{61}{132},\quad\frac{860}{1861},\quad\frac{15541}{33630},\quad\frac{342762}{741721},\ldots$$

dont la dernière donne la valeur de $\frac{e-1}{e+1}$ avec douze chiffres décimaux exacts. Il est facile ensuite d'en conclure la valeur de $e$.

Appliquons encore notre procédé au développement de Tang.$x$ en fraction continue. On a

$$\text{Tang.}x=\frac{\text{Sin.}x}{\text{Cos.}x}=\frac{\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\dots}{1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\dots}.$$

En cherchant, comme ci-dessus, le plus grand commun diviseur des deux termes de la fraction, on trouvera les quotiens et les restes successifs tels qu'ils se présentent dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{r|l}
 & 1+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\frac{x^8}{1.2.3.4.5.6.7.8}-\dots \\
+\frac{1}{x} & x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\frac{x^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}-\dots \\
-\frac{3}{x} & -\frac{2x^3}{1.2.3}+\frac{4x^4}{1.2.3.4.5}-\frac{6x^6}{1.2.3.4.5.6.7}+\frac{8x^8}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}-\dots \\
+\frac{5}{x} & -\frac{x^3}{1.3.5}+\frac{x^5}{5.6.7}-\frac{2x^7}{5.6.7.8.9}+\dots \\
-\frac{7}{x} & +\frac{2x^4}{5.6.7}-\frac{x^6}{5.6.7.9}+\dots \\
+\frac{9}{x} & +\frac{2x^5}{5.6.7.9}-\dots \\
\dots\dots & \dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

d'où on conclura

$$\text{Tang.}x = \cfrac{1}{\cfrac{1}{x} + \cfrac{1}{-\cfrac{3}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{5}{x} + \cfrac{1}{-\cfrac{7}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{9}{x} + \dots\dots}}}}}$$

ou bien encore

$$x\text{Tang.}x = \cfrac{x^2}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \cfrac{x^2}{11 - \dots}}}}}}$$

Il ne faut pas perdre de vue, dans les applications de ce développement, qu'ici le rayon est pris pour unité.

M. Legendre, dans les notes de sa Géométrie, parvient à un pareil résultat par une méthode fort élégante, mais qui est particulière à ce genre de série.

Pour dernier exemple, prenons la formule

$$\text{Log}\,(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots\dots$$

En opérant sur la série qui forme le second membre, comme nous l'avons fait dans les autres exemples, c'est-à-dire, en cherchant son plus grand commun diviseur avec l'unité, les quotiens et les restes successifs seront tels qu'on les voit ici

$$
\begin{array}{c|l}
 & 1 \\
\frac{1}{x} & \frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\ldots\ldots \\
\frac{2}{1} & \frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{4}-\frac{x^4}{5}+\frac{x^5}{6}-\frac{x^6}{7}+\ldots\ldots \\
\frac{3}{x} & \qquad \frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{7}+\frac{3x^4}{20}-\frac{2x^5}{15}+\frac{5x^6}{42}-\ldots \\
\frac{2}{2} & \qquad \frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{5}+\frac{x^4}{5}-\frac{4x^5}{21}+\frac{5x^6}{28}-\ldots \\
\frac{5}{x} & \qquad\quad +\frac{x^3}{30}-\frac{x^4}{20}+\frac{2x^5}{35}-\frac{5x^6}{84}+\ldots \\
\frac{2}{3} & \qquad\quad +\frac{x^3}{20}-\frac{3x^4}{35}+\frac{9x^5}{84}-\ldots\ldots \\
\frac{7}{x} & \qquad\qquad +\frac{x^4}{140}-\frac{x^5}{70}+\ldots\ldots \\
\ldots & \qquad\qquad +\frac{x^4}{70}-\ldots\ldots
\end{array}
$$

ce qui donnera

$$
\mathrm{Log.}(1+x)=\cfrac{1}{\frac{1}{x}+\cfrac{1}{\frac{2}{1}+\cfrac{1}{\frac{3}{x}+\cfrac{1}{\frac{2}{2}+\cfrac{1}{\frac{5}{x}+\cfrac{1}{\frac{2}{3}+\cfrac{1}{\frac{7}{x}+\cfrac{1}{\frac{2}{4}+\ldots}}}}}}}}\,;
$$

ou bien encore

$$\text{Log.}(1+x)=\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{3+\cfrac{2x}{2+\cfrac{2x}{5+\cfrac{3x}{2+\cfrac{3x}{7+\cfrac{4x}{2+\cfrac{4x}{9+\cfrac{5x}{2+\cfrac{5x}{11+\ldots}}}}}}}}}}}$$

Si, dans cette formule, sous sa première forme, on change $x$ en $\frac{1}{x}$, elle deviendra

$$\text{Log}\left(\frac{1+x}{x}\right)=\cfrac{1}{x+\cfrac{\frac{1}{2}}{1+\cfrac{1}{3x+\cfrac{\frac{1}{2}}{2+\cfrac{1}{5x+\cfrac{\frac{1}{2}}{3+\cfrac{1}{7x+\cfrac{\frac{1}{2}}{4+\ldots}}}}}}}}\;;$$

ou bien encore

$$\text{Log.}\left(\frac{1+x}{x}\right)=\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3x+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{5x+\cfrac{3}{2+\cfrac{3}{7x+\cfrac{4}{2+\cfrac{4}{9x+\ldots}}}}}}}}}$$

Il nous sera présentement facile de généraliser le procédé dont nous venons de donner des exemples. Soit la fraction

$$\frac{a+a'+a''x^2+a'''x^3+a''''x^4+\ldots\ldots}{b+b'x+b''x^2+b'''x^3+b''''x^4+\ldots\ldots}\;;$$

en divisant le numérateur par le dénominateur, ne prenant que le premier terme du quotient, et posant, pour abréger,

$$\frac{ba'-ab'}{b}=c\,,$$

$$\frac{ba''-ab''}{b}=c'\,,$$

$$\frac{ba''-ab'''}{b}=c''\,;$$

$$\ldots\ldots\ldots\,,$$

on aura

$$\frac{a+a'x+a''x^2+a'''x^3+\ldots\ldots}{b+b'x+b''x^2+b'''x^3+\ldots\ldots}=\frac{a}{b}+\cfrac{x}{\cfrac{b+b'x+b''x^2+b'''x^3+\ldots\ldots}{c+c'x+c''x^2+c'''x^3+\ldots\ldots}}\,.$$

Par un semblable calcul, en posant, pour abréger,

$$\frac{cb'-bc'}{c}=d\,,$$

$$\frac{cb''-bc''}{c}=d'\,,$$

$$\frac{cb'''-bc'''}{b}=d''\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\,;$$

on aura

$$\frac{b+b'x+b''x^2+b'''x^3+\ldots\ldots}{c+c'x+c''x^2+c'''x^3+\ldots\ldots}=\frac{b}{c}+\cfrac{x}{\cfrac{c+c'x+c''x^2+c'''x^3+\ldots\ldots}{d+d'x+d''x^2+d'''x^3+\ldots\ldots}}\,.$$

En posant semblablement

$$\frac{dc'-cd'}{d}=e\,;$$

$$\frac{dc''-cd''}{d}=e' ,$$

$$\frac{dc'''-cd'''}{d}=e'' ,$$

$$\ldots\ldots\ldots ,$$

on trouvera

$$\frac{c+c'x+c''x^2+c'''x^3+\ldots\ldots}{d+d'x+d''x^2+d'''x^3+\ldots\ldots}=\frac{c}{d}+\cfrac{x}{\cfrac{d+d'x+d''x^2+d'''x^3+\ldots\ldots}{e+e'x+e''x^2+e'''x^3+\ldots\ldots}} ,$$

et ainsi de suite ; ce qui donnera finalement

$$\frac{a+a'x+a''x^2+a'''x^3+\ldots\ldots}{b+b'x+b''x^2+b'''x^3+\ldots\ldots}=\frac{a}{b}+\cfrac{x}{\cfrac{b}{c}+\cfrac{x}{\cfrac{c}{d}+\cfrac{x}{\cfrac{d}{e}+\cfrac{x}{\cfrac{e}{f}+\ldots\ldots}}}} ;$$

et, par suite,

$$\frac{b+b'x+b''x^2+b'''x^3+\ldots\ldots}{a+a'x+a''x^2+a'''x^3+\ldots\ldots}=\cfrac{1}{\cfrac{a}{b}+\cfrac{x}{\cfrac{b}{c}+\cfrac{x}{\cfrac{c}{d}+\cfrac{x}{\cfrac{d}{e}+\cfrac{x}{\cfrac{e}{f}+\ldots\ldots}}}}} ;$$

ce qui revient encore à

$$ax.\frac{b+b'x+b''x^2+b'''x^3+\ldots\ldots}{a+a'x+a''x^2+a'''x^3+\ldots\ldots}=\cfrac{abx}{a+\cfrac{bcx}{b+\cfrac{cdx}{c+\cfrac{dex}{d+\cfrac{efx}{e+\ldots}}}}}$$

Pour montrer, par un exemple, l'application de cette formule générale, nous reprendrons la série (9), traitée par Euler, c'est-à-dire, la série

$$x-1.x^2+1.2x^3-1.2.3x^4+1.2.3.4x^5-1.2.3.4.5x^6+1.2.3.4.5.6x^7-\dots\dots$$

Nous aurons ici

$$a=1\,,\quad a'=0\,,\quad a''=0\,,\quad a'''=0\,,\quad a''''=0\,,\quad \dots\dots\dots\,,$$
$$b=1\,,\quad b'=-1\,,\quad b''=2\,,\quad b'''=-6\,,\quad b''''=24\,,\quad \dots\dots\dots\,;$$

il en résultera

$$c=\frac{ba'-ab'}{b}=+1\,,\qquad d=\frac{cb'-bc'}{c}=+1\,,\qquad e=\frac{dc'-cd'}{d}=+2\,,$$

$$c'=\frac{ba''-ab''}{b}=-2\,,\qquad d'=\frac{cb''-bc''}{c}=-4\,,\qquad e'=\frac{dc''-cd''}{d}=-12\,,$$

$$c''=\frac{ba'''-ab'''}{b}=+6\,,\qquad d''=\frac{cb'''-bc'''}{c}=+18\,,\qquad e''=\frac{dc'''-cd'''}{d}=+72\,,$$

$$c'''=\frac{ba''''-ab''''}{b}=-22\,,\qquad d'''=\frac{cb''''-bc''''}{c}=-36\,;\qquad e'''=\frac{dc''''-cd''''}{d}=-480\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\,,\qquad \dots\dots\dots\dots\,,\qquad \dots\dots\dots\dots$$

ce qui donnera, en substituant,

$$x-1x^2+1.2x^3+1.2.3x^4+1.2.3.4x^5-\dots\dots=\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{3x}{1+\cfrac{3x}{1+\dots}}}}}}}\,;$$

comme Euler l'avait trouvé.

Nous nous proposons, dans un second mémoire, de revenir de nouveau sur ce sujet.

# QUESTIONS PROPOSÉES.

## *Théorèmes de géométrie.*

Par M. Aimé.

I. Le lieu des sommets de tous les cônes droits circonscrits à une même ellipse est une hyperbole qui a pour foyers les sommets et pour sommets les foyers de l'ellipse, et dont le plan est perpendiculaire au sien.

II. Le lieu des sommets de tous les cônes droits circonscrits à une même hyperbole est une ellipse qui a pour sommets les foyers et pour foyers les sommets de l'hyperbole, et dont le plan est perpendiculaire au sien.

III. Le lieu des sommets de tous les cônes droits circonscrits à une même parabole est une autre parabole qui a pour foyer le sommet et pour sommet le foyer de la première, et dont le plan est perpendiculaire au sien.

IV. La somme des distances du sommet d'un cône droit circonscrit à une ellipse ou à une hyperbole aux deux extrémités d'un diamètre de la courbe est constante.

V. La somme des distances de chacun des points d'une ellipse aux sommets de deux cônes droits qui lui sont circonscrits, est constante.

VI. La différence des distances de chacun des points d'une hyperbole aux sommets de deux cônes droits circonscrits est constante.

VII. La distance de chacun des points d'une parabole au sommet d'un cône droit circonscrit est égale à la distance de ce sommet à un plan fixe.

# ARITHMÉTIQUE.

## *Sur l'erreur qu'entraîne l'interpolation vulgaire dans l'usage des tables de logarithmes ;*

Par M. Bary, professeur de physique au Collége royal de Charlemagne.

On sait que l'erreur inséparable de l'emploi des parties proportionnelles, dans les calculs par logarithmes, a été calculée par Bertrand, de Genève, qui, pour parvenir à son but, est parti de la formule du binôme, étendue au cas de l'exposant fractionnaire.

Il ne sera peut-être pas inutile, pour ceux qui commencent l'étude de l'algèbre, de montrer ici comment on peut apprécier l'erreur dont il s'agit, en se fondant sur les séries logarithmiques.

I. Supposons d'abord qu'il soit question d'assigner le logarithme qui répond à un nombre donné. Soient $n$ et $n+1$ les deux nombres consécutifs des tables qui comprennent le nombre donné, et $n+x$ ce nombre, $x$ étant une fraction ; soit $y$ ce qu'il faut ajouter à $\text{Log}\,n$, pour obtenir $\text{Log.}(n+x)$ ; suivant le procédé élémentaire d'interpolation, on calculera $y$ par cette proportion

$$1:\text{Log.}(n+1)-\text{Log.}n::x:y=x\{\text{Log.}(n+1)-\text{Log.}n\}\ .$$

Ainsi l'erreur commise est la différence qui existe entre les deux nombres

$$\text{Log.}(n+x)-\text{Log.}n \quad ,$$

$$x\{\text{Log.}(n+1)-\text{Log.}n\} \quad .$$

Or, en représentant par $M$ le module des tables vulgaires, on a

$$\text{Log.}(n+x)-\text{Log.}n=\text{Log.}\left(1+\frac{x}{n}\right)=M\left(\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}+\frac{x^3}{3n^3}-\ldots\right) ,$$

$$x\{\text{Log.}(n+1)-\text{Log.}n\}=x\text{Log.}\left(1+\frac{1}{n}\right)=M\left(\frac{x}{n}-\frac{x}{2n^2}+\frac{x}{3n^3}-\ldots\right) . \quad \text{(A)}$$

Si l'on retranche membre à membre ces deux équations l'une de l'autre, on trouvera, en réduisant, et en désignant par $\varepsilon$ l'erreur commise,

$$\varepsilon=\frac{Mx}{n}\left\{\frac{1-x}{2n}-\frac{1-x^2}{3n^2}+\frac{1-x^3}{4n^3}-\frac{1-x^4}{5n^4}+\ldots\ldots\right\} . \quad \text{(B)}$$

Cette série étant convergente, et ayant ses termes alternativement positifs et négatifs, il en résulte qu'on a

$$\varepsilon<\frac{Mx}{n}\cdot\frac{1-x}{2n} \quad ;$$

et, puisque $M$ est $<\frac{1}{2}$, et que le maximum de $x(1-x)$ est $\frac{1}{4}$, il en résulte qu'on doit avoir, *à fortiori*,

$$\varepsilon<\frac{1}{16\,n^2} \quad .$$

II. Supposons présentement qu'à l'inverse il soit question d'assigner le nombre qui répond à un logarithme donné. Soient $n$ et $n+1$ les deux nombres entiers consécutifs qui interceptent le nombre demandé $n+x$ ; on déterminera la valeur approchée $z$ de la différence $x$ par la proportion

$$\text{Log.}(n+1)-\text{Log.}n : 1 :: \text{Log.}(n+x)-\text{Log.}n : z=\frac{\text{Log.}(n+x)-\text{Log.}n}{\text{Log.}(n+1)-\text{Log.}n}\,.$$

On aura donc, en désignant par $\varepsilon'$ l'erreur commise

$$\varepsilon'=\frac{\text{Log.}(n+x)-\text{Log.}n}{\text{Log.}(n+1)-\text{Log.}n}-x=\frac{\text{Log.}\left(1+\frac{x}{n}\right)-x\text{Log.}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\text{Log.}\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{\varepsilon}{\text{Log.}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\,.$$

Cela donne, au moyen des formules (A) et (B)

$$\varepsilon'=\frac{\frac{x}{n}\left(\frac{1-x}{2n}-\frac{1-x^2}{3n^2}+\frac{1-x^3}{4n^3}-\frac{1-x^4}{5n^4}+\ldots\right)}{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{4n^3}+\ldots}\,.$$

De là on conclura évidemment

$$\varepsilon'<\frac{\frac{x}{n}\cdot\frac{1-x}{2n}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}}\,;$$

ou, en réduisant,

$$\varepsilon'<\frac{x(1-x)}{2n-1}\,;$$

et, *à fortiori*,

$$\varepsilon'<\frac{1}{4(2n-1)}\,.$$

Ceci suppose, au surplus, que les logarithmes tabulaires sont parfaitement exacts, et que conséquemment il en est de même des valeurs de $y$ et de $z$, ce qui n'a pas lieu réellement. Pour l'évaluation de l'erreur totale, due à l'inexactitude de la proportion et à celle des logarithmes, on peut consulter une note de M. Vincent, insérée à la pag. 19 du XVI.me volume des *Annales*, ou dans la 7.me édition de l'Algèbre de M. Reynaud.

# OPTIQUE.

## *Essai théorique sur les couleurs accidentelles;*

Par M. Gergonne.

J'ai déja insinué, en plus d'un endroit de ce recueil, qu'au point où les sciences sont présentement parvenues, et encombrés comme nous le sommes de vérités de détail, un de nos besoins les plus pressans et les plus impérieux est beacoup moins d'en accroître encore le nombre que de rapprocher ces vérités les unes des autres, de les comparer et de les grouper suivant leurs analogies et leurs différences, et d'essayer ensuite de les remplacer par un moindre nombre de vérités plus générales, qui en soient une sorte d'abrégé, et desquelles elles puissent toutes êtres facilement déduites. Ce n'est, en effet, que par un tel artifice que l'esprit humain, borné comme il l'est, peut se promettre de n'être jamais arrêté dans la culture du champ des sciences, dont l'étendue est tout-à-fait sans limite.

On ne saurait donc vouer trop de reconnaissance aux hommes qui consacrent leurs méditations et leurs veilles, non à faire des découvertes nouvelles, mais à rattacher à quelques principes généraux et peu nombreux, ou même à de simples hypothèses, les découvertes diverses dues à leurs devanciers. C'est, par exemple, d'un service de ce genre que nous sommes redevables au docteur Weels. Avant cet ingénieux physicien, les phénomènes auxquels donne naissance la formation de la rosée avaient de quoi nous décourager par leur nombre, leur variété et leur apparente bizarrerie. M. Weels a posé quelques principes fort simples, et dès lors il a pu nous être permis de soulager notre mémoire de tous ces faits de détails dont elle était surchargée, bien certains de les retrouver à volonté, comme conséquences rigoureuses de ces principes, et même de deviner, à l'avance, sans aucun effort d'esprit, ce qui devrait résulter de tel ou tel concours de circonstances dont la nature n'aurait encore jamais offert la réunion aux regards de l'observateur.

Il est en physique des phénomènes d'un autre ordre qui n'offrent pas moins d'intérêt, et qui ne sont ni moins nombreux ni moins variés ni moins bizarres, en apparence, que ceux qui naissent de la formation de la rosée ; ce sont les phénomènes que Buffon a, je crois, désigné le premier sous le nom de *phénomènes des couleurs accidentelles*, et qui seraient peut-être plus exactement caractérisés par la dénomination de *phénomènes des couleurs apparentes ou relatives*. Ces phénomènes ont été particulièrement étudiés par Léonard de Vinci, Jurin, le P. Scherffer, Buffon, Beguelin, Œpinus, Prieur, Meusnier, Hassenfratz, Rumfort, etc., qui les ont très-exactement décrits, soit dans les collections académiques, soit dans des traités spéciaux ; mais on ne s'est que faiblement occupé de leurs causes et du principe commun auquel ils viennent tous se rattacher, et encore ce qu'on en a dit, par occasion, est-il présenté avec une sorte de septicisme qui permettrait de croire que ceux qui cherchaient à remonter à la cause première de ces phénomènes n'avaient pas eux-mêmes une foi bien entière dans les explications qu'ils en présentaient.

Dans les premiers temps où j'enseignais la physique, ce n'était pas une petite affaire pour moi que de fixer, dans ma mémoire, de tous temps très-rebelle pour des faits sans liaison, une si grande variété de résultats en apparence si incohérens entre eux, et je jugeai qu'à plus forte raison l'auditoire, devant qui je les exposais, en retiendrait fort peu de chose. Je fus donc sollicité par ma paresse à réfléchir sur les explications qui en avaient été hasardées, et je ne tardai pas à juger que ces explications, bien saisies, méritaient plus de confiance que leurs auteurs ne paraissaient leur en avoir accordé. Dès lors je vis qu'un ou deux principes, bien évidens, suffisaient pour me diriger sûrement dans ce qui, jusque-là, m'avait paru un dédale; et présentement, de toutes les parties de l'optique, celle qui concerne les couleurs accidentelles me semble la plus facile à enseigner. Je vais expliquer ici de quelle manière je l'envisage, c'est-à-dire, écrire à peu près la leçon que j'ai pris le parti de faire sur ce piquant sujet. Je suivrai d'ailleurs une marche synthétique, c'est-à-dire, qu'au lieu de décrire d'abord les phénomènes, pour remonter ensuite à leurs causes, je poserai, au contraire, quelques principes desquels ces phénomènes se déduiront ensuite comme de simples corollaires. On peut remarquer, en effet, que, bien que depuis environ un demi-siècle, l'analyse soit fort prisée par des hommes même qui, pour la plupart, ne savent pas trop bien, peut-être, en quoi elle consiste, il est une multitude de circonstances où la synthèse lui est de beaucoup préférable (*).

Pour rendre plus simples les développemens dans lesquels je vais entrer, je supposerai constamment qu'il n'existe que trois couleurs *primitives*, le *rouge*, le *jaune* et le *bleu* qui, mélangées ou combinées deux à deux, produisent trois autres couleurs qu'on peut appeler *secondaires*, savoir : le *vert*, le *violet*, l'*orangé*; et

(*) Voy., sur cela, la pag. 345 du tom. VII.e du présent recueil.

que le mélange ou la combinaison des trois couleurs primitives, dans de convenables proportions, produit le *blanc ;* tandis que de l'absence absolue de toute lumière résulte le *noir* qui en est l'opposé. J'ai prouvé, en effet, à la pag. 228 du X.$^{me}$ volume du présent recueil, qu'il ne résultait pas invinciblement des expériences de Newton que les couleurs primitives dussent être au nombre de plus de trois, et la pratique des arts n'en reconnaît pas davantage. Il n'y aurait, au surplus, que très-peu de modifications à faire à la théorie qui va être développée, si l'on voulait absolument admettre plus de trois couleurs simples.

Il y a entre les couleurs primitives et les couleurs secondaires cette différence essentielle que les premières sont absolues, et non susceptibles de plus ou de moins, tandis que, suivant les proportions variées des composans, il existe, entre deux couleurs primitives données, une infinité de nuances d'une même couleur secondaire, allant de la première à la seconde par une dégradation continue. Ainsi, il n'y a pas, à proprement parler, différentes sortes de rouges, différentes sortes de jaunes, différentes sortes de bleus ; mais, entre le jaune et le bleu, par exemple, il peut y avoir une infinité de nuances de verts, tirant plus ou moins sur l'une ou sur l'autre de ces deux couleurs.

Ce qui vient d'être observé, relativement à deux couleurs primitives, peut être également appliqué au blanc et au noir, entre lesquels on peut concevoir une infinité de *gris*, plus ou moins clairs, plus ou moins foncés.

On peut même dire de toutes les autres couleurs, soit simples, soit composées, ce qui vient d'être dit du blanc. Une couleur quelconque que l'on combine avec plus ou moins de blanc, en devient ainsi plus ou moins *pâle*, tandis que, si l'on en diminue graduellement la lumière, elle deviendra de plus en plus *foncée*. Ainsi, au lieu de passer du blanc au noir par une suite de gris, on peut y passer par une suite de roses, d'abord très-pâle, et ensuite de plus en plus sombres ; et c'est à peu près ce qui arrive au fer incandescent, à mesure qu'il se refroidit. C'est sous cette restriction formelle qu'il faut entendre ce que j'ai dit ci-dessus, sur la différence qu'on remarque entre les couleurs primitives et les couleurs secondaires. La vérité est qu'il peut fort bien exister une infinité de nuances de chacune des premières entre le blanc et le noir ; mais toutes ces nuances sont toujours la même nature de couleur (*).

Dans tout ce qui va suivre, je dirai, avec tous les physiciens, que deux couleurs sont *complémentaires* l'une de l'autre lorsqu'elles seront de nature à produire le blanc par leur mélange ou combinaison. En conséquence, en ne considérant simplement que les couleurs primitives et les couleurs secondaires, les couleurs complémentaires l'une de l'autre seront :

Le ROUGE et le VERT,
Le JAUNE et le VIOLET ;
Le BLEU et l'ORANGÉ.

Dans tout ce qui précède et dans tout ce qui va suivre, il ne saurait être question que de ce qui se passe chez les personnes qui ont la vue parfaitement saine. De même, en effet, qu'il est beaucoup de personnes incapables d'apprécier, dans les sons, la différence du grave à l'aigu, ou ce qu'on appelle l'intonation, et pour l'oreille desquels il n'existe, pour ainsi dire, que des

---

(*) Il résulte de tout ce qui vient d'être dit qu'avec du blanc, du jaune, du rouge, du bleu et du noir, bien purs, non susceptibles de se combiner chimiquement, on peut parvenir, par des mélanges divers, à imiter parfaitement toutes les teintes variées que l'art ou la nature offre à nos regards ; et c'est ce que les peintres savent parfaitement. Le blanc serait même superflu, si nous pouvions, avec nos poudres grossières, le faire résulter des couleurs primitives, comme on le fait, au moyen d'une lentille, avec les couleurs du spectre.

sons forts et des sons faibles, on en rencontre aussi quelquefois dont l'œil ne distingue, dans les couleurs, que du clair et du foncé, et qui ne conçoivent pas, par exemple, qu'il soit plus facile d'apercevoir des cérises sur un cérisier que des olives sur un olivier. Il est manifeste que, pour des personnes organisées de la sorte, tout ce que nous écrivons ici doit être complètement inintelligible (*).

Ces préliminaires ainsi établis, nous allons poser deux principes généraux que chacun pourra aisément vérifier par sa propre expérience, et dont le second n'est même, à proprement parler, qu'une conséquence forcée du premier. On verra ensuite tout ce qui concerne les couleurs accidentelles s'en déduire sans effort.

Le premier de ces deux principes consiste en ce que l'*action continue, ou même fréquemment répétée, de quelque objet extérieur sur l'un quelconque de nos organes, finit par le blaser sur l'impression qu'il en reçoit, au point d'y devenir presque entièrement insensible.*

Les preuves d'expérience se présentent ici en foule, et nous n'avons, en quelque sorte, que l'embarras du choix.

La première fois qu'on porte immédiatement un vêtement de laine sur la peau, on en est d'ordinaire singulièrement incommodé, on éprouve des démangeaisons fort gênantes; mais avec un peu de persistance on en vient bientôt à n'y plus faire aucune attention.

Le palais des personnes qui font habituellement usage d'alimens peu sopides est vivement affecté par des mets dont l'assaisonnement

(*) J'ai souvent pensé que Descartes, qui prétendait expliquer la diversité des couleurs par une plus ou moins grande intensité de lumière, devait être affecté de quelque vice organique du genre de celui que je viens de mentionner.

est tant soit peu relevé ; tandis que celles qui, au contraire, se sont habituées, de longue main, à des alimens d'un très-haut goût, finissent par les trouver insipides.

Lorsqu'on entre dans le magasin d'un parfumeur ou dans une pharmacie, on est très-vivement affecté de l'odeur des parfums ou des drogues qui y sont étalés, tandis que les personnes qui sont là tout le jour, pour servir le public, n'y font aucune attention.

Le bruit d'un moulin ne trouble aucunement le sommeil du meunier qui se réveille subitement, au contraire, aussitôt que le bruit cesse.

Enfin, la première fois qu'on fait usage de lunettes vertes, tous les objets qui sont à la portée de la vue semblent se revêtir d'une teinte verdâtre qui paraît s'évanouir graduellement par un usage prolongé de cet instrument.

Le second principe que nous établirons, et qui, comme nous l'avons déjà annoncé, résulte tout naturellement du premier, c'est que, *si un organe reçoit simultanément deux impressions, sur l'une desquelles il soit déjà blasé, il ne sera sensible qu'à celle-là seulement qui sera nouvelle pour lui.*

Ainsi, par exemple, si, outre la pression atmosphérique qui agit sans cesse sur tous les points de la surface de notre corps, nous recevons l'impression d'un vent léger, ce vent nous affectera comme s'il agissait seul, et que la pression atmosphérique fût tout à fait nulle.

Que quelqu'un, après avoir tenu long-temps dans sa bouche de l'eau de fleur d'orange, y introduise ensuite un mélange d'eau de fleur d'orange et d'essence de girofle, la saveur de ce dernier liquide l'affectera seule, et celle de l'autre sera pour lui comme non avenue.

Si, dans une chambre fortement parfumée de lavande, on vient à présenter à quelqu'un, qui l'habite depuis long-temps, un sachet rempli de lavande et de thym, l'odeur de cette dernière plante l'affectera seule; il ne sera aucunement sensible à l'odeur de l'autre.

Quelqu'un qui habite sur le rivage de la mer ou dans le voisinage d'une chute d'eau, s'accoutume bientôt au bruit des vagues ou à celui du liquide qui s'écoule, et parvient ensuite à saisir facilement le plus léger bruit différent de celui-là.

Si, tandis que quelqu'un porte attentivement ses regards sur un grand carton d'un rouge très-vif, exposé aux rayons du soleil, on vient à jeter subitement sur ce carton un ruban violet, ce ruban lui semblera bleu, attendu que, blasé sur l'impression du rouge, par la contemplation du carton, son œil ne verra, dans le violet du ruban, mélange de rouge et de bleu, que la dernière de ces deux couleurs; le ruban lui paraîtrait rouge, au contraire, si le carton était bleu. Dans cette nouvelle hypothèse, si l'on jetait sur le carton un ruban vert, ce ruban semblerait jaune au spectateur; ce même ruban lui paraîtrait bleu, au contraire, si le carton était de couleur jaune. Dans cette dernière hypothèse, un ruban orange, jeté subitement sur le carton, lui paraîtrait rouge; ce même ruban lui paraîtrait jaune, au contraire, si, comme dans la première hypothèse, le carton était de couleur rouge. Dans tous ces différens cas, la couleur du ruban est composée de la couleur simple du carton, sur laquelle l'œil est blasé et d'une autre couleur simple, par laquelle seulement l'organe peut être affecté.

Il ne faudrait point être surpris, au surplus, si les expériences de ce genre ne réussissaient pas également bien à toutes sortes de personnes, ni même à la même personne à différentes époques; il peut très-bien se faire, en effet, que d'individu à individu, il y ait différences assez notables dans le temps nécessaire pour blaser un organe sur une impression qu'il reçoit, et les mêmes différences peuvent exister, d'une impression à une autre, pour le même individu, à la même époque, tandis qu'au contraire, chez le même individu, l'âge ou d'autres circonstances peuvent faire varier le temps nécessaire pour que l'organe soit complètement blasé sur une même impression donnée. Ajoutons encore que, quand les expériences se prolongent au-delà d'un certain terme ; l'organe se fatigue et ne se trouve plus conséquemment dans la disposition où il était quand on les a commencées. Ces remarques sont applicables aux expériences qu'il nous reste à décrire , comme à celles que nous avons déjà décrites.

Les détails dans lesquels nous sommes entrés peuvent servir à rendre compte d'un grand nombre de phénomènes optiques que nous avons journellement l'occasion de remarquer. Que , par exemple , les fenêtres d'une chambre exposée au midi soient garnies de rideaux rouges , fermés. Pour qui entrera subitement dans cette chambre , aucun objet ne se présentera sous ses couleurs effectives. Les objets rouges sembleront d'un rouge plus intense , le blanc sera rosé , le bleu semblera violet et le jaune orangé. Mais ces apparences ne subsisteront pas long-temps , et , du moment que , par l'effet d'un séjour suffisamment prolongé, l'œil du spectateur se sera blasé sur l'impression du rouge , il ne sera plus affecté que des différences , et tous les objets lui sembleront dès lors avoir repris leur teinte naturelle. Des phénomènes analogues auraient lieu si les rideaux , dont nous supposons les fenêtres garnies , au lieu d'être de couleur rouge , étaient de couleur jaune ou de couleur bleue , ou même d'une couleur composée quelconque.

On peut aussi faire des expériences analogues avec des verres colorés transparens. Si , par exemple , je place entre mes yeux et les objets extérieurs un verre transparent coloré en rouge , tous ces objets me présenteront , au premier aspect , les mêmes apparences que me présentaient les objets de l'intérieur de la chambre dont je supposais , tout à l'heure , les fenêtres garnies de rideaux rouges , au moment où j'y suis entré ; mais cette apparence sera de peu de durée , et j'en viendrai bientôt à juger de la couleur des objets comme je le ferais à la vue simple. On obtiendrait des résultats analogues en employant des verres transparens de toute autre couleur , simple ou composée.

Enfin , les mêmes choses peuvent se remarquer de nuit , lorsqu'on éclaire les objets avec des feux diversement colorés ; et , c'est parce qu'il est rare de trouver une lumière artificielle parfaitement blanche, qu'on juge généralement si mal de nuit de la couleur réelle des objets.

On pourrait dire, d'après cela, qu'il n'est pas absolument certain que la lumière solaire soit parfaitement blanche. Si, en effet, cette lumière était décidément rouge, nous nous trouverions exactement sur cette terre comme dans la chambre garnie de rideaux rouges, dont il a été question ci-dessus, et notre œil, frappé seulement des différences, jugerait exactement de la couleur des objets comme il en juge lorsque ces objets sont éclairés par la lumière blanche. On voit même que la lumière solaire pourrait varier de couleur, d'un jour à l'autre, ou même passer graduellement d'une nuance à une autre, dans le cours d'une même journée, sans que nous nous en doutassions aucunement.

Lorsqu'au commencement de ce siècle on chercha à faire revivre l'hypothèse, long-temps délaissée, à l'aide de laquelle Huygens avait tenté d'expliquer les phénomènes que la lumière nous présente, et qui consiste, comme l'on sait, à assimiler les phénomènes optiques aux phénomènes acoustiques, ma plus forte objection contre cette hypothèse, et qui me tenait encore attaché à celle de Newton, consistait en ce que le rouge, le jaune, le bleu et toutes les couleurs qui résultent du mélange de celles-là, sont telles, absolument et en elles-mêmes, tandis qu'un son, au contraire, n'est grave ou aigu que relativement; de telle sorte qu'un même son peut être indistinctement un *ut*, un *mi* ou un *sol*, ou même tout autre son intermédiaire, suivant la tonique, tout à fait arbitraire, à laquelle on voudra le rapporter. Les réflexions que j'ai faites postérieurement sur le phénomène des couleurs relatives m'ont paru, si non répondre complètement à cette objection, du moins lui ôter une grande partie de sa force, en montrant que les couleurs, comme les sons, ne nous présentent souvent tel ou tel aspect que relativement. A la vérité, comme dans la série des sons perceptibles à l'oreille, on rencontre une suite d'ut, une suite de mi, une suite de sol, les uns plus graves et les autres plus aigus, il resterait toujours à expliquer, dans le parallèle qu'on voudrait établir entre les sons et les couleurs, pourquoi, dans la série des couleurs perceptibles à l'œil, on ne rencontre pas plusieurs rouges, plusieurs jaunes et plusieurs bleus, et pour quoi conséquemment l'expérience du prisme ne nous présente pas une série de spectres, comme celle du monocorde nous présente une série de gammes. La réponse la plus plausible qu'on pourrait opposer à cette objection, consisterait à admettre que les ondulations de l'éther, comme celles de l'air, ont des limites de rapidité et de lenteur, au-delà desquelles les premières cessent d'être perceptibles à l'œil comme les derniers cessent de l'être à l'oreille, mais que ces limites sont beaucoup plus resserrées pour les ondulations de l'éther que pour celles de l'air. On conçoit, en effet, que si, par exemple, pour qu'un son fût perceptible à l'oreille, il était nécessaire que le corps sonore n'exécutât ni moins de 100 ni plus de 200 vibrations par seconde, nous ne connaîtrions qu'une gamme unique en acoustique, comme nous ne connaissons qu'un spectre unique en optique. Au surplus, tout en hasardant cette explication, nous ne dissimulons pas qu'une analogie rigoureuse entre les sons et les couleurs nous paraîtra toujours très-difficile à bien établir.

Après cette digression, revenons à ce qu'on appelle proprement couleurs accidentelles. Nous allons voir qu'à l'aide de nos principes, il devient extrêmement facile, je ne dis pas seulement d'expliquer, mais même de prévoir à l'avance les résultats des expériences qui leur sont relatives.

Retournons d'abord à notre chambre garnie de rideaux rouges. Supposons que, ces rideaux étant percés de très-petits trous, assez distans les uns des autres, on reçoive les images de ces trous sur un grand carton très-blanc, et demandons-nous de quelle couleur ces images doivent nous paraître ?

La réponse à cette question est extrêmement facile. Les images des trous sont réellement blanches, c'est-à-dire qu'elles offrent un mélange de rouge et de vert ; mais comme tout le reste du carton paraît et est effectivement de couleur rouge, l'œil qui le contemple assez long-temps pour se blaser sur cette couleur et la juger blanche, ne voit plus, dans les images réellement blanches des trous, que la couleur verte excédante. Les images des trous doivent donc paraître vertes, et elles le paraissent en effet.

Des résultats tout à fait analogues auraient lieu si les rideaux étaient de toute autre couleur; la couleur apparente des images des trous serait constamment complémentaire de celle des rideaux. C'est en cela que consistent les expériences de Meusnier et de Hassenfratz.

Voici des expériences du même genre qui ne paraissent point avoir été décrites, et des résultats desquelles on se rend aisément raison à l'aide des mêmes principes.

Si, à travers un verre transparent coloré, on regarde assez long-temps un grand carton blanc exposé au soleil, pour que la couleur du verre n'ait plus d'influence et n'empêche plus conséquemment de juger le carton de couleur blanche, et qu'alors, sans cesser de diriger son regard vers le carton, on retire subitement le verre, ce carton, pendant un temps plus ou moins long, semblera, à l'œil du spectateur, de la couleur complémentaire de celle du verre. C'est ainsi, en particulier, que les personnes qui font habituellement usage de lunettes vertes, voient tous les objets sous une apparence rougeâtre, au moment où ils les quittent.

Il faut, au surplus, pour obtenir un plein succès de ces sortes d'expériences, se tenir soigneusement en garde contre les reflets latéraux et toutes les autres causes étrangères qui pourraient en compromettre les résultats.

Les détails dans lesquels nous sommes entrés jusqu'ici tendent à prouver qu'un article, sur le sujet qui nous occupe, pourrait n'être point du tout déplacé dans le *Journal des modes*. Il faut dire, au surplus, qu'en ceci, comme en beaucoup d'autres choses, l'instinct des femmes les sert merveilleusement bien, et beaucoup mieux, peut-être, que ne pourraient le faire les conseils des plus habiles physiciens. C'est probablement cet instinct qui a mis en vogue, parmi elles, les chapeaux verts doublés en rose. Cette combinaison de couleurs est, en effet, extrêmement heureuse. La couleur rose de la doublure réfléchit une couleur pareille sur leur visage; et l'œil des personnes qui les abordent, bientôt blasé sur le vert de l'extérieur de leur coiffure, en devient d'autant moins sensible à ce qu'il pourrait y avoir d'analogue dans leur carnation. Ce qu'elles pourraient faire de plus contraire à l'incarnat de leur teint, serait de porter des chapeaux violets, doublés en jaune, ou des chapeaux rouges, doublés en vert; aussi très-peu d'entre elles s'en sont elles avisées (*).

Je passe à des phénomènes d'un autre ordre, en apparence, dont on se rend également raison, à l'aide des mêmes principes.

Si l'on regarde long-temps et fixement une petite tache rouge sur un carton blanc exposé au soleil, on la verra bientôt bordée d'un liséré vert, plus ou moins étroit. Si alors on porte subitement son regard sur un autre endroit du carton, on croira

---

(*) Voici encore des phénomènes du même genre que ceux que j'ai décrits plus haut, que j'ai eu long-temps l'occasion d'observer. Les rayons du soleil ne parviennent le matin, l'été, dans une des classes de Mathématiques du collége de Montpellier, exposée au levant, qu'après avoir traversé le feuillage des accacias dont la cour est plantée. Quand on entre dans cette classe, tous les objets intérieurs se présentent sous une teinte verdâtre qui, peu à peu, semble s'effacer; mais alors un autre phénomène succède; toutes les traces de craie, sur la planche noire, semblent se revêtir d'une teinte plus ou moins rosée. Le même phénomène se remarque, au milieu du jour, dans l'Amphithéâtre de la Faculté des sciences, dont les fenêtres, exposées au midi, sont garnies de jalousies récemment peintes en vert.

y voir une tache de même grandeur, de même figure et de même situation, colorée en vert.

Expliquons d'abord la seconde partie du phénomène. La tache rouge du carton affecte une portion déterminée de la rétine, laquelle, par l'effet d'une contemplation suffisamment prolongée, finit par se blaser sur l'impression du rouge. Lorsqu'ensuite l'œil se dirige subitement vers une autre partie du carton, cette même portion de la rétine se trouve impressionnée par la lumière blanche, c'est-à-dire, par une combinaison de rouge et de vert; mais les extrémités nerveuses étant alors devenues insensibles à l'impression de la couleur rouge, la couleur verte doit seule les affecter.

On voit aisément par là que, si l'œil, en contemplant d'abord la tache rouge, pouvait demeurer rigoureusement immobile, il n'y apercevrait aucune bordure, mais il ne saurait en être ainsi; et, quoi qu'aient pu dire certains physiologistes, de l'existence, dans les muscles des hommes et des animaux, de je ne sais quelle *force de situation fixe*, la vérité est qu'au contraire la fixité est, pour les muscles, un état tout à fait contraint, dans lequel ils ne sauraient persister quelques instans que d'une manière imparfaite. Lors donc que nous dirigeons nos regards vers une tache rouge, située sur un fond blanc, notre tête oscille toujours plus ou moins; de telle sorte qu'il n'est pas vrai de dire que la tache se peigne sur une portion tout à fait déterminée de la rétine, elle vacille un peu, en tous sens, sur cette membrane. Il n'y a donc proprement que la portion de la rétine commune à toutes les images de la tache qui doive être constamment affectée de l'impression du rouge, tandis que les bords de cette portion reçoivent, d'instant en instant, l'impression du blanc qui, comme il a été expliqué plus haut, doit s'offrir sous l'aspect du vert; et de là le liséré vert que l'on remarque autour de la tache, liséré d'autant plus large et pâle que la tête oscille davantage. On voit même que la tache pourrait être de tellement petites dimensions qu'elle parût verte en totalité.

Il est aisé de voir, d'après les explications théoriques dans lesquelles nous venons d'entrer, que, le carton étant toujours supposé blanc, si la tache, au lieu d'être rouge, était de couleur verte, elle semblerait bordée de rose, et, en portant les regards en un autre endroit du carton, on croirait y voir une tache rose, de même figure, grandeur et situation que celle-là.

Si la tache était jaune, elle semblerait bordée de lilas; et c'est aussi une tache de cette dernière couleur qu'on croirait apercevoir, en portant ses regards autre part sur le carton. Il est presque superflu d'ajouter que si, au contraire, la tache était violette, son bord, ainsi que la tache idéale, paraîtraient couleur citron.

Enfin, si la tache était bleue, son bord et la tache idéale sembleraient de couleur orange; le bord et la tache idéale sembleraient bleus, au contraire, si la tache effective était de couleur orange.

Généralement, quelle que puisse être la couleur de la tache effective, son bord et la tache idéale sembleront toujours de la couleur complémentaire de celle-là.

Tous ces phénomènes ont été expérimentalement découverts par Buffon; mais on voit aisément qu'on aurait fort bien pu les prévoir, à *priori*, sans recourir à aucune expérience. En voici d'autres qui n'ont pas été expérimentés, mais sur lesquels néanmoins on ne saurait élever le moindre doute. Ils sont relatifs à des cartons colorés.

Si le carton est vert et la tache effective jaune, le liséré et la tache idéale sembleront de couleur bleue; ils sembleraient, au contraire, de couleur jaune, si le carton étant toujours vert, la tache effective était bleue.

Si le carton est violet et la tache effective bleue, le liséré et la tache idéale sembleront de couleur rouge; ils sembleraient, au contraire, de couleur bleue si, le carton étant toujours violet, la tache effective était rouge.

Si enfin le carton est de couleur orange et la tache effective rouge, le liséré et la tache idéale sembleront de couleur jaune ; ils sembleraient, au contraire, de couleur rouge, si le carton étant toujours orange, la tache effective était jaune.

Il ne faut point perdre de vue, au surplus, que, d'après ce que nous avons dit plus haut, ces expériences peuvent ne pas réussir également bien pour toutes sortes de couleurs ou pour toutes sortes de personnes, ni même pour la même personne en diverses circonstances ; mais ce sont là de pures exceptions accidentelles, qui ne sauraient rien ôter à la vérité du principe général.

Il est certains phènomènes dans l'explication desquels il faut tenir compte, non seulement des principes sur lesquels nous nous sommes appuyés jusqu'ici, mais encore d'une persistance plus ou moins durable des impressions reçues par l'organe, après que la cause qui les a produites a cessé d'agir; persistance suffisamment prouvée par l'expérience du charbon allumé qui, agité rapidement dans l'obscurité, offre l'apparence d'un ruban de feu continu.

Par exemple, si, pendant un temps plus ou moins prolongé, on regarde fixement le soleil, ce qui ne peut se faire impunément qu'un peu après son lever ou avant son coucher; en portant ensuite subitement ses regards sur d'autres objets, on croira y voir tantôt une tache brillante et tantôt une tache noire, d'une grandeur égale à la grandeur apparente du disque solaire. La tache noire qui, communément paraît la dernière, est très-facile à expliquer ; elle tient à ce que la portion de la rétine ou l'image solaire s'était peinte, éprouve, par l'effet de l'action trop vive de cet astre, une sorte de paralysie momentanée qui la rend, plus ou moins long-temps, insensible à la lumière, beaucoup plus faible, qui peut lui venir des autres objets ; et, quant à l'apparence lumineuse qui précède, elle tient à ce que l'impression que l'œil a reçu des rayons solaires, à raison de son extrême vivacité, survit plus ou moins long-temps à l'action de ces mêmes rayons.

Nous ne saurions ici, sans excéder les bornes que nous devons nous prescrire, entrer dans le détail de tous les phénomènes dans lesquels les couleurs accidentelles ou relatives jouent un rôle plus ou moins important; nous terminerons donc par un cas qui, bien qu'il soit journellement sous nos yeux, avait néanmoins échappé jusqu'à Buffon à l'attention des observateurs.

Les ombres que les corps opaques projètent sur les surfaces placées dans leur voisinage, sembleraient devoir être parfaitement noires, puisqu'elles sont l'effet d'une privation de lumière; mais, à raison des reflets qui viennent des autres objets ou même de la lumière envoyée par les nuages, ces ombres sont d'un gris plus ou moins clair. Néanmoins, à l'époque du lever et à celle du coucher du soleil, ces ombres paraissent quelquefois d'un bleu ou d'un vert très-sensible, surtout lorsqu'elles se projètent sur une surface blanche. Cela tient à ce qu'alors la lumière solaire, ayant à traverser les vapeurs atmosphériques, avant de parvenir aux objets qu'elle éclaire, peut, suivant la nature de ces vapeurs, prendre une teinte orange ou rouge, plus ou moins prononcée, qu'elle communique à la portion de la surface blanche qui environne l'ombre; cette portion, bien que nous la jugions encore blanche, est donc réellement orange ou rouge, et son aspect doit nous porter à juger bleu ou vert le peu de blanc dont se compose la teinte plus ou moins grise de l'ombre.

Je ne pense pas qu'il existe aucun fait du genre de ceux que nous avons passé ici en revue qui, bien examiné, ne puisse trouver son explication dans les principes fort simples qui nous ont conduit à l'explication de ceux-ci.

Je sens, en terminant, le besoin de m'excuser auprès de mes lecteurs d'oser leur présenter une ébauche si imparfaite, que j'ai eu à peine le temps de relire avant de la livrer à l'impression, et qu'il m'a fallu interrompre sans cesse en la composant; mais je n'ai le loisir ni de rédiger, pour mon propre compte, des articles plus sérieux ou plus soignés, ni d'examiner les mémoires qui me sont adressés du dehors avec assez de soin pour m'assurer jusqu'à quel point ils sont dignes de voir le jour ; et, dans une telle situation, j'aime beaucoup mieux courir le risque de me compromettre moi-même que de m'exposer à compromettre autrui, ainsi qu'il m'est malheureusement déjà arrivé une fois. J'avais espéré qu'après les deux ou trois premiers mois d'une administration acceptée par pur dévouement, au milieu des convulsions politiques, les choses reprendraient leurs cours ordinaires, et qu'alors je pourrais jouir de quelques loisirs ; mais l'état de crise se prolonge, sans qu'on puisse facilement en prévoir le terme. De telles circonstances sont bien peu favorables aux méditations scientifiques.

---

# QUESTIONS RÉSOLUES.

## *Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la pag. 182 du XIX.me volume du présent recueil ;*

Par M. Crova, professeur de mathématiques spéciales au collége de Perpignan.

*Théorème I. Les milieux des cordes interceptées par une ligne du second ordre, sur des droites issues d'un même point, sont sur une autre conique qui lui est homothétique et qui passe par le point dont il s'agit.*

*Démonstration.* Soit pris le point donné pour origine des coordonnées auxquelles nous supposerons d'ailleurs une direction quelconque, et soit alors l'équation de la courbe proposée

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+Fy=0 \ . \qquad (1)$$

Soit alors $y=mx$ l'équation de l'une des droites dont il s'agit ; on obtiendra les coordonnées de ses points d'intersection avec la courbe, en considérant leurs équations comme celles d'un même problème déterminé, ce qui, en éliminant $y$ entre elles donnera, pour avoir les valeurs de $x$ qui répondent à ces intersections, l'équation du second degré,

$$(A+Bm^2+2Cm)x^2+2(D+Em)x+F=0 \ .$$

Si l'on représente par $x'$ la valeur de $x$ qui répond au milieu de la corde interceptée, cette valeur sera, comme l'on sait, la demi-somme des valeurs de $x$ données par cette équation. Or, dans une équation du second degré, sans coefficient à son premier terme, le coefficient du second terme, pris en signe contraire, est égal à la somme des racines, d'où l'on voit qu'on aura

$$x'=-\frac{D+Em}{A+Bm^2+2Cm} \ ,$$

ou bien encore

$$Bx'm^2+(2Cx'+E)m+(Ax'+D)=0 \ .$$

Si, de plus, on représente par $y'$ la valeur de $y$ qui répond à ce milieu, on aura

$$y'=mx' \ ;$$

éliminant donc $m$ entre ces deux équations, l'équation résultante

$$Ax'^2+By'^2+2Cx'y'+Dx'+Ey'=0 \ , \qquad (2)$$

sera celle du lieu des milieux des cordes interceptées par la courbe proposée sur toutes les droites issues du point donné. Or, cette équation est du second degré, d'où il suit que la courbe dont il s'agit est une ligne du second ordre ; cette équation est privée du terme indépendant de $x$ et de $y$, d'où il suit que la courbe en question passe par l'origine, c'est-à-dire, par le point donné ; enfin les coefficiens des termes du second ordre dans l'équation (2) sont les mêmes que dans l'équation (1) ; d'où il suit que la nouvelle courbe est homothétique avec la première.

*THÉORÈME II. Les milieux des cordes interceptées par une surface du second ordre, sur des droites issues d'un même point de l'espace, sont sur une autre surface du second ordre qui lui est homothétique et qui passe par le point donné.*

*Démonstration.* Soit pris encore ici le point donné pour origine des coordonnées qui pourront d'ailleurs avoir des directions quelconques, et soit alors

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy+2Gx+2Hy+2Kz+L=0\,, \qquad (1)$$

l'équation de la surface dont il s'agit. Une quelconque des droites issues du point donné aura des équations de la forme

$$x=mz\,, \qquad y=nz\,.$$

Si, considérant ces trois équations comme celles d'un même problème déterminé, on élimine entre elles $x$ et $y$, l'équation résultante en $z$ donnera les valeurs de $z$ qui répondent aux deux extrémités de la corde interceptée. Cette équation est

$$(Am^2+Bn^2+C+2Dn+2Em+2Fmn)z^2+z(Gm+Hn+K)z+L=0\,.$$

Si l'on représente par $z'$ la valeur de $z$ qui répond au milieu de cette corde, pour les mêmes raisons que ci-dessus, on aura

$$z'=-\frac{Gm+Hn+K}{Am^2+Bn^2+C+2Dn+2Em+2Fmn}\ ,$$

ou bien

$$Az'm^2+Bz'n^2+2Fz'nm+(2Ez'+G)m+(2Dz'+H)n+(Cz'+K)=0\ .$$

Si, de plus, on représente respectivement par $x'$ et $y'$ les valeurs de $x$ et $y$ qui répondent aux mêmes milieux, on aura

$$x'=mz'\ ,\qquad y'=nz'\ ;$$

éliminant $m$ et $n$ entre ces trois équations, l'équation résultante

$$Ax'^2+By'^2+Cz'^2+2Dy'z'+2Ez'x'+2Fx'y'+Gx'+Hy'+Kz'=0\ ,\quad (2)$$

sera celle du lieu des milieux des cordes interceptées par la surface proposée sur toutes les droites issues du point donné ; or, cette équation est une équation du second degré, dépourvue du terme indépendant de $x'$, $y'$ et $z'$, et dans laquelle les coefficiens des termes du second ordre sont les mêmes que ceux de l'équation (1); donc le lieu dont il s'agit est une surface du second ordre, homothétique avec la surface proposée, et passant par le point donné.

# PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

## *Préliminaires d'un cours de Mathématiques pures ;*

Par M. GERGONNE.

### PREMIÈRE LEÇON.

*Objet des sciences mathématiques.*

LES êtres divers qui vivent sur notre terre naissent généralement pourvus de toutes les facultés et doués de toute l'intelligence qui leur sont nécessaires pour se conserver, pourvoir à leurs besoins divers et rendre leur existence aussi heureuse que le comporte leur nature. Un même jour voit le papillon déchirer sa chrysalide, déployer ses ailes brillantes et butiner le nectar des fleurs de nos parterres. Le cailleteau, traînant encore après lui les débris de la coque où l'instant d'auparavant il était retenu captif, démêle aussitôt, parmi des graines diverses, celle qui peut le mieux lui servir d'aliment. Le faon, à peine échappé des flancs de la biche, bondit avec grâce dans nos prés. L'homme seul a besoin de tout apprendre; ses premiers accens sont des cris de douleur, et l'époque de son entrée dans la vie en marquerait infailliblement le terme, si des soins les plus assidus ne venaient, durant un temps plus ou moins long, au secours de sa débilité. Il naît avec des yeux; mais il ne sait d'abord ni les tourner vers les objets qu'il est intéressé à connaître, ni leur faire prendre la configuration propre à leur faire apercevoir ces objets d'une manière distincte. Il est pourvu de bras mobiles dont les extrémités sont ingénieusement articulées ; mais ce n'est qu'après des essais multipliés et long-temps infructueux, qu'il parvient à les diriger sûrement vers ce qu'il veut saisir, et, du moment qu'il a atteint le terme de cet apprentissage, une surveillance de tous les instans devient nécessaire pour soustraire à sa vue, pour écarter de sa main, tout ce qui pourrait le blesser, tout ce dont il voudrait imprudemment faire sa nourriture. Ses extrémités inférieures sont destinées à soutenir le poids de son corps, à le transporter vers les objets auxquels son bras ne saurait atteindre, et à le soustraire, par la fuite, aux dangers divers qui pourraient le menacer ; mais combien ne lui faudra-t-il pas de temps pour apprendre à se tenir ferme sur ses pieds ? et combien de chutes douloureuses n'aura-t-il pas à essuyer avant de savoir marcher et courir ? Plus tard, et plus péniblement encore, il étudiera les sons vocaux et les caractères visuels à l'aide desquels les intelligences communiquent entre elles ; il apprendra à produire lui-même ces sons et ces caractères, et alors seulement il méritera de prendre rang dans la société et de compter pour quelque chose au milieu de ses semblables.

Peut-être aurions-nous tort de nous plaindre d'avoir été traités par la nature d'une manière si peu libérale. Si des hommes qui ont fait une étude spéciale des mœurs des diverses classes d'êtres qui vivent sur notre terre, voulaient prendre la peine d'en faire un examen comparatif, peut-être trouveraient-ils finalement que, toutes choses égales d'ailleurs, les plus industrieux et les plus intelligens d'entre eux, sont ceux-là même dont l'éducation est la plus lente. Si, en effet, la nature avait pris soin de nous garantir contre la rigueur des frimats et les ardeurs de la canicule ; si elle avait placé partout à notre portée des alimens immédiatement propres à notre subsistance ; si elle ne nous avait point environnés d'animaux hostiles, ou si du moins elle nous avait armés de défenses suffisantes contre leurs attaques ; si, dès notre entrée dans la vie, nous avions pu nous passer de l'assistance des auteurs de nos jours ; si, en un mot, la nature avait tout fait pour nous, peut-être n'aurions-nous pas songé à rien ajouter aux avantages dont elle nous aurait doués ; peut-être l'art social serait-il encore à naître ; et notre vie, assez semblable à celle des plantes, n'offrirait sans doute d'autre spectacle que celui d'une continuelle et monotone répétition des mêmes actes. C'est donc précisément, peut-être, par cela même que la nature nous a traités d'une manière si sévère que nous sommes parvenus à nous l'assujétir et à nous en rendre les suprêmes dominateurs.

Si c'était ici le lieu d'expliquer comment, malgré l'excessive inégalité d'intelligence qui se fait remarquer entre eux, dans un âge plus avancé, tous les hommes néanmoins réussissent à peu près également bien dans le premier apprentissage de la vie sociale, je ferais d'abord observer qu'il ne s'agit uniquement là que de connaissances qui touchent essentiellement à notre conservation et à notre bien-être de tous les instans, et qu'on apprend toujours très-bien et très-vîte ce qu'on est fortement intéressé à bien savoir. Je ferais observer, en second lieu, qu'excepté peut-être les heures du sommeil, la vie d'un enfant en bas âge est un apprentissage continuel ; et qu'on ne saurait manquer de savoir bientôt ce dont on fait une étude de tous les instans. Je ferais observer enfin que l'enfant en bas âge étudie sans maître, qu'aucune tâche ne lui est imposée, qu'aucune gêne ne lui est prescrite, ni pour le choix des sujets d'études ni pour la manière ni pour le temps ni pour le lieu ; que personne ne vient systématiquement, et à des heures fixes, détourner son attention d'un objet qui l'intéresse, pour la diriger forcément vers un autre qui alors lui offre moins d'attrait ; et que nous ne faisons rien de mieux que ce que nous faisons librement et en suivant notre pente naturelle. Je pourrais ensuite tirer de ces diverses remarques quelques conséquences pratiques, relatives à l'art d'enseigner, et apprécier ainsi, avec une équitable et impartiale sévérité, tant de méthodes d'enseignement prônées tour à tour d'une manière fastueuse, par la cupidité et le charlatanisme, et que le besoin bien senti d'améliorations notables dans nos plans d'études a fait quelquefois accueillir par des âmes généreuses avec beaucoup trop de faveur.

Mais qu'il me suffise de noter ici qu'il est un fond commun de connaissances dont tous les hommes parviennent également à se mettre en possession, les plus ineptes comme les plus intelligens ; que ce fond, à y regarder de près, est beaucoup plus riche qu'on n'est généralement porté à le supposer ; et qu'à l'époque où le vulgaire se figure que l'éducation commence, l'enfant même qui passe pour le plus stupide sait déjà incomparablement plus de choses que ne pourra se promettre d'en apprendre le plus heureusement organisé, dans tout le cours d'une longue et laborieuse carrière.

Un besoin insatiable d'aliment et d'activité, que souvent l'esprit partage avec le corps, ou peut-être seulement le besoin d'un préservatif contre l'ennui qui naît de l'oisiveté, a déterminé des hommes, doués d'un esprit méditatif, à consacrer leurs loisirs à des réflexions, à des recherches spéciales sur certaines branches du savoir commun, dans la vue de les mieux étudier, d'y découvrir des rapports et des combinaisons inaperçus jusqu'à eux ; et c'est à l'ensemble des résultats de leurs travaux qu'on a donné le nom de *sciences* ; tandis qu'on a appelé *savans* les hommes qui, sans même avoir pris aucune part à la découverte de ces résultats, sont néanmoins parvenus à se les rendre familiers. Ce n'est qu'improprement qu'on applique quelquefois ce qualificatif aux inventeurs même des sciences.

Toute science donc, quel qu'en puisse être d'ailleurs l'objet, n'est., comme on le voit, que l'extension et le développement de quelque connaissance généralement familière à tous. Une science même ne saurait être vraiment digne de ce nom qu'autant qu'elle se rattache à ces notions vulgaires, à ce fond commun de connaissances universellement répandues parmi les hommes ; et de là cette maxime qui, pour si triviale qu'elle puisse paraître, n'en est pas moins trop souvent négligée par ceux qui parlent ou qui écrivent dans la vue d'instruire les autres ; savoir : que *ce n'est qu'en partant de ce que nous savons déjà qu'on peut espérer de nous conduire à ce que nous ne savons pas encore.* Découvrir des conséquences non encore aperçues de quelques vérités déjà admises, c'est *inventer* ou *perfectionner* une science ; faire apercevoir à autrui la filiation entre ces conséquences et les vérités auxquelles elles se rattachent, c'est l'*enseigner*. Les découvertes, dans quelque science que ce puisse être, sont l'apanage exclusif du génie qui crée et combine ; pour les étudier, au contraire, il suffit simplement du bon sens qui conçoit.

Les sciences peuvent différer les unes des autres ou par la diversité des objets auxquels elles se rapportent ou par les divers points de vue sous lesquels elles envisagent les mêmes objets ; et, lorsqu'on s'engage dans l'étude d'une science, le premier soin qu'il convient de prendre est de se former une idée bien précise de son étendue et de ses limites, afin de ne pas courir le double risque et d'en négliger des applications importantes ou d'en faire inconsidérément des applications déplacées. On peut demander plus encore, et, à raison des nombreux points de contact qu'ont entre elles les diverses branches du savoir et des secours qu'elles peuvent mutuellement se prêter, on peut désirer de savoir, en particulier, quelle est précisément la place qu'occupe la science qu'on se propose d'étudier dans le système général de nos connaissances. Livrons-nous donc à cet examen par rapport à la science qu'un homme célèbre, à toute autre titre, n'a pas hésité de proclamer la première de toutes.

Si quelqu'un, en nous présentant un homme fait et un enfant en bas âge, nous disait du premier que sa taille est exactement double de celle du second, qu'il pèse neuf fois plus que lui et qu'il est onze fois plus âgé, il n'y aurait certainement rien, dans de telles assertions, qui dût nous surprendre, et nous concevrions très-aisément qu'on ait pu parvenir à assigner avec précision tous ces divers rapports. Mais si la même personne ajoutait que l'intelligence de l'homme fait, est exactement ou seulement à peu près quintuple de celle de l'enfant, nous nous récrierions aussitôt, et non sans raison, parce qu'en effet nous ne concevrions pas qu'on pût parvenir, à l'égard de telles qualités, à des comparaisons aussi rigoureuses.

Ce simple exemple suffit donc pour nous faire comprendre clairement que les objets de nos pensées peuvent être rangés en deux classes très-distinctes, dont l'une comprend tous les objets qui peuvent être exactement comparés à d'autres de même nature qu'eux, tandis que l'autre renferme tous ceux qui ne peuvent être que vaguement comparés à ceux de leur espèce. Dans la première classe, on peut ranger, par exemple, les nombres, le temps, l'étendue, soit en longueur, soit en surface, soit en volume ; dans la seconde se trouvent entre autres toutes les qualités morales et les facultés intellectuelles, tels que le génie, le courage, le désintéressement, etc.

Or, comme rien n'est plus propre à aider l'action de la pensée que d'affecter des dénominations spéciales aux objets qui se distinguent de tous les autres par des qualités qui leur sont exclusivement propres, nous convenons, pour l'avenir, de désigner sous la dénomination de *grandeurs* ou de *quantités* les objets de la première sorte, c'est-à-dire, *les objets que l'on conçoit être rigoureusement comparables à tous ceux de leur espèce ;* sur quoi nous devons nous hâter de faire remarquer que ces mots ne sont point pris ici sous leur acception vulgaire. Dans le langage ordinaire, en effet, le mot grandeur exprime l'état de ce qui est fort étendu ou fort élevé, soit au physique, soit au moral, et le mot quantité, équivalent du mot multitude, emporte avec lui l'idée de la réunion d'un très-grand nombre d'objets ; tandis qu'ici, dans le sens particulier que nous attachons à ces deux mots, un objet unique, quelque minime qu'il puisse être d'ailleurs, sera réputé grandeur ou quantité, par cela seul qu'il sera rigoureusement comparable à d'autres objets d'une nature pareille à la sienne ; de sorte que, sous ce point de vue, les mots grandeur et quantité doivent être considérés comme tout à fait synonymes. Seulement le mot grandeur est employé de préférence dans le style élevé.

Il arrive assez fréquemment, dans la langue des sciences, de détourner ainsi les mots de leur acception commune, pour leur donner une signification plus ou moins différente de celle que la langue vulgaire a consacrée. C'est là, sans contredit, une chose très-fâcheuse, tant parce que, pendant un temps plus ou moins long, l'esprit éprouve une sorte de peine à séparer l'acception scientifique d'un mot, de son acception vulgaire, que parce qu'on se trouve quelquefois contraint de l'employer sous ses deux acceptions dans une même phrase, ce qui entraîne inévitablement de l'embarras dans le langage et de la confusion dans les idées, et ajoute ainsi, sans aucune nécessité ni compensation, aux difficultés que présente naturellement l'étude des sciences. Il vaudrait sans doute incomparablement mieux, en telles rencontres, créer des mots tout à fait nouveaux ; mais la répugnance du public pour ces sortes de créations, répugnance non moins invincible qu'elle est peu fondée, et qui nuit beaucoup à la netteté du langage, et par suite au développement de l'esprit humain, y oppose un obstacle insurmontable, et nous impose impérieusement la loi de parler ici comme tout le monde.

Il faut donc se tenir pour bien averti que, lorsqu'à l'avenir nous employerons le mot *grandeur* ou le mot *quantité*, ce sera comme l'équivalent de ceux-ci : *objet rigoureusement comparable aux autres objets de même nature que lui.* Lors donc que nous voudrons découvrir si un objet déterminé est ou n'est pas de la classe de ceux que nous nommons grandeurs ou quantités, nous n'aurons autre chose à faire que de concevoir un autre objet de même nature que celui-là, et de nous demander si nous trouverions raisonnable ou inepte que l'on prétendît assigner un rapport précis entre l'un et l'autre. Dans le premier cas, l'objet en question sera grandeur ou quantité ; dans le second, il ne le sera pas.

Ainsi, par exemple, nous jugeons que le poids d'un corps est une quantité ou grandeur, parce que nous trouverions tout naturel que quelqu'un, après l'avoir comparé au poids d'un autre corps, nous dit que cinq fois le premier fait précisément trois fois le second ; mais nous trouverions fort étrange, au contraire, que quelqu'un vînt nous affirmer sérieusement que sept fois le génie de Galilée fait exactement onze fois celui d'Huygens ; d'où nous devons conclure que le génie n'est point de ces objets que nous avons entendu comprendre sous la dénomination de grandeur ou de quantité.

Il est, au surplus, aisé de reconnaître, d'après cela, que l'art de découvrir parmi les objets de nos pensées, ceux auxquels on peut justement appliquer la dénomination de grandeur ou de quantité, se réduit finalement à l'art de discerner quels sont ceux dont on peut reconnaître l'égalité rigoureuse lorsqu'elle a lieu. Dire, en effet, d'une longueur qu'elle est les trois quarts d'une autre longueur, c'est dire, en d'autres termes, que quatre fois la première est égale à trois fois la seconde, ou encore que la troisième partie de la première est une longueur égale à la quatrième partie de la seconde.

Au moyen de cette remarque, l'art de démêler ce qui est grandeur ou quantité de ce qui ne l'est pas, se trouve réduit à la plus grande simplicité. Tout se réduit, en effet, à se demander de l'objet que l'on considère, si l'on conçoit ou non qu'il soit possible de reconnaître qu'un autre objet lui est rigoureusement égal. Ainsi, par exemple, la probabilité qu'un certain numéro sortira à un tirage déterminé de la loterie royale, est grandeur ou quantité, parce que l'on conçoit clairement que cette probabilité est rigoureusement égale à celle de la sortie de tout autre numéro au même tirage ou du même numéro à tout autre tirage ; mais le poids d'un témoignage, au contraire, ne saurait être réputé grandeur ou quantité, parce que l'on conçoit également bien qu'aucun homme sensé ne voudrait affirmer de deux témoignages, qu'ils sont rigoureusement du même poids.

Si nous examinons avec attention ce qui se passe journellement dans la société, nous aurons bientôt lieu de remarquer que les discussions et la dissidence des opinions ne s'y manifestent, ou du moins ne s'y prolongent que lorsque ces discussions et cette dissidence n'ont pas les grandeurs ou quantités pour objets. Dispute-t-on, en effet, sur la plus forte des sommes d'argent contenues dans deux sacs? En les comptant l'une et l'autre, on mettra fin à la dispute. Est-ce sur la taille relative de deux individus qu'on se trouve n'être pas d'accord ? Il suffira, pour vider le différent, de les rapprocher l'un de l'autre. La contestation roule-t-elle enfin sur le rapport entre le poids de deux corps ou sur la durée de deux intervalles de temps? La balance ou l'horloge deviendra l'arbitre entre les opinions opposées. Mais s'il s'agit, au contraire, de fixer les rangs entre deux productions littéraires ou entre deux actions vertueuses ou criminelles, à moins d'une différence très-apparente, on courra risque de disputer fort long-temps, sans jamais tomber parfaitement d'accord.

A y regarder de très-près, il n'y aurait peut-être proprement que les nombres qui méritassent la dénomination de grandeurs ou de quantités. Lorsqu'en effet nous prononcerons de deux longueurs qu'elles sont égales, il peut fort bien se faire qu'il existe entre elles une différence assez légère pour échapper à la vue et au tact ; et lorsque nous portons un pareil jugement sur le poids de deux corps ou sur la durée de deux intervalles de temps, il peut également se faire qu'il existe entre l'un et l'autre une inégalité assez petite pour ne donner aucune prise à l'action des balances les plus sensibles ou à celles des horloges les plus artistement construites ; de sorte que, pour pouvoir comprendre toutes ces choses sous la dénomination commune de grandeur ou quantité, il faudrait peut-être appeler ainsi *tous les objets comparables à d'autres de même nature*, *sinon rigoureusement*, *du moins de telle sorte que l'erreur de la comparaison*, *si toutefois elle existe*, *se dérobe*, *par son extrême petitesse*, *à tous nos moyens de connaître*. Au surplus, on peut toujours supposer, en théorie, que les comparaisons sont tout à fait rigoureuses ; il arrivera seulement que, dans les applications pratiques, on n'obtiendra que des à peu près, d'autant moins différens d'ailleurs de l'exacte vérité que les moyens de comparaison auront été plus précis.

Dans tout ce qui précède nous avons constamment parlé de comparaison entre les objets de même nature, parce qu'en effet ce sont les seuls que l'on puisse raisonnablement se proposer de comparer les uns aux autres, attendu que ce sont les seuls susceptibles d'égalité. Les grandeurs ou quantités de même nature, telles, par exemple, qu'une longueur et une autre longueur, un intervalle de temps et un autre invervalle de temps, sont ce qu'on appelle des grandeurs ou quantités *homogènes*; et on appelle, au contraire, grandeurs ou quantités *hétèrogènes* celles qui sont de nature différentes ; telles, par exemple, qu'un temps et une longueur. Les grandeurs ou quantités homogènes sont donc les seules qu'on puisse se proposer de comparer les unes aux autres ; et demander, par exemple, quel est le plus grand d'une aune ou d'une heure, c'est faire une question tout à fait inepte qui ne mérite aucune sorte de réponse.

Ce sont les grandeurs ou quantités qui sont l'objet exclusif de toutes les sciences comprises sous la dénomination commune de *Mathématiques pures ;* et c'est uniquement comme susceptibles de comparaisons rigoureuses que ces sciences les envisagent. Ainsi, ces expressions : *science mathématiques*, *science des grandeurs*, *sciences des quantites*, *sciences des choses rigoureusement comparables à leurs homogènes*, sont des expressions tout à fait synonymes. On donne ensuite le nom de *mathématiques mixtes* à l'ensemble des applications diverses qui ont pu ou qui peuvent encore être faites à l'avenir, des mathématiques pures à toutes les autres branches des connaissances humaines.

Or, lorsqu'un même nom est ainsi susceptible de plusieurs determinatifs, il est toujours permis, pourvu qu'on en prévienne, d'en sous entendre un quelconque, mais un seul ; et le bon sens dit qu'il faut alors sous entendre, de préférence, le déterminatif dont l'emploi devrait être le plus fréquent, puisque, de la sorte, le langage en devient plus concis. Nous profiterons de cette remarque pour employer à l'avenir le mot *mathématiques*, comme l'équivalent des mots *mathématiques pures* ; mais dès lors, toutes les fois que nous voudrons faire mention des applications des mathématiques aux autres sciences, nous serons obligés d'employer l'expression *mathématiques mixtes* tout au long et sans sous-entendu.

Bien que la géométrie ne soit qu'une simple branche des sciences mathématiques, et qu'on puisse même, en toute rigueur, sans l'avoir cultivée, être fort instruit dans ces sciences ; par l'application de cette figure de rhétorique qui consiste à donner au tout le nom de la partie, ceux qui cultivent quelque branche que ce soit des mathématiques se traitent généralement entre eux de *géomètres*, et ne sont guère appelés *mathématiciens* que par les gens qui ne le sont pas (*).

Dans tout ce qui précède, nous nous sommes vus, à très-grand regret sans doute, contraints de nous écarter un peu des notions ou peut-être seulement de la langue que beaucoup d'écrivains, fort recommandables, ont cherché à faire prévaloir, et nous devons, avant d'aller plus loin, tenter de nous justifier de cette témérité,

(*) Voy. *Annales*, tom. VIII, pag. 255.

et mettre le lecteur en situation de pouvoir prononcer équitablement entre eux et nous.

La plupart des auteurs d'élémens ont appelé *grandeurs* ou *quantités* toutes *les choses susceptibles d'augmentation et de diminution*, et ils en avaient incontestablement le droit, puisque les mots ne sont, au fond, que de vains sons, absolument insignifians par eux-mêmes, et ne pouvant figurer utilement dans le langage qu'après avoir reçu une acception déterminée, par l'effet d'une convention tout à fait libre. Il arrivera seulement que, dans le sens de ces écrivains, tout ou presque tout pourra être qualifié grandeur ou quantité, puisqu'il n'est rien ou presque rien qui ne soit susceptible de plus ou de moins. Et ne peut-on pas être, en effet, plus ou moins éclairé, plus ou moins courageux, plus ou moins patient, plus ou moins magnanime, et ainsi du reste?

Les mêmes écrivains ont dit ensuite qu'on appelait *mathématiques les sciences qui avaient les grandeurs ou quantités pour objet*; et cela sans doute leur était encore permis. Il serait seulement résulté de leur définition des grandeurs ou quantités, que toutes les sciences auraient été des sciences mathématiques puisqu'il n'en est aucune qui ne traite de choses susceptibles de plus ou de moins. Toutefois, il n'en est aucun, sans doute, qui, interrogé si la morale ou la législation, la théologie ou la médecine étaient des sciences mathématiques, eût hésité le moins du monde à répondre que non; ce qui prouve que, dans leur définition des mathématiques, ils avaient tout à fait perdu de vue l'acception qu'ils avaient eux-mêmes donnée d'abord aux mots grandeur et quantité.

Il semblerait, au surplus, que cette contradiction, très-réelle à ce qu'il nous paraît, n'a pas échappé tout à fait à quelques-uns d'entre eux. On rencontre quelquefois, en effet, dans leurs écrits, l'expression *grandeur mathématique*, de laquelle on peut inférer qu'ils admettent des grandeurs qui ne sont pas mathématiques; mais alors n'auraient-ils pas dû distinguer soigneusement les grandeurs qu'ils appelaient mathématiques, de celles qu'ils ne réputaient pas être telles? Et ne se seraient-ils pas vus de la sorte ramenés forcément à la distinction qu'il nous a semblé nécessaire d'établir. En procédant, au contraire, comme nous l'avons fait, en prenant les mots pour ce que nous leur avons fait signifier, tout se trouve dans une harmonie parfaite; le mot *mathématiques* conserve son acception commune, et il devient toujours facile de distinguer nettement ce qui est du domaine des sciences mathématiques de ce qui leur est étranger. A la vérité, la signification des mots *grandeur* et *quantité* se trouve ainsi un peu plus restreinte; mais il y a à cela plus d'avantage que d'inconvénient; les mots ne devant figurer dans le langage que pour noter les différences entre les choses.

Par tout ce qui précède, on se trouve naturellement conduit à se demander si le domaine des sciences mathématiques est tellement circonscrit, si les limites en sont tellement invariables qu'il ne puisse recevoir à l'avenir de nouveaux accroissemens? Cette question revient évidemment à demander si la barrière qui sépare ce qui est réputé grandeur ou quantité de ce qui n'est pas reconnu pour tel, est tellement inébranlable qu'il devienne à jamais impossible de la porter plus avant; ce qui revient encore à demander si tels objets qui aujourd'hui ne nous semblent susceptibles que de comparaison vague, ne pourront pas, à une autre époque, être reconnus susceptibles de comparaison tout à fait rigoureuse? Or, soit que nous comparions l'état de l'homme encore sauvage à celui de l'homme civilisé, soit que nous comparions au siècle où nous vivons ceux qui l'ont précédé, tout semble concourir à nous montrer que le domaine des sciences mathématiques est de nature à s'accroître sans cesse, et nous avertir que nous ne pourrions sans témérité tenter d'en assigner la dernière limite.

Les voyageurs ont rencontré des peuplades sauvages qui, au-delà du nombre *trois*, n'ont plus qu'une idée confuse des nombres et un nom commun pour les exprimer tous. Certainement de tels hommes ne concevraient pas que l'on pût affirmer, avec certitude, de deux tas de blé tant soit peu considérables, qu'ils contiennent exactement le même nombre de grains. Ils concevraient encore moins que l'on pût s'assurer exactement de l'égalité d'étendue de deux propriétés territoriales, de figure tant soit peu différente, comparer avec précision les temps nécessaires pour les ensemencer ou pour en recueillir les produits, et comparer aussi ces produits, sous le rapport de leur poids; d'où l'on est contraint de conclure que, pour des hommes aussi peu avancés dans la civilisation, les grands nombres, l'étendue en surface, le temps et le poids des corps ne sont point encore de ces choses que nous avons nommées grandeurs ou quantités.

Mais nous-même, il y a moins de deux siècles, n'aurions pas cru possible de comparer rigoureusement la probabilité d'un événement à celle d'un autre événement; nous n'aurions pas cru davantage que l'on pût jamais comparer, avec exactitude, les températures de deux localités éloignées, à une même époque, ou celle d'une même localité à des époques éloignées; d'où l'on doit conclure qu'alors ni les probabilités ni les températures n'étaient pour nous des grandeurs ou quantités. Un essai extrêmement remarquable de Maupertuis, sur le *Bonheur*, laisse même entrevoir qu'il pourrait n'être pas impossible de soumettre un jour les affections morales à des comparaisons rigoureuses; de sorte qu'il est vrai de dire que rien ne semble devoir limiter le champ des sciences mathématiques, et qu'il n'est guère possible de prévoir à quel degré d'étendue le temps et les travaux accumulés de ceux qui les cultivent pourront un jour le porter.

Parce que les sciences mathématiques n'ont pour objet que les choses susceptibles de comparaison rigoureuse, on les a appelées *sciences exactes*. Il est clair qu'elles seules méritent proprement cette dénomination; et voilà précisément ce qui leur assigne le premier rang entre les sciences, sous le point de vue de la certitude.

Dans tout ce qui précède nous avons eu soin d'accoler constamment l'un à l'autre les deux mots *grandeur* et *quantité*, afin d'accoutumer mieux le lecteur à les considérer comme de parfaits équivalens. Désormais nous nous dispenserons de ce soin, et nous ne ferons plus simplement usage que de l'un ou de l'autre seulement. Il est toutefois assez commode d'avoir à choisir entre eux, surtout dans la construction des phrases où l'on est contraint de les employer à la fois sous leur acception vulgaire et sous celle qu'il reçoivent en mathématiques. On évite de la sorte des locutions choquantes de la natures de celles-ci : *la grandeur d'une grandeur*, *une certaine quantité de quantités*, que l'on peut alors remplacer par celles-ci : *la grandeur d'une quantité*, *une certaine quantité de grandeurs*. Nous remarquerons aussi que, par cela même que le mots *grandeur* est réputé plus noble que le mot *quantité*, on dit plus volontiers, dans le style élevé, *la science des grandeurs* que *la science des quantités*.

## DEUXIÈME LEÇON.

### *Nous ne connaissons que des rapports.*

Si, au moment présent, tous les objets matériels qui existent dans l'Univers, notre propre corps compris, devenaient tout à coup deux fois plus grands, dans tous les sens, et qu'il en fût de même des intervalles qui séparent actuellement ces corps les uns des autres, aurions-nous quelque moyen de nous apercevoir d'un changement aussi subit et aussi étrange ? On serait dabord tenté de répondre affirmativement ; mais pour peu qu'on se donne la peine d'y réfléchir sérieusement, on s'assurera bientôt que la chose serait tout à fait impossible. On voit, en effet, que les objets qui se trouvaient dabord à la hauteur de notre main s'y trouveraient encore, puisque eux et elle seraient également deux fois plus élevés au-dessus du sol. Pareillement ceux que nous ne pouvions atteindre qu'en élevant ou en abaissant le bras, n'exigeraient pas de notre part, pour être saisis, un mouvement différent, puisque notre bras serait devenu exactement deux fois plus long. Et quant à ceux qui étaient d'abord hors de notre portée, nous n'aurions pas alors un plus grand nombre de pas à faire pour arriver à eux, puisqu'en même temps qu'ils seraient deux fois plus éloignés de nous, l'étendue de nos pas se trouverait doublée.

Des considérations tout à fait semblables prouvent que si, à l'inverse, tout l'Univers et les intervalles entre les corps dont il se compose devenaient tout à coup deux fois plus petits, nous serions également tout à fait dépourvus de moyens de la reconnaître.

C'est uniquement pour ne pas choquer d'une manière trop brusque les préjugés que le lecteur pourrait s'être fait sur ce sujet, que nous avons cru devoir nous arrêter d'abord à une supposition aussi modeste. Il est évident, en effet, que ce que nous venons de dire du cas où l'Univers deviendrait tout à coup deux fois plus grand ou deux fois plus petit, nous pouvons le dire, à tout aussi bon droit, du cas où ce même Univers deviendrait subitement dix, cent, mille, un million, mille millions de fois plus grand ou plus petit; et pour peu qu'on y songe bien, on ne tardera guère à demeurer convaincu qu'un changement si énorme en apparence, demeurerait tout à fait inaperçu. Si donc quelqu'un affirmait que d'instant en instant l'Univers entier devient alternativement mille millions de fois plus grand et mille millions de fois plus petit, il nous serait tout aussi impossible de lui prouver qu'il se trompe, qu'il le serait à lui de nous prouver qu'il dit vrai; de sorte que, quelque peu probable que la chose puisse paraître, il y aurait de la témérité à affirmer qu'il n'en est pas ainsi.

Quelle réponse raisonnable peut-on donc faire à cette question: Quelle est la grandeur des hommes, des animaux, des arbres, de la terre, des astres? Aucune absolument; car, sans que nous

nous en doutassions, cette grandeur pourrait varier d'instant à autre, auquel cas la réponse devrait varier, suivant l'époque à laquelle on la ferait, sans qu'on pût d'ailleurs savoir quelle elle devrait être à quelque époque déterminée que ce fût.

Mais au milieu de tous ces changemens, sinon réels du moins possibles, il reste pourtant quelque chose d'invariable, et ce sont les rapports de grandeur des différentes dimensions des corps, comparés les uns aux autres. Tant que ces rapports subsistent, les changemens absolus demeurent tout à fait inaperçus; de manière que ces mêmes rapports sont les seules choses perceptibles pour nos sens et pour notre intelligence; tandis que la grandeur absolue des corps et des intervalles qui les séparent nous resteront à tout jamais inconnus.

Tout n'est pas fiction, au surplus, dans ce que nous avons admis tout à l'heure comme une simple hypothèse, et, si la chose n'était complètement inutile, nous pourrions invoquer ici le témoignage de l'expérience. Il est prouvé, par exemple, que ceux qu'on appelle myopes voient les objets plus grands, et que ceux qu'on appelle presbytes les voient, au contraire, plus petits qu'ils ne le paraissent aux vues ordinaires; et cependant les uns et les autres en portent exactement les mêmes jugemens, parce que ces jugemens ne portent uniquement que sur des rapports, et que ces rapports sont exactement les mêmes pour tous les êtres doués du sens de la vue. Il est également prouvé que l'action de la chaleur augmente les dimensions de tous les corps, tandis que l'action du froid les diminue; mais ce phénomène n'aurait jamais été découvert, si le chaud et le froid agissaient également sur tous les corps. C'est parce que leur action varie d'une substance à l'autre, c'est parce qu'elle change les rapports de grandeur que nous avons pu en être informés; mais aussi n'avons-nous pu saisir que les différences, et il faut nous résigner à ignorer à jamais les changemens que l'action du chaud et celle du froid peuvent opérer dans le volume absolu des corps.

Ce que nous venons de dire de l'étendue peut également s'appliquer à toutes les autres sortes de grandeurs, à la durée, par exemple. Si, en effet, tous les mouvemens, et par suite tous les changemens qui s'exécutent dans l'Univers, devenaient tout à coup un million de fois plus rapides ; pourvu qu'en même temps nos pensées se succédassent dans notre esprit un million de fois plus vîte ; bien que la durée de notre vie s'en trouvât singulièrement abrégée, nous ne songerions pas même à nous en plaindre, attendu que nous n'aurions absolument aucun moyen de nous en apercevoir. Cette durée pourrait, à l'inverse, devenir un million de fois plus longue, sans que nous nous en aperçussions davantage, pourvu que tous les mouvemens qui s'exécutent dans l'Univers et la succession de nos pensées vinssent à se ralentir suivant la même loi.

Et ici encore nous pouvons invoquer le témoignage de notre propre expérience. Chacun sait, en effet, que, dans l'absence de tout moyen extérieur de mesurer le temps, nous jugeons fort mal de sa durée, et qu'un même intervalle de temps nous paraît tantôt plus court et tantôt plus long, suivant la disposition d'esprit dans laquelle nous nous trouvons.

Demander donc si un jour est un intervalle de temps bien considérable, est une question tout aussi insoluble que celle qui consiste à demander si une lieue est bien longue. On peut donc dire, avec vérité, que rien n'est proprement ni grand ni petit, et que ces mots *grand* et *petit*, que nous avons sans cesse dans la bouche, n'expriment que des rapports. Le ciron, par exemple, est bien petit par rapport à l'homme; mais qu'est-ce que l'homme, par rapport à une montagne tant soit peu élevée? Qu'est-ce que cette montagne par rapport à la terre? Qu'est-ce que la terre, à son tour, par rapport à notre système solaire? Et qu'est-ce enfin que ce système par rapport à la vaste étendue des cieux?

Il est donc rigoureusement vrai de dire que tout ce qui existe dans la nature se trouve placé entre deux infinis, l'un en grandeur et l'autre en petitesse, sans qu'il soit possible d'assigner, en particulier, le rang d'aucun des anneaux de cette chaîne sans limites. Si donc quelqu'un venait nous annoncer que l'un des globules du sang de quelque animal que sa petitesse dérobe au meilleur microscope, renferme un Univers tout pareil au nôtre, ou bien encore que tout l'Univers visible fait partie de l'un des globules du sang de quelque animal, à peine visible pour d'autres êtres qui nous sont inconnus, non seulement nous devrions bien nous garder de le nier, mais nous ferions même preuve de bien peu de jugement si, après y avoir mûrement réfléchi, nous en témoignons la moindre surprise.

Si quelqu'un nous reprochait d'insister sur ce sujet, beaucoup plus qu'il ne semble nécessaire, nous lui répondrions qu'il ignore apparemment combien sont peu nombreux les esprits dans lesquels les idées que nous venons d'émettre ont jeté des racines tant soit peu profondes. Que si, au contraire, d'autres pouvaient ne voir dans tout ceci que des exagérations, des hyperboles telles qu'en emploient quelquefois les rhéteurs et les moralistes, dans la vue de remuer fortement les imaginations, nous lui conseillerions de s'arrêter ici et de ne pas poursuivre plus loin l'étude d'une science qui repose tout entière sur les principes que nous venons de développer.

Voilà qu'à peine engagé dans l'étude des sciences exactes nous nous trouvons amenés à des considérations philosophiques d'un ordre extrêmement élevé, et tel doit être, en effet, le résultat naturel des études bien conduites. Désormais, par exemple, nous laisserons le vulgaire s'extasier tant qu'il lui plaira à la vue de l'organisation compliquée et délicate des animaux microscopiques, en nous disant bien que, si l'organisation d'un animal est une chose tout à fait digne d'admiration, il importe fort peu d'ailleurs que cet animal soit éléphant ou ciron ; et que, dans l'espace même que nous jugeons le plus petit, il y a toujours beaucoup plus de place qu'il n'en faut pour y concevoir tout ce qu'il plaira à notre imagination d'y supposer.

On a vu souvent opposer aux idées de Ptolémée sur l'arrangement des corps célestes, et à celles de Newton sur la nature de la lumière, la prodigieuse vîtesse qu'il fallait attribuer aux étoiles dans le système de l'astronome grec et aux molécules lumineuses dans celui du géomètre anglais. Certes, il est loin de ma pensée de vouloir ici prendre la défense du système de Ptolémée, ni même de me prononcer sur celui de Newton; mais ce n'est certes pas par ce côté qu'ils pourraient être vulnérables. Il n'est, en effet, aucune vîtesse qui puisse raisonnablement être dite prodigieuse, parce qu'il n'en est aucune qui soit tellement grande qu'on n'en puisse concevoir une autre incomparablement plus grande encore.

Nous nous plaignons souvent de la brièveté de notre vie. La vérité est pourtant que la vie humaine n'est, à proprement parler, ni longue ni courte. L'insecte éphémère qu'un même jour voit naître et mourir, peut, dans la courte durée de son existence, éprouver la même somme de sensations, d'idées et de jouissances qu'en éprouve la carpe et le perroquet, dans une carrière de plus d'un siècle. La vie est toujours trop longue quand on l'emploie mal; elle est toujours trop courte quand on en fait un bon usage.

Nous parlons sans cesse de l'expérience des siècles, et nous nous appuyons des cinq à six mille ans de guerres, de révolutions et de désastres de tous genres dont nous possédons les chroniques, pour désespérer de toute amélioration sociale. Mais qu'est-ce, au fond, que cinquante ou soixante siècles, que serait-ce même qu'un million de siècles comparé à la durée possible des choses? Au lieu de dire, avec quelques hommes moroses, que le genre humain touche à l'époque de sa décrépitude, ne serait-on pas tout aussi fondé à penser qu'à peine débarrassé des langes de la première enfance, il est appelé, peut-être, à des destinées que l'imagination la plus brillante et la plus féconde pourrait à peine concevoir; et, peut-être pour peut-être, ne doit on pas préférer celui qui encourage à celui qui afflige?

Il est donc tout à fait hors de doute que nos pensées et nos raisonnemens n'ont pas et ne sauraient même jamais avoir pour objet les grandeurs elles-mêmes, mais seulement les rapports que nous remarquons entre celles qui sont comparables. A la vérité nous semblons quelquefois employer les mots *grand* et *petit* dans un sens tout à fait absolu ; mais, en y regardant de plus près, nous ne tarderons pas de nous convaincre qu'alors il y a toujours quelque comparaison sous-entendue. Ainsi, par exemple, lorsque nous disons d'un arbre qu'il est grand ou petit, nous le comparons implicitement à la moyenne stature des arbres, au-dessus ou au-dessous de laquelle nous entendons exprimer qu'il se trouve; et nous ne pouvons nous exprimer ainsi que parce que la hauteur des arbres a deux limites extrêmes, qui même ne se trouvent pas fort distantes l'une de l'autre ; mais il ne saurait plus en être ainsi à l'egard d'objets dont la grandeur ou la petitesse n'ont point de limites nécessaires ; et celui qui, par exemple, demanderait qu'on lui traçât une ligne droite ou un cercle de grandeur ordinaire ferait une question dont l'ineptie serait manifeste pour tout le monde.

De cela même que nous ne connaissons des grandeurs que les rapports qui existent entre elles, c'est aussi tout ce qu'il nous est possible d'en faire connaître à autrui. Envain tenterait-on de torturer la langue, d'y introduire des mots ou des tours nouveaux, jamais on ne parviendrait à lui faire exprimer une grandeur, indépendamment de quelque autre grandeur de sa nature. A la vérité, nous autres habitans de la terre, nous pouvons parvenir à nous entendre assez bien, sur les longueurs et sur les poids, en les comparant à la taille et au poids moyen d'un homme, ou aux dimensions et au poids de quelque production naturelle ; et nous nous entendons également bien sur les temps, en les comparant soit à la durée moyenne de notre vie, soit à celle des diverses révolutions célestes. Mais supposons que nous ayons à donner à un habitant d'un autre Univers dont nous ignorerions tout à fait la structure, et qui ignorerait également lui-même comment les choses sont constituées ici bas, une idée de la longueur d'une aune, du poids d'une livre, de la durée d'un jour, et nous reconnaîtrons bientôt que cela nous serait tout à fait impossible, parce que ces choses nous sont absolument inconnues à nous-même (*).

# GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

## *Note sur la détermination du volume du segment sphérique à deux bases parallèles ;*

Par M. Bary.

Pour fixer les idées, supposons que les deux bases du segment à mesurer soient situées du même côté du grand cercle dont le plan leur est parallèle. Soient $a$ la plus grande base, $p$ la distance de son plan au centre de la sphère, $b$ la plus petite base, $q$ la distance de son plan au centre de la sphère, $r$ le rayon de cette sphère ; nous aurons d'abord

(*) Dans cet essai, écrit fort à la hâte, je puis bien n'avoir pas dit tout ce qu'il fallait dire, et ce que j'ai dit je ne l'ai certainement pas aussi bien dit qu'il pourrait l'être. Mais, si je ne me fais pas illusion, je crois n'avoir rien dit d'inutile. Cependant, combien de gens qui enseignent les mathématiques depuis longues années, et passent même pour les bien enseigner, qui n'ont jamais songé à toutes ces choses et ne se sont jamais avisés, à plus forte raison, d'y faire songer leurs auditeurs. A leurs yeux, des définitions, des théorèmes et des problèmes constituent seuls toute la science.

$$r^2=a^2+p^2=b^2+q^2 \ , \qquad (1)$$

d'où nous tirerons encore

$$a^2-b^2=q^2-p^2=(p+q)(q-p) \ ;$$

de sorte qu'en nommant $h$ la hauteur du segment, ce qui donnera

$$q-p=h \ , \qquad (2)$$

nous aurons

$$a^2-b^2=(p+q)h \ ,$$

et, conséquemment,

$$p+q=\frac{a^2-b^2}{h} \ , \qquad (3)$$

et alors les équations (2) et (3) donneront

$$p=\frac{a^2-b^2}{2h}-\frac{h}{2} \ , \qquad q=\frac{a^2-b^2}{2h}+\frac{h}{2} \ . \qquad (4)$$

Cela posé, soit $V$ le volume du segment ; ce segment est la différence de deux autres, ayant pour base commune le grand cercle parallèle à ses bases et se terminant à ses mêmes bases, et dont les hauteurs sont conséquemment $q$ et $p$. Soient $Q$ et $P$ respectivement les volumes de ces deux segmens, nous aurons

$$V=Q-P \ . \qquad (5)$$

Les deux segmens $Q$ et $P$ sont respectivement composés de deux cônes ayant $b$ et $a$ pour rayons de leurs bases et $q$ et $p$ pour hauteurs et de deux secteurs terminés par des zônes sphériques dont les hauteurs sont également $q$ et $p$ ; de sorte qu'on a

$$Q=\tfrac{1}{3}\varpi b^2q+\tfrac{2}{3}\varpi r^2q \ , \qquad P=\tfrac{1}{3}\varpi a^2p+\tfrac{2}{3}\varpi r^2p \ ,$$

ou bien (1)

$$Q=\tfrac{1}{3}\varpi b^2q+\tfrac{2}{3}\varpi(b^2+q^2)q=\varpi b^2q+\tfrac{2}{3}\varpi q^3 \ ,$$

$$P=\tfrac{1}{3}\varpi a^2p+\tfrac{2}{3}\varpi(a^2+p^2)p=\varpi a^2p+\tfrac{2}{3}\varpi p^3 \ ,$$

ce qui donnera, en substituant dans (5),

$$V=\varpi(b^2q-a^2p)+\tfrac{2}{3}\varpi(q^3-p^3)=\varpi(b^2q-a^2p)+\tfrac{2}{3}\varpi(q-p)(p^2+pq+q^2);$$

c'est-à-dire (2),

$$V=\varpi(b^2q-a^2p)+\tfrac{2}{3}\varpi h(p^2+pq+q^2)\ . \qquad (6)$$

Mais les valeurs (4) donnent

$$b^2q-a^2h=\frac{(a^2+b^2)h}{2}-\frac{(a^2-b^2)^2}{2h}\ ;$$

$$p^2+pq+q^2=\frac{3(a^2-b^2)^2}{4h^2}+\frac{h^2}{4}\ ;$$

substituant ces valeurs dans (6) et réduisant, il viendra finalement

$$V=h\,\frac{\varpi a^2+\varpi b^2}{2}+\tfrac{1}{6}\varpi h^3\ ,$$

qui est précisément le résultat donné par M. Legendre.

Si, du volume de ce segment, on retranche le volume du tronc du cône qui se termine à ses deux bases, lequel a, comme l'on sait, pour expression

$$\varpi\,\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)\ ,$$

on obtiendra, pour le volume du corps engendré par un segment de cercle tournant autour d'un diamètre qui lui est extérieur,

$$\frac{\varpi h}{6}\left\{(a-b)^2+h^2\right\}\ .$$

Mais, si l'on représente par $c$ la corde du segment générateur, on aura

$$(a-b)^2+h^2=c^2\ ,$$

ce qui donnera, en substituant, pour le volume cherché,

$$\frac{\varpi hc^2}{6}\ ;$$

expression remarquable par sa simplicité.

# PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

## *Première leçon sur la numération ;*

Par M. GERGONNE.

UN livre extrêmement curieux et utile serait celui qui nous présenterait l'histoire détaillée de toutes les inventions et découvertes dans les sciences et dans les arts. Le défaut de documens suffisans semble devoir rendre, à tous jamais, impossible la composition d'un tel ouvrage.

Un livre plus utile encore peut-être, et que l'on conçoit exécutable, serait celui dans lequel, faute de savoir comment chaque découverte a été réellement faite, on expliquerait du moins de quelle manière elle a pu l'être. Le premier pourrait être regardé comme l'*histoire de l'esprit humain*, tandis que l'autre en serait le *roman*. Or, de même que la lecture des bons romans, dans lesquels tout est soigneusement disposé pour l'effet qu'on veut produire, semble plus propre peut-être que celle des traités historiques à porter l'homme à la pratique des actions vertueuses, on est fondé à croire que pareillement l'étude de la succession d'idées par laquelle on aurait pu le plus naturellement et le plus directement être conduit aux inventions et découvertes nombreuses dont les sciences et les arts sont en possession, serait beaucoup plus propre à accélérer le développement de l'esprit humain, que l'étude des tentatives, si souvent maladroites, et d'ordinaire très-lentes et très-compliquées, des véritables inventeurs.

Ce que je désirerais ici que l'on fît pour le système entier des connaissances humaines, je n'ai jamais négligé de le faire, dans mon enseignement, par rapport à la langue des nombres. Je vais présenter ici une première leçon sur cet intéressant sujet, telle que je désirerais qu'elle fût faite dans nos écoles.

---

De même que l'habitude nous rend presque insensibles aux défauts des institutions les plus vicieuses, aux inconvéniens des usages les plus incommodes, cette même habitude nous empêche souvent de sentir tout le prix des inventions les plus ingénieuses, les plus utiles et les plus dignes de notre admiration. Nous sommes depuis huit siècles, en Europe, en possession d'une langue des nombres qui est un chef-d'œuvre d'uniformité, de clarté et de concision, d'une langue qui, en quelques heures, peut être complètement apprise, pour n'être jamais oubliée; mais par cela même qu'elle est depuis très-long-temps connue, parlée et écrite par tout le monde, peu de personnes sentent bien toutes les difficultés que présentait l'institution d'une telle langue, et tout ce qu'il a fallu d'adresse et de sagacité pour les surmonter.

Afin donc de ne pas partager nous-même cette indifférence, aussi injuste que peu philosophique, pour une invention dont nous avons journellement à faire les applications les plus usuelles comme les plus sublimes, afin de bien saisir l'esprit et l'ingénieux mécanisme de la langue des nombres, et de former ainsi notre intelligence à l'art d'inventer, reportons-nous, pour un moment, par la pensée, à l'époque où ni cette langue, ni aucune de celles qu'elle a remplacées n'existait encore, et où conséquemment tout était encore à créer dans cette branche de notre savoir; et, suppléant aux documens historiques dont nous sommes dépourvus, par ce qui nous est connu de la marche ordinaire de l'esprit humain, dans ses diverses investigations, examinons par quelle suite de réflexions et de tentatives on a pu être conduit à une invention si précieuse. Efforçons-nous, en un mot, de substituer à l'histoire peu connue de la découverte de la langue des nombres, un roman qui ne sera pas dépourvu d'intérêt et d'utilité, s'il n'est pas tout à fait dépourvu de vraisemblance.

Mais avant d'entrer en matière, et afin de nous rendre plus intelligibles, posons d'abord quelques principes généraux sur les langues, sur les divers genres de services que nous pouvons en attendre, et sur l'esprit qui doit présider à leur formation. Ces principes seront d'autant moins déplacés ici que la langue des nombres est peut-être la plus propre de toutes à bien faire ressortir la toute puissante influence des signes sur la faculté de penser.

Les hommes, répandus sur la surface de la terre, y seraient éternellement demeurés étrangers les uns aux autres, s'ils n'étaient parvenus, au moyen d'une collection de signes sensibles, à s'avertir réciproquement de ce qui se passait dans leur esprit et des sentimens divers dont ils étaient animés. L'ensemble des signes destinés à un tel usage constitue ce qu'on appelle les *langues*, envisagées sous le point de vue le plus général.

Ces signes peuvent être *permanens* ou *fugitifs*. Les signes de la première sorte constituent la *langue écrite* qui jouit exclusivement du précieux avantage de transmettre la pensée, sans altération aucune, à toutes les distances et à toutes les époques. Ceux de la seconde sorte appartiennent à la *langue parlée* dont l'effet est purement instantané, et qui ne pourrait transmettre la pensée qu'à des distances très-limitées, si la mémoire ne venait à son secours. A celle-ci se rapportent la langue d'actions et les sons inarticulés. L'usage de la langue écrite paraît exclusif à l'homme, tandis qu'il partage avec tous les animaux, mais dans un degré évident de supériorité, l'usage de la langue parlée.

Les signes de l'une et de l'autre langues peuvent être *naturels* ou *conventionnels* ; ceux de cette dernière sorte sont aussi appelés des *signes d'institution*. Les premiers jouissent seuls de l'avantage précieux d'être universellement compris ; mais leur nombre est nécessairement limité. Les derniers, au contraire, peuvent être indéfiniment multipliés par le jeu des combinaisons ; mais il varient de peuple à peuple, de siècle à siècle, et demeureraient à jamais inintelligibles pour qui ne serait pas mis au courant des conventions qui ont présidé à leur création. Ceux-ci paraissent être exclusivement à l'usage de l'homme ; tandis qu'il partage l'usage des autres avec tous les animaux.

En considérant donc les signes de nos pensées sous ce double point de vue, nous nous trouvons naturellement conduits à les ranger sous quatre chefs principaux qui sont :

1.° Les signes *naturels fugitifs*, tels que les cris, le rire, les pleurs, les gestes, etc. Ils paraissent constituer à eux seuls la langue des animaux ;

2.° Les signes *naturels permanens*, tels que les étalages de nos marchands, au-devant de leurs boutiques, le dessin, la peinture, la sculpture, etc. ; telle devait être aussi, sans doute, l'écriture hiéroglyphique, dans sa simplicité primitive ;

3.° Les signes *conventionnels fugitifs*, tels que les signaux en mer, les coups de canon dans une fête publique, le pas de charge à la guerre, et presque tous les sons de nos langues articulées;

4.° Enfin les signes *conventions permanens*, tels que les marques distinctives des grades dans l'armée, les costumes variés de nos fonctionnaires et tous les caractères de nos langues syllabiques.

Il est nécessaire d'observer, au surplus, qu'il en est de cette classification comme de la plupart des autres, et que, si elle soulage notre attention, en offrant à notre esprit des points de repos, ce n'est, d'un autre côté, qu'une sorte de fiction, souvent peu conforme à l'état réel des choses. On conçoit, en effet, qu'il peut exister une multitude de nuances, soit entre le signe le plus naturel et celui qui l'est le moins, soit entre le signe le plus durable et le signe le plus éphémère. Il y a donc des signes plus ou moins naturels, plus ou moins conventionnels, plus ou moins fugitifs, plus ou moins permanens; et c'est là une remarque qu'il ne faut jamais perdre de vue.

Si, dans nos langues, soit parlées, soit écrites, on avait pu se borner au seul emploi des signes tout à fait naturels, les hommes, sans aucune culture préalable, se seraient facilement entendus d'un pôle à l'autre; nous ne nous trouverions pas dans la déplorable nécessité de consumer les plus belles années de notre vie à nous rendre familières les langues des divers peuples avec qui nous voulons correspondre, ou des divers écrivains que nous voulons consulter; et nous n'en serions pas réduits, à notre grand préjudice, à sacrifier à l'étude des mots un temps que nous pourrions si utilement employer à l'étude des choses. C'est, par exemple, parce que les horloges parlent une langue fort naturelle que celles de Berlin sont tout aussi bien comprises par un Espagnol que le sont celles de Madrid par un Prussien; et c'est encore parce que le dessin et la peinture sont des écritures naturelles que nos badauds de Paris ne s'arrêtent pas avec moins de complaisance devant les carricatures de Londres que ne le font ceux de Londres devant les carricatures de Paris. La foule ne se porte guère, au contraire, devant les étalages de nos marchands de musique, parce qu'une éducation spéciale est nécessaire pour l'intelligence des caractères musicaux, qui n'ont de sens qu'en vertu de certaines conventions ignorées du gros du public.

Mais les nuances de nos idées sont si nombreuses et si variées que, même dans l'état de civilisation le moins avancé, les signes naturels n'auraient pu suffire pour les exprimer toutes sans confusion : et comment d'ailleurs exprimer autrement que par des signes de pure institution, tant d'idées dont l'objet n'a aucune prise sur nos sens et ne peut être offert à aucun d'eux ? Il est probable, toutefois, que l'usage des signes naturels a dû précéder partout l'usage des signes de convention, et en aura même fait naître l'idée. On peut conjecturer, avec assez de vraisemblance, que, soit par la négligence ou la maladresse de ceux qui les employaient, soit par le désir de rendre la langue plus concise, soit enfin par le besoin d'étendre aux idées intellectuelles les signes des idées sensibles, ces signes se seront graduellement altérés et éloignés de leur formes primitives ; que voyant que les altérations qu'ils avaient subies n'empêchaient pas d'en retirer les mêmes usages, on aura conçu l'idée d'employer, concurremment avec eux, d'autres signes de pure institution qui peu à peu auront prévalu et seront démeurés seuls dans nos langues.

Si les conventions qui ont donné naissance aux signes de cette dernière sorte avaient pu être, à la fois, universelles et durables, une seule langue nous aurait suffi pour nous mettre en relation soit avec nos contemporains de toutes les contrées, soit avec les écrivains de toutes les époques, et on ne saurait douter que la civilisation n'y eût trouvé un immense avantage ; mais, d'une part, l'isolement où ont long-temps vécu, les uns des autres, les différens peuples de la terre et la diversité de leurs mœurs et de leurs usages, et de l'autre, les altérations progressives, et en sens divers, que les signes de nos idées ont successivement éprouvées n'ont point permis qu'il en fût ainsi, et ont prodigieusement multiplié les idiômes, soit chez les anciens, soit chez les modernes. C'est là un très-grand mal sans doute, mais c'est un mal qui ne pourrait trouver de remède que dans l'institution d'une langue philosophique, très-difficile à créer, bien plus difficile encore à faire universellement admettre, et qui d'ailleurs subirait bientôt, peut-être, les mêmes altérations que toutes les autres ont tour à tour éprouvées.

Le besoin d'une communication prompte d'idées et de sentimens, entre les hommes qui habitent une même contrée, a fait créer les langues parlées ; on a trouvé ensuite, dans les langues écrites, le moyen de correspondre à toutes distances, sans déplacement, de mettre en dépôt ses propres pensées et celles d'autrui, de manière à pouvoir les conserver sans altération, les retrouver à volonté, et se mettre ainsi à l'abri des erreurs auxquelles pourrait nous exposer l'infidélité de nos souvenirs. Mais le plus grand service, peut-être, que nous retirions des langues, soit parlées, soit écrites, service qui pourtant n'a été bien aperçu que dans des temps très-voisins de nous, consiste en ce qu'elles ne sont pas moins l'instrument que le signe de la pensée ; de telle sorte qu'elles ne seraient pas moins nécessaires à l'homme isolé, pour perfectionner son intelligence, qu'elles le sont à l'homme vivant en société, pour entrer en communication d'idées avec tout ce qui l'environne ; or, de même qu'un artiste exécute des ouvrages d'autant plus beaux et les exécute d'autant plus facilement qu'il est pourvu d'outils plus parfaits, on peut dire, avec tout autant de vérité, que le progrès plus ou moins rapide de l'esprit humain se trouve dans la plus étroite liaison avec la plus ou moins grande perfection des langues dont les hommes emprunteront le secours dans la recherche des vérités nombreuses qui sont encore à découvrir.

Les hommes même qui sentent le mieux toute l'influence des signes sur les idées ne sauraient guère perfectionner les langues vulgaires, livrées comme elles le sont au caprice de la multitude ; ils ne pourraient davantage tenter des réformes de quelque importance dans la langue des sciences, sans s'exposer à indisposer contre eux tous ceux dont ces réformes contrarieraient les habitudes ; mais il n'en importe pas moins de noter soigneusement, dans la langue de chaque science, ce qui mérite d'être conservé et ce qui, au contraire, pourrait réclamer d'utiles modifications, ne fusse que pour préparer, de longue main, les esprits à ces modifications et pour hâter ainsi l'époque où le progrès de la raison pourra permettre de les introduire.

Ce serait peut-être ici le lieu de poser quelques principes fixes sur ce qui, en général, constitue la perfection des langues; mais des principes purement abstraits pourraient ne pas captiver suffisamment l'attention du lecteur, ou du moins ne lui présenter qu'un attrait médiocre; nous croyons donc plus convenable de ne les lui offrir qu'à mesure que nous aurons l'occasion de lui en faire sentir l'importance, par leur application à l'objet spécial de nos recherches.

Revenons donc à notre sujet; rappelons-nous qu'il s'agit de créer une langue particulière pour les nombres, c'est-à-dire d'inventer des signes propres à nommer et à écrire uniformément tous les nombres naturels dont la série est illimitée. C'est à cet art qu'on a donné le nom de *numération*. La numération devra donc comprendre deux parties bien distinctes, savoir: la *numération écrite* ou l'art de peindre les nombres aux yeux par les *signes permanens* de l'écriture, et la *numération parlée* ou l'art de rappeler les nombres à l'oreille par les *signes fugitifs* de la voix.

On conçoit d'ailleurs que ce double but peut être atteint par divers ensembles de moyens plus ou moins heureux, plus ou moins convenablement appropriés à leur destination. Ainsi, les Grecs avaient leur numération, les Romains avaient aussi la leur, et ni l'une ni l'autre ne ressemblaient à la nôtre. En conséquence on a appelé *système de numération*, tout ensemble de moyens imaginés pour peindre et nommer tous les nombres; et c'est dans ce sens qu'on dit qu'il est possible de concevoir plusieurs systèmes de numération, comme nous avons plusieurs langues vulgaires. Dans chacun d'eux les caractères, autres que ceux de l'écriture ordinaire que l'on consacre à peindre les nombres, sont appelés des *chiffres*.

Nous employons ici, comme l'on voit, le mot *système* dans le sens qu'y attachent les naturalistes, c'est-à-dire, comme signifiant *un ensemble de moyens propres à conduire à un but déterminé* : et c'est dans ce sens que l'on dit, par exemple, en botanique, les systèmes de Linnée, de Tournefort, de Jussieu, de Lamarck, etc. Mais malheureusement ce mot, comme tant d'autres, a encore une autre acception assez différente de celle-là. Le mot *système*, en effet, signifie aussi, très-souvent, une *supposition purement gratuite à laquelle on a recours, dans la vue d'expliquer comment pourraient être produits des effets dont les causes sont inconnues ;* et c'est dans ce sens, par exemple, que l'on dit, en parlant des phénomènes électriques, les systèmes de Dufaye, de Franklin, d'Œpinus, de Coulomb, etc. Nous sommes donc obligés de prévenir, avant d'aller plus loin, que ce n'est jamais sous cette dernière acception que le mot système est employé quand il s'agit de numération.

Lorsqu'on songe à inventer un système de numération, la première pensée qui doit s'offrir aux inventeurs, s'ils sont guidés par la saine raison, c'est d'établir entre la numération parlée et la numération écrite une relation assez intime pour qu'en entendant nommer un nombre on sache de suite comment il doit s'écrire, et qu'à l'inverse, en le voyant écrit on sache aussitôt de quelle manière il doit être énoncé dans le discours. C'est ainsi qu'il en arrive pour nos langues vulgaires d'Europe où, abstraction faite de quelques bizarreries de l'orthographe, nous sommes à la fois en état d'écrire sous la dictée un mot que nous entendons prononcer et de prononcer un mot que nous voyons écrit pour la première fois, sans même que nous ayons aucunement besoin d'en connaître la signification, et quand bien même il n'aurait de sens dans aucune langue.

Quelque simple et quelque naturelle que cette idée puisse paraître, il est pourtant sur la terre de grandes nations qui ne s'en sont point avisées, et chez lesquelles la langue écrite est essentiellement différente de la langue parlée. Aussi, tandis que tout le monde y sait parler comme parmi nous, on y rencontre très-peu de gens qui sachent lire et écrire; et voilà, sans doute, pourquoi la civilisation y est depuis si long-temps stationnaire; tant il est vrai que la destinée des peuples tient souvent à bien peu de chose.

De tous les systèmes de numération, le plus simple et le plus naturel sans doute qu'on puisse imaginer, et duquel, pour cette raison, on rencontre des traces presque partout, est celui qui consisterait à *inventer un chiffre et un mot pour écrire et nommer l'unité, et à écrire ou énoncer un nombre quelconque, en écrivant ce chiffre ou en prononçant ce mot autant de fois que le nombre qu'il s'agirait d'écrire ou d'énoncer contiendrait d'unités.* On conçoit d'ailleurs que ce chiffre et ce mot ne pourraient être que de purs signes d'institution; car un caractère d'écriture et un son de la voix ne sauraient avoir aucune liaison nécessaire avec l'idée générale de l'unité, qui est une idée purement intellectuelle; mais, à cela près, cette langue des nombres serait très-naturelle, puisque rien n'est plus propre à donner l'idée du nombre que l'impression que nous recevons d'une collection de signes semblables. Le choix du chiffre et du mot seraient d'ailleurs tout à fait indifférent. Il conviendrait seulement d'adopter de préférence un caractère facile à tracer et un mot d'une seule syllabe.

En destinant, par exemple, à cet usage notre chiffre 1 et son nom *un*, qui remplissent complètement ces conditions, les nombres que nous appelons vulgairement *un*, *deux*, *trois*, *quatre*, ....., c'est-à-dire, les nombres de la suite naturelle s'écriraient respectivement comme il suit :

1, 11, 111, 1111, .......

et se prononceraient de la sorte :

un , un un , un un un , un un un un , ........

C'est exactement de cette manière que les Romains écrivaient les quatre premiers nombres naturels ; et c'est également à ce système que l'on doit rapporter et les *tailles* dont se servent les gens du peuple qui font compte chez les boulangers, la manière de marquer les points au billard, les jetons qu'on donne et qu'on reçoit dans la plupart des jeux de cartes et beaucoup d'autres inventions analogues. Le signe peut varier d'un cas à l'autre, mais l'idée fondamentale demeure constamment la même ; c'est toujours, dans tous les cas, un même signe répété autant de fois que l'on veut exprimer d'unités. A la vérité, ceux qui font usage de cette manière de rappeler aux yeux l'idée des nombres, les énoncent de la même manière que nous ; mais les horloges, lorsqu'elles sonnent les heures, se conforment exactement à l'esprit de ce système. Elles ne disent pas, comme nous, un, deux, trois, quatre, ......., mais elles répètent le son par lequel elles avertissent qu'il est une heure autant de fois qu'elles en veulent indiquer.

Outre que l'adoption d'un tel système serait peu fatigante pour la mémoire qui n'aurait à se charger que de la forme d'un caractère d'écriture et d'un son unique, il offrirait le précieux avantage d'une liaison étroite entre le signe et l'idée signifiée ; car, comme nous l'avons déjà fait observer, il est presque impossible de voir plusieurs signes ou objets pareils, il est presque impossible que l'oreille soit frappée plusieurs fois consécutivement d'un même son, sans qu'aussitôt, et presque involontairement, l'idée d'un certain nombre d'unités ne soit réveillée dans l'esprit. C'est donc là une langue très-naturelle ; aussi est-elle universellement comprise par tout le monde, sans qu'elle ait aucunement besoin d'être enseignée.

C'est aussi d'ordinaire le moyen auquel on a recours pour apprendre à compter aux enfans en bas âge, auxquels on fait acquérir les premières notions sur les nombres, en leur montrant plusieurs objets semblables, tels que des jetons, des fruits ou même les doigts de la main. Mais nous ferons remarquer qu'en prononçant successivement les mots *un*, *deux*, *trois*, ....., sur tous les doigts, comme on le fait communément, on court le risque de leur faire prendre le change, et de leur faire croire que ces mots sont des noms individuels imposés aux différens doigts. Il faut donc ne prononcer le mot *deux* ni sur un doigt ni sur un autre, mais sur l'ensemble de deux doigts. On prononcera pareillement le mot *trois* sur l'ensemble de trois doigts, et ainsi du reste, en leur expliquant bien que chaque doigt isolé s'appelle *un*. Nous nous plaignons assez souvent du peu d'aptitude des enfans pour les choses que nous voulons leur enseigner, et nous ne songeons pas que, la plupart du temps, la lenteur de leurs progrès a pour cause principale notre maladresse dans la manière de les instruire.

Quelque simple et ingénieuse qu'une invention puisse paraître à certains égards, ce n'est qu'après l'avoir envisagée sous toutes ses faces que l'on peut exactement en apprécier le mérite. Examinons donc si les avantages, incontestables dailleurs, du système de numération que nous venons de décrire ne se trouveraient pas plus que compensés par les inconvéniens de diverses sortes que pourrait entraîner son adoption.

Un inconvénient qui frappe d'abord, c'est qu'un nombre un peu grand, écrit suivant ce système, occuperait un espace fort considérable, et qu'il faudrait beaucoup de temps pour l'écrire et guère moins pour l'énoncer. Ainsi, par exemple, en ne mettant que l'intervalle d'une ligne du pied de roi entre les chiffres et un intervalle d'une seconde entre les mots, l'année dans laquelle nous nous trouvons occuperait dans l'écriture une longueur de plus de deux toises, et demanderait au-delà d'une demi-heure pour être énoncé.

A cet inconvénient, déjà plus que suffisant pour faire abandonner une pareille invention, vient s'en joindre un autre, peut-être beaucoup plus grave encore ; il naît de la confusion que laisse inévitablement dans l'esprit cette multiplicité de caractères et de mots semblables, du moment qu'ils deviennent tant soit peu nombreux. Ecrivons, en effet, de cette manière, deux nombres un peu grands et peu différens, tels, par exemple, que ceux-ci :

IIIIIIIIIIIIIIIIIIII , IIIIIIIIIIIIIIIIIIIII ;

il serait certes bien difficile de prononcer, à la simple vue, s'ils sont égaux ou inégaux, et, lors même qu'on serait averti à l'avance qu'ils sont inégaux, on aurait peine à reconnaître quel est le plus grand des deux ; et il en irait exactement de même si, au lieu de les voir écrits, on les entendait énoncer, tour à tour, de la manière qui a été expliquée plus haut. Pour peu même que les chiffres du plus grand seraient serrés plus que ceux du plus petit, ou que la lecture en serait plus rapide, on pourrait très-bien prendre le change, et juger le plus grand des deux celui-là précisément qui serait le plus petit. On en serait réellement réduit à juger de la grandeur relative des nombres par le plus ou le moins d'espace qu'ils occuperaient, par le plus ou le moins de temps qu'exigerait leur énoncé ; moyens peu propres, on le sent fort bien, à les faire exactement apprécier.

On apercevra très-sensiblement le vice radical d'un tel système, en supposant qu'entendant sonner une horloge, vers les dix ou onze heures du matin, on écoute attentivement les coups de cloche, sans songer, en aucune sorte, aux noms vulgaires des nombres; il est manifeste que, quelque soin d'ailleurs qu'on y apporte, on se trouvera dans l'impuissance de dire exactement quelle heure l'horloge a indiquée.

Dans certaines contrées sauvages où on ne s'est pas encore avisé de donner des noms collectifs aux divers groupes d'unités, on n'a d'autres ressources, pour faire un partage égal de fruits ou d'autres objets, entre plusieurs individus, que celle d'en donner, tour à tour, un à chacun des copartageans, jusqu'à entier épuisement de la quantité à partager. Après le partage fait, les ayant-droit n'ont qu'une idée confuse de la valeur de leurs parts ; mais ils savent que ces parts sont égales, et c'est là ce qui leur importe principalement. Veulent-ils s'assurer qu'entre deux nouvelles lunes consécutives, il s'écoule un même nombre de jours ? A partir d'une nouvelle lune, ils mettent chaque jour une petite pierre en réserve, jusqu'à la nouvelle lune suivante ; ils en font de même de celle-ci à celle qui la suit immédiatement ; ils ont ainsi deux tas de petites pierres, et, pour s'assurer qu'elles sont en même nombre dans l'un et dans l'autre, ils n'ont d'autres ressources que d'ôter continuellement, et à la fois, une pierre de chaque tas, afin de voir s'ils seront épuisés en même temps. C'est là aussi où nous en serions nous-mêmes réduits, pour nous assurer de l'égalité de deux nombres, dans le système de numération dont il est question ici ; mais nous saurions simplement ainsi que ces deux nombres sont égaux, sans savoir bien clairement ce qu'ils sont l'un et l'autre.

Une expérience fort simple peut aisément nous convaincre que notre intelligence, réduite à ses propres ressources, et totalement dépourvue de signes et de moyens artificiels, ne serait guère capable de concevoir nettement l'idée de plus de trois unités. Si, en effet, nous voulons prononcer un même mot ou répéter un même acte quatre fois consécutivement, et avoir bien la conscience de ne l'avoir répété ni plus ni moins de quatre fois, nous aurons naturellement soin de faire une petite pause, réelle ou mentale, entre la deuxième et la troisième ; ce qui revient à considérer quatre comme deux collections de deux unités. Voulons-nous répéter ce même mot ou ce même acte cinq fois? Nous ferons une pose, réelle ou mentale, soit entre la seconde et la troisième, soit entre la troisième et la quatrième ; ce qui revient à considérer cinq comme deux augmenté de trois ou comme trois augmenté de deux. S'il est question de le répéter six fois, nous considérerons six comme formé de trois groupes de deux unités ou comme formé de deux groupes de trois unités. Nous userons naturellement d'artifices analogues pour les nombres supérieurs à six, du moins tant qu'ils ne dépasseront pas une certaine limite au-delà de laquelle notre art pourrait fort bien devenir tout à fait impuissant. C'est sans doute un pareil instinct qui a déterminé les poëtes à ménager, dans les grands vers, des repos, faute desquels ils n'auraient eu aucun charme pour l'oreille, incapable alors de juger si le rythme y est exactement observé ; et c'est, en effet, à l'aide de ces mêmes repos que nous nous assurons qu'un vers est exact ou défectueux, sans être tenus d'en compter les pieds un à un.

Les remarques et les réflexions qui précèdent sont plus que suffisantes pour montrer, qu'excepté pour de très-petits nombres, le système de numération qui s'est le premier offert à notre pensée, et dont l'apparente simplicité avait pu un moment nous séduire, ne saurait, en aucune sorte, être adopté comme moyen général d'écrire et de nommer les nombres. Aussi voyons-nous que, pour la numération écrite, les Romains l'avaient abandonnée au-delà de quatre, et qu'ils n'en ont jamais fait usage pour la numération parlée (*).

---

(*) Pour ne rien laisser à dire sur ce système, nous devons ajouter, à l'usage des personnes à qui les opérations de l'arithmétique ne sont pas tout à fait étrangères, qu'ils rendraient ces opérations d'une exécution extrêmement faciles, car, par exemple, pour ajouter un nombre à un autre, il suffirait

C'est une chose fort ordinaire à l'esprit humain, lorsqu'il s'est mal trouvé d'un parti extrême, auquel il avait d'abord cru devoir s'attacher à raison des avantages qu'il avait pensé pouvoir s'en promettre, de se jeter aussitôt dans l'extrême contraire. Il est donc présumable que, frappés des défauts du système que nous venons de repousser, les hommes auront songé aussitôt à un système tout contraire, consistant à *inventer un chiffre particulier pour représenter chacun des nombres naturels, à donner un nom à ce chiffre et à convenir que le nom du chiffre serait aussi le nom du nombre qu'il représenterait.* C'est ainsi que nous en usons nous-mêmes pour les neuf premiers nombres naturels ; de sorte que, pour continuer sur le même plan, il ne serait questions que d'inventer de nouveaux caractères et de nouveaux mots pour écrire et nommer les nombres que nous appellons douze, treize, quatorze, .....

Ce système sauve complètement les inconvéniens qui nous avaient frappés dans l'autre et qui nous avaient déterminé à lui donner l'exclusion. On voit, en effet, qu'en l'adoptant, il ne faudrait ni plus d'espace ni plus de temps pour écrire et énoncer un grand nombre que pour en écrire et énoncer un petit, puisque l'un et l'autre s'écriraient avec un chiffre unique et s'énonceraient par un seul mot. Ajoutons qu'on ne courrait plus alors le risque de confondre entre eux, soit dans l'écriture, soit dans l'énoncé, deux nombres qui ne différeraient seulement l'un de l'autre que par quelques unités, puisqu'à chacun d'eux se trouverait affecté un chiffre et un nom spécial.

Mais, pour peu qu'on se donne la peine d'y réfléchir, on comprendra aisément que l'adoption d'un tel système nous priverait

---

d'écrire le second à la droite du premier, et, pour l'en retrancher, il suffirait de supprimer dans le premier autant d'unités qu'en offrirait le second. On trouverait dans les autres opérations une facilité analogue.

complètement des avantages précieux qui nous avaient d'abord séduits dans l'autre. Il ne manque pas de gens, en effet, à qui on a bien de la peine à enseigner à lire et à écrire, parce qu'ils ne peuvent que difficilement parvenir à distinguer les unes des autres, de manière à les nommer sans hésitation, les vingt-quatre lettres de notre alphabet, et qu'ils ne peuvent que plus difficilement encore apprendre à les figurer avec la plume. De telles gens éprouveraient évidemment le même embarras et les mêmes peines pour apprendre seulement, dans un pareil système de numération, à nommer et à écrire les vingt-quatre premiers nombres naturels, ce qui serait certes très-loin de pouvoir satisfaire même aux besoins d'une civilisation encore au berceau.

Des supputations faites sur des résultats d'expériences, en petit, ont conduit à conjecturer, avec quelque vraisemblance, que toute la durée de la vie d'un homme d'une capacité commune lui suffirait à peine pour apprendre à discerner, les uns des autres, cinquante mille caractères différens, en retenir les noms et appliquer sûrement chaque nom à chaque caractère. Voilà donc qu'en adoptant un semblable système de numération, tout le cours de la vie humaine serait nécessaire pour apprendre à nommer et écrire, à volonté, les cinquante mille premiers nombres naturels, sans qu'il nous restât du temps pour faire quelque utile application de cette vaine connaissance, lorsqu'après beaucoup de temps et de peine, nous serions parvenus à l'acquérir.

Nous avons fait, d'ailleurs, une concession beaucoup trop large, en admettant que, dans ce système, les nombres écrits occuperaient peu d'espace, exigeraient peu de temps pour être énoncés, et se distingueraient très-facilement les uns des autres, soit dans l'écriture, soit dans le langage. Nous n'avons que vingt-quatre caractères seulement dans notre alphabet, et vingt-quatre noms qui leur répondent, et déjà, pour n'avoir point voulu compliquer trop les uns et les autres, il arrive fort souvent que, soit dans l'écriture cursive, soit dans un énoncé rapide, plusieurs de ces caractères et de ces noms se distinguent mal les uns des autres; combien de gens, par exemple, qui, pour écrire le mot *minimum*, ne font autre chose que d'écrire quinze barres verticales consécutives, sur l'assemblage desquelles ils placent deux points à peu près au hasard. On conçoit, d'après cela, que, s'il fallait seulement inventer cinquante mille caractères et leur imposer des noms, de telle sorte que deux de ces caractères et de ces noms ne risquassent jamais d'être pris l'un pour l'autre, ce ne serait pas par des formes et par des sons très-simples que l'on pourrait se flatter d'y parvenir.

Remarquons bien d'ailleurs qu'il n'en estpoint du tout ici comme des mots de nos langues vulgaires, qu'il y a souvent peu d'inconvéniens à écrire mal et à mal prononcer, attendu que le sens du discours, dans lequel ces mots se trouvent enchassés, offre d'ordinaire un préservatif suffisant contre les méprises qu'on pourrait commettre; tandis que communément les mots qui précèdent et ceux qui suivent un nombre mal écrit ou mal prononcé ne sauraient offrir aucune lumière pour en découvrir la véritable signification (*).

Ce que nous venons de dire ici de la langue des nombres est exactement applicable à nos langues vulgaires. On pourrait fort bien tenter, en effet, d'écrire et d'énoncer toutes nos pensées à

---

(*) Ajoutons, pour les lecteurs à qui les procédés du calcul ne sont pas étrangers, que, dans ce système de numération, les grands calculs seraient à peu près impossibles. L'art d'opérer sur les grands nombres se réduit, en effet, à décomposer les calculs en d'autres plus simples, dans lesquels les nombres sur lesquels on opère n'ont qu'un chiffre unique, et dont il faut savoir les résultats de mémoire. Or, ici les nombres étant tous d'un seul chiffre, il faudrait savoir de mémoire tous les résultats d'opérations, sans avoir aucune ressource pour les découvrir.

l'aide d'un caractère et d'un son unique, de la lettre *a*, par exemple, et de son nom. Il suffirait pour cela de convenir de remplacer chacun des mots de nos langues par un nombre d'*a* plus ou moins grand, écris ou prononcés consécutivement ; et nous ne ferons pas à nos lecteurs l'injure de nous défier assez de leur intelligence pour leur expliquer au long tout ce que cette pratique entraînerait de confusion dans l'écriture et dans le langage. On pourrait tenter, à l'inverse, de remplacer par un caractère et un son particulier chacun des mots de nos langues ; mais alors l'art de lire et d'écrire deviendrait un art très-difficile, comme il l'est chez quelques peuples de l'Orient.

Voilà donc deux systèmes de numération tout à fait opposés l'un à l'autre, que nous sommes également contraints de rejeter, attendu que l'un et l'autre ne seraient d'un usage supportable que pour de très-petits nombres seulement ; d'où l'on voit, pour le dire en passant, qu'ici, comme dans tant d'autres rencontres, les partis extrêmes ne sont pas ceux desquels on retire le plus d'avantages. Nous sommes donc naturellement amenés à nous demander si l'on ne pourrait pas imaginer quelque système de numération dans lequel, en sacrifiant le moins possible des avantages que nous avons reconnu appartenir à ceux dont il vient d'être question, on ne rencontrât, qu'au moindre degré possible, les inconvéniens qui nous ont déterminés à les rejeter l'un et l'autre. Voici comment les Arabes, ou plutôt les Indiens, sont parvenus à résoudre cet important problème.

On conçoit que, dans l'expression des quantités, on peut prendre également pour unité soit un objet unique, soit une collection de plusieurs objets pris antérieurement pour unités, et c'est à cela, en particulier, que revient, dans le commerce, l'usage où l'on est de livrer certaines denrées à la douzaine ou au cent. On peut faire plus encore, on peut former de plusieurs unités simples une unité collective à laquelle on imposera un nom ; faire ensuite de plusieurs unités collectives réunies une unité collective d'un ordre plus élevé, à laquelle on imposera un autre nom, et ainsi graduellement ; et exprimer ensuite les quantités en faisant connaître combien elles contiennent d'unités collectives de chaque ordre.

C'est là, en effet, ce qui se pratique communément. Par exemple, de vingt-quatre unités de poids appelées *grains*, on forme une unité collective appelée *denier* ; de trois deniers on forme une unité collective appelée *gros* ; de huit gros on forme une unité collective appelée *once* ; de seize onces on forme une unité collective qu'on a appelé *livre* ; et on exprime le poids d'un corps en exprimant combien ce poids contient de livres, d'onces, de gros, de deniers et de grains.

Ces choses ainsi entendues, convenons, pour toutes sortes de quantités, de former de dix *unités simples*, que nous appellerons aussi *unité du premier ordre*, une unité collective que nous appellerons *dizaine* ou *dix*, ou même simplement *unité du second ordre* ; de dix dizaines ou unités du second ordre, une unité collective que nous appellerons *centaine* ou *cent*, ou même simplement *unité du troisième ordre* ; de dix centaines ou unités du troisième ordre une unité collective que nous appellerons *mille*, ou *unité du quatrième ordre*, et ainsi de suite indéfiniment, en réunissant constamment *dix* unités de chaque ordre dans *une* unité de l'ordre immédiatement supérieur, et en imposant continuellement un nom nouveau à chaque collection nouvelle.

Instituons, en outre, les neuf caractères ou chiffres

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

que nous appellerons respectivement

*un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf ;*

pour représenter, dans leur ordre, les neuf premiers nombres naturels; et convenons en même temps que le nom de chaque caractère sera aussi celui du nombre qu'il est destiné à représenter.

Nous allons voir qu'en considérant les nombres comme composés d'unités, de dizaines, de centaines, de milles, ....., il n'en est aucun qu'on ne puisse, à l'aide de ces quelques conventions, parvenir à écrire nettement, et, ce qui est très-digne de remarque, sans que, pour cela, il soit nécessaire de savoir compter au-delà de *dix*.

Supposons, en effet, que nous ayons devant nous un tas de blé, et qu'il soit question d'écrire en chiffres le nombre de grains dont il se compose. Formons d'abord des tas de dix grains de blé chacun; ces tas partiels seront des unités du *second ordre*. Lorsque nous en aurons fait autant que le nombre total des grains de blé à exprimer en aura pu fournir; s'il reste encore quelques grains de blé, ils seront certainement en moindre nombre que dix, puisqu'autrement il ne serait pas vrai de dire qu'on ne saurait plus former de tas de dix grains de blé. Le nombre des grains de blé excédant, lesquels seront des unités simples ou du premier ordre, pourra donc être noté au moyen de quelqu'un de nos neuf caractères. Supposons, pour fixer les idées, qu'il en reste trois; nous pourrons les écrire ainsi, par abréviation, ( 3 $^{\text{unit.}}$), et il nous restera à écrire le nombre des tas de dix grains de blé.

Pour cela réunissons ces tas dix par dix; nous formerons ainsi de nouveaux tas de *dix fois dix* ou *cent* grains de blé chacun, c'est-à-dire, des unités du *troisième ordre*. Après en avoir formé ainsi le plus grand nombre possible, s'il reste des tas de dix grains de blé, pour la même raison que ci-dessus, ils seront en moindre nombre que dix, et leur nombre pourra conséquemment être exprimé par quelqu'un de nos neuf chiffres. Supposons, pour fixer les idées, qu'il en reste *sept*; nous pourrons, par abréviation, les écrire ainsi ( 7 dix. ), et les placer à la droite ou à la gauche du nombre des unités. Il nous restera alors à exprimer le nombre des tas de cent grains de blé.

Nous pourrons semblablement réunir ces derniers dix par dix, pour en former de nouveaux tas de *dix fois cent* ou *mille* grains de blé, c'est-à-dire, des unités du *quatrième ordre*. Lorsque nous en aurons fait ainsi le plus grand nombre possible, s'il nous reste des tas de cent grains de blé, ils seront en moindre nombre que dix, et conséquemment leur nombre sera exprimable par quelqu'un de nos neuf chiffres. Supposons, pour fixer les idées, qu'il en reste *quatre* ; nous écrirons, par abréviation, à la droite ou à la gauche des deux autres nombres déjà écrits, ( 4 cent. ) ; et il restera à noter le nombre des tas de mille grains de blé.

En continuant de réunir ainsi, dix par dix, les tas de l'ordre le plus élevé, pour en former de nouveau d'un ordre supérieur, et en notant chaque fois le nombre des tas restant du premier de ces deux ordres, on parviendra finalement à des tas de l'autre ordre tellement considérables qu'ils se trouveront en moindre nombre que dix ; de sorte qu'il deviendra impossible de pousser l'opération plus avant. Autant pour en finir que pour fixer les idées, supposons qu'il en arrive ainsi pour les tas de mille grains de blé, et que ces tas soient seulement au nombre de *six*, on écrira, par abréviation, ( 6 mille ), que l'on placera à la droite ou à la gauche des trois nombres déjà écrits ; et le problème sera ainsi résolu.

On pourra donc écrire le nombre de grains de blé qu'il s'agissait d'exprimer en chiffres de la manière suivante :

6.mil. 4.cent. 7.dix. 3.unit.

et l'on conçoit que, tant qu'on fera accompagner ainsi chaque chiffre du nom des unités dont il sera l'expression, on pourra, sans craindre aucun équivoque, se permettre toutes sortes d'inversions dans l'arrangement des chiffres, comme on s'en permet dans la succession des mots de la plupart de nos langues. Toutefois, comme l'ordre plaît naturellement à l'esprit, parce qu'il facilite les comparaisons et les recherches, on jugera convenable d'écrire constamment les unités des divers ordres des plus petites aux plus grandes ou des plus grandes aux plus petites. Or, comme ce sont les plus grandes qui nous intéressent plus spécialement, dans notre manière de lire de gauche à droite, on s'arrêtera de préférence au dernier de ces deux partis.

Tel devait être, à peu près, le système de numération indien sous sa forme première, et, sans doute, pendant un temps plus ou moins long, on aura constamment accompagné chaque chiffre du nom de l'espèce particulière d'unités collectives qu'il représentait ; et c'est ainsi que nous-mêmes nous écrivons communément

$$6.^{\text{tois.}}\quad 4.^{\text{pi.}}\quad 7.^{\text{po.}}\quad 3.^{\text{lig.}}$$

Mais, de même que les arpenteurs de profession se dispensent souvent, pour leur propre usage, de ces sortes d'indications, attendu qu'ils savent très-bien que le premier nombre qui est écrit à droite exprime des lignes, et que les suivans expriment, tour à tour, des pouces, des pieds et des toises, on peut conjecturer, avec vraisemblance, que ceux qui, par état, avaient beaucoup de nombres à écrire, en auront usé de la même manière, et que, dans la seule vue d'abréger, et sans prétendre aucunement faire une découverte, ils se seront dispensés, peu à peu, d'écrire les noms des divers ordres d'unités, en remarquant que ces noms se trouvent suffisamment indiqués par le rang des chiffres destinés à en indiquer le nombre ; de sorte qu'au lieu de

6.mil. 4.cent. 7.diz. 3.unit.

ils auront écrit, comme le font souvent les arpenteurs,

6—4—7—3 .

Mais ce que ne sauraient faire les arpenteurs, qui rencontrent souvent des nombres de pieds, de pouces et de lignes exprimés par plusieurs chiffres, les calculateurs indiens, dans la seule vue de ménager le terrein, auront peu à peu supprimé les barres entre les chiffres, et auront écrit plus simplement

6473 .

Il est pourtant un cas, que nous n'avons pas mentionné, où cette manière abrégée d'écrire les nombres ne pourrait être mise en usage si l'on n'opposait quelque correctif à l'équivoque qui en pourrait résulter. Il peut bien se faire qu'un nombre ne contienne pas d'unités de certains ordres, inférieurs à l'ordre le plus élevé des unités qui en font partie. Un nombre peut, par exemple, renfermer seulement 6 mille, 7 dizaines, et 3 unités. Tant qu'on accompagnera chaque chiffre du nom de l'ordre d'unités qu'il exprime, cela sera tout à fait sans difficulté, et l'on pourra écrire

6.mil. 7.diz. 3.unit.

comme un arpenteur écrirait

$$6.^{\text{toi.}} \quad 7.^{\text{pou.}} \quad 3.^{\text{lig.}}$$

Mais si l'on supprime les indices et qu'on rapproche les chiffres, le 6 ne se trouvant plus alors qu'au troisième rang sera pris pour des centaines. Ce serait un mauvais moyen de parer à cet inconvénient que de laisser vide la place des centaines, et d'écrire

$$6 \quad 73 \;;$$

car, dans un écriture rapide, on risquerait souvent de laisser trop ou trop peu d'espace ; de sorte qu'on serait souvent en doute s'il manque ou s'il ne manque pas d'unités collectives intermédiaires, et combien il en manque consécutivement ; à quoi on peut ajouter encore que ce moyen ne pourrait être appliqué lorsque les unités collectives qui manqueraient seraient celles des derniers ordres à droite.

Il a donc dû paraître incomparablement plus commode et plus sûr d'instituer un chiffre qui fût le représentant de *rien*, et d'écrire ce chiffre dans tous les rangs, qu'autrement il aurait fallu laisser vides. C'est, en effet, le parti qu'on a pris ; ce chiffre est le 0 qui se prononce *zéro*, et qui, pendant long-temps, portait seul le nom de *chiffre*. On écrit donc

$$6073 \,,$$

pour peindre aux yeux le nombre dont il était question tout à l'heure.

Telle est la numération écrite généralement en usage aujourd'hui dans tout le monde civilisé ; et voilà par quelle suite d'essais et de perfectionnemens successifs on aurait pu y être fort naturellement conduit, sans que de grands efforts d'intelligence eussent dû être nécessaires pour y parvenir (*).

Nous nous trouvons présentement, par rapport à la numération écrite, à peu près dans le cas où nous aurions été si, comme nous le supposions tantôt, on avait institué un chiffre particulier pour représenter chacun des nombres naturels. A quelque multitude de chiffres qu'il nous faille recourir, en effet, pour écrire un nombre donné, suivant le système auquel nous venons de nous arrêter, rien ne nous empêche de considérer cet ensemble de caractères comme un caractère unique, dont les divers chiffres qui le compose sont les élémens. Mais nous avons ici l'avantage que ces caractères composés, bien qu'en nombre illimité, sont assujétis dans leur tracé à des règles tellement précises, tellement uniformes qu'on peut se dispenser d'en for-

---

(*) C'est, ce me semble, un devoir rigoureux pour celui qui enseigne, non seulement d'expliquer de quelle manière on a pu être conduit à chaque découverte, mais encore de présenter de préference à ceux à qui il s'adresse, parmi toutes les manières dont une découverte aurait pu être faite, celle qui semble avoir dû exiger le moins d'efforts de la part de l'intelligence. Cela fait prendre courage à ceux qui s'instruisent et les accoutume, en même temps, à bien conduire leur esprit dans les recherches auxquelles ils peuvent être appelés. Pour qui considérerait, par exemple, l'arithmétique comme sortie en entier et tout d'un jet d'une même tête, l'inventeur semblerait avoir dû posséder des facultés surhumaines, et c'est l'idée que je m'en étais faite moi-même la première fois que je l'ai apprise. Le comble de la perfection de son enseignement consiste à ce que celui qui l'étudie puisse se persuader que, pour peu qu'il eût voulu y réfléchir sérieusement, il en aurait découvert de lui-même tous les divers procédés.

mer à l'avanae le tableau général, attendu que l'un quelconque étant donné, on saura toujours positivement de quelle manière devra être figuré celui qui le précédera ou le suivra immédiatement.

On peut dire exactement la même chose de notre écriture vulgaire. Rien n'empêche, en effet, de considérer tous les mots du vocabulaire d'une langue comme autant de caractères composés ; et il sera vrai alors de dire qu'une langue a autant de lettres qu'elle a de mots. C'est même là ce qui arrive communément dans une lecture rapide où nous nous arrêtons qu'à la physionomie générale des mots ; et cela à tel point que certains mots peuvent manquer d'une lettre, d'autres en avoir une de trop, ou bien encore contenir une lettre au lieu d'une autre, sans que cela nous empêche de les reconnaître, et quelquefois même sans que nous y fassions la moindre attention.

Aujourd'hui nos chiffres

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

au nombre de *dix*, lorsqu'on y comprend le zéro, n'ont aucun rapport naturel avec les nombres qu'ils sont destinés à représenter, et ce sont de purs *signes d'institution* qu'on ne peut, qu'en l'apprenant d'autrui, et par un pur effort de la mémoire, lier aux idées qu'ils sont déstinés à rappeler ; mais il n'en dût pas être de même dans l'origine, et il est même présumable que, si l'inventeur de ces chiffres leur eût donné, dès l'abord, la figure qu'ils ont aujourd'hui, il n'aurait jamais réussi à les faire admettre. Par une bizarrerie assez remarquable il arrive, en effet, que, bien qu'aujourd'hui la presque totalité des signes dont se composent nos langues, soit écrites, soit parlées, soient des signes purement conventionnels, n'ayant aucun rapport naturel avec les objets ou les idées qu'ils sont destinés à représenter, nous nous révolterions néanmoins contre quelqu'un qui nous proposerait l'usage d'un signe nouveau, dont le choix n'aurait d'autre motif que sa volonté, tant l'arbitraire nous déplaît sous quelque forme qu'il se produise.

Aussi, en remontant, par les manuscrits, jusqu'à l'invention première de nos chiffres arabes, trouve-t-on que tels que nous les employons aujourd'hui, ces chiffres, comme tous les autres signes d'institution, ne sont que le produit des dégradations qu'ont subi successivement d'autres signes d'abord très-naturels, c'est-à-dire des signes qui, dans la pensée des inventeurs, avaient une liaison étroite avec les idées dont ils étaient le rappel. On conçoit que les mêmes recherches n'ont pu être tentées par rapport aux noms de ces chiffres, attendu que les mots sont des *signes fugitifs* dont on ne saurait suivre la trace, comme on le fait des *signes permanens*, et d'ailleurs ces mots, étant employés par les classes même les plus grossières de la société, ont dû s'altérer d'une manière beaucoup plus rapide. Nous nous bornerons donc à remarquer à ce sujet que, si l'on en excepte les mots *quatre* et *zéro*, les noms de tous nos chiffres sont d'une seule syllabe, comme il convient pour des mots qui doivent être d'un emploi fréquent.

Venons présentement à la numération parlée, et reprenons de nouveau le nombre

$$6473\ ;$$

on pourrait fort bien l'énoncer ainsi : *six unités du quatrième ordre, quatre du troisième, sept du second et trois du premier*, et en user de même pour tout autre nombre, ce qui n'exigerait la création d'aucun mot nouveau ; mais nous avons déjà vu que, pour exprimer les unités du second, du troisième et du quatrième ordres on avait inventé, sans doute pour abréger le langage, les mots *dizaine* ou *dix*, *centaine* ou *cent* et *mille* ; et on a également créé des mots pour exprimer les unités des ordres supérieurs. A la vérité il résulte de là que, pour pouvoir nommer tous les nombres, il faudrait créer une infinité de mots; mais on doit remarquer, d'une part, que les besoins de la société, même la plus avancée, exigent rarement l'emploi des nombres composés d'une grande multitude de chiffres, et, d'une autre, que, quand cela arrive quelquefois, on se contente d'écrire les nombres sans songer à les énoncer dans le discours. Nous allons voir, au surplus, qu'en formant la nomenclature des unités des différens ordres, on a cherché à faire quelque économie sur la création des mots.

Nous venons de voir que, dans le système de numération en usage, les unités des quatre premiers ordres ont reçu, des plus petites aux plus grandes, ou de droite à gauche, les dénominations d'*unités*, *dizaines*, *centaines*, *mille*. Ces dénominations n'ont, comme on le voit, aucune analogie ni entre elles ni avec le rang des unités qu'elles expriment. Ce sont de purs signes d'institution, ne représentant les idées signifiées qu'en vertu d'une convention tout à fait arbitraire.

Si l'on eût voulu continuer sur le même plan, il aurait fallu créer, pour les unités des ordres de plus en plus élevés, des dénominations également arbitraires et indépendantes entre elles, ce qui aurait surchargé la mémoire d'autant de noms nouveaux qu'on aurait eu d'ordres d'unités à considérer. Pour éviter cet embarras, on a eu recours à un expédient qu'il convient de remarquer avec quelque attention, parce qu'on peut user d'une ressource analogue toutes les fois qu'on a des nomenclatures à créer, ce qui arrive assez fréquemment dans les sciences.

On a donc considéré que, puisque les unités du cinquième ordre étaient dix fois plus grandes que les milles ou unités du quatrième, on pouvait fort bien les appeler des *dizaines de mille*, tout comme celles du second ordre sont des *dizaines d'unités*. On a considéré pareillement que, puisque les unités du sixième ordre étaient dix fois dix fois, c'est-à-dire, cent fois plus grande que les milles, on pouvait fort bien les appeler des *centaines de mille*, tout comme les unités du troisième ordre sont des *centaines d'unités*.

Quant aux unités du septième ordre, on leur a donné un nom tout à fait nouveau ; on les a appelées des *millions ;* considérant ensuite que celles des huitième et neuvième ordres sont exactement, par rapport à celles-là, ce que sont celles des cinquième et sixième, par rapport à celles du quatrième, ou encore ce que sont celles du second et du troisième, par rapport à celles du premier, on les a appelées respectivement des *dizaines de millions* et des *centaines de millions*. Quant aux unités du dixième ordre, on a créé pour elles une dénomination propre, on les a appelées des *billions*. Ce sont aussi ce que les financiers appellent des *milliards*.

On a continué ainsi à n'introduire une dénomination nouvelle que de trois en trois ordres, en donnant constamment aux unités des deux ordres immédiatement supérieurs les noms de dizaines et de centaines de cet ordre ; de sorte que, pour former les noms de tous les ordres d'unités, il suffit seulement de connaître les mots *dizaine* et *centaine*, et de connaître en outre, suivant leurs rangs, les dénominations indépendantes, lesquelles sont :

*Unités*, *milles*, *millions*, *billions*, *trillions*, *quatrillions*, .... ;

sur quoi nous devons remarquer, en passant, que ces dénominations n'ont point été très-heureusement choisies. Les mots *billions*, *trillions*, *quatrillions*, ....... correspondent, en effet, aux noms de nombres *deux*, *trois*, *quatre*, ...... dont ils rappellent l'idée, tandis que ces mots ne sont point les *deuxième*, *troisième*, *quatrième*, ..... dénominations, mais bien les *quatrième*, *cinquième*, *sixième* ...... Toutefois, ces dénominations ainsi convenues, on sent que rien n'est plus facile que de former le tableau complet des noms successifs des différens ordres d'unités ; et l'on voit qu'au moyen de cette ingénieuse nomenclature, pour nommer et caractériser nettement des unités d'un grand nombre d'ordres différens, on n'a guère à employer qu'un nombre de mots trois fois moindre ; et tel est l'avantage que l'on trouve dans l'art de combiner méthodiquement quelques racines simples pour en former des mots composés.

Pour énoncer, dans le discours, un nombre écrit en chiffres, on aurait pu convenir, comme nous le disions tout à l'heure, d'énoncer tour à tour, en allant de gauche à droite, les noms des chiffres qui le composent, en ajoutant, à la suite de chacun, le nom de l'espèce des unités qu'il exprime; mais cette manière de lire les nombres aurait été excessivement longue et fastidieuse, et on a très-adroitement profité de l'ordre introduit dans la nomenclature des unités des différentes classes pour en rendre la lecture beaucoup plus concise, et pour réduire celle des nombres qui ont plus de trois chiffres à la lecture d'une suite de nombres de trois chiffres seulement. Expliquons donc, en premier lieu, comment on lit ces derniers, et faisons remarquer surtout les irrégularités, malheureusement trop nombreuses, que l'usage a introduites dans leur énoncé.

D'abord les nombres qui s'écrivent

$$100\ ,\quad 200\ ,\quad 300\ ,\quad 400\ ,\quad \ldots\ldots\quad 900\ ;$$

s'énoncent

*Cent*, *deux cents*, *trois cents*, *quatre cents*, ....... *neuf cents.*

En suivant l'analogie, les nombres qui s'écrivent

$$10\ ,\quad 20\ ,\quad 30\ ,\quad 40\ ,\quad \ldots\ldots\quad 90\ ,$$

devraient s'énoncer

*Dix*, *deux dix*, *trois dix*, *quatre dix*, ..... *neuf dix* ;

mais le premier seul est soumis à cette règle ; les cinq qui le suivent immédiatement s'énoncent

*Vingt* , *trente* , *quarante* , *cinquante* , *soixante* ;

dénominations qui seraient passablement régulières si , comme on l'a proposé , on remplaçait le mot *vingt* par le mot *duante*.

Pour continuer sur le même plan , les nombres qui s'écrivent

70 , 80 , 90

devraient s'énoncer

*Septante* , *huitante* , *nonante* ;

c'est ainsi , en effet , que le peuple les énonce dans nos contrées méridionales , et que nous conseillons au lecteur de les énoncer comme nous le faisons nous-même ; mais, dans les salons du midi et dans tout le nord de la France , on a trouvé , et il serait assez difficile de dire pourquoi , qu'il était de plus bel air de dire

*Soixante et dix* , *quatre-vingts* , *quatre-vingt-dix* . (*)

Il est très-vrai que soixante , augmenté de dix , font septante ; mais quarante augmenté de dix font bien cinquante , et pourtant on n'a jamais songé à remplacer cette dernière dénomination par l'expression *quarante et dix*. Il est encore vrai que *quatre-vingts* ou quatre fois vingt font huitante ; mais *trois vingts* font aussi *soixante*; l'on n'a pourtant jamais songé à remplacer cette dernière locution par la première. On comprend d'après cela que l'expression *quatre-vingt-dix* est encore plus barbare que les deux au-

---

(*) La bonne société dit pourtant , en parlant de la Bible , *la version des septante*.

tres (*). Après avoir fait de la *dizaine* une unité collective, on ne voit pas trop pourquoi nos pères en ont été faire une autre de la *vingtaine*, et se sont avisés de la combiner avec celle-là. C'est pourtant là ce qui est arrivé ; voilà comment nous trouvons dans nos vieux auteurs *six vingts* pour *cent vingt ;* et voilà encore comment, aujourd'hui même, un établissement de bienfaisance fondé à Paris en faveur de trois cens aveugles, conserve la dénomination des *quinze-vingt*, qu'on n'a pourtant jamais songé à appliquer aux braves compagnons de Léonidas. Il est certain que, quand de dessein prémédité on aurait résolu d'embrouiller une langue qui pourrait être si simple et si régulière, on aurait pu s'y prendre d'une manière plus heureuse.

Il serait bien temps enfin de faire disparaître des bizarreries aussi choquantes. L'Académie française, souveraine législatrice du langage vulgaire, n'a jamais prétendu exercer sa suprématie sur la langue de l'histoire naturelle, de la physique, de la chimie, ni même de la géométrie ; elle a reçu humblement, et enregistré dans son code, ces langues diverses, telles qu'il a plu aux savans de les lui présenter ; nous ne voyons donc pas pourquoi elle se croirait plus compétente à l'égard de la langue des nombres, qui est aussi une langue scientifique. Que, si elle ne veut point rayer absolument de son Dictionnaire les mots *soixante et dix*, *quatre-vingts* et *quatre-vingt-dix*, nous désirerions du moins que, gardant

(*) Si l'on dicte lentement le nombre *quatre-vingt-dix* à quelqu'un d'un peu prompt, son oreille étant d'abord frappée du son *quatre*, il écrira tout naturellement un 4 ; le son *vingt* qui se fera entendre ensuite, l'avertira qu'il faut changer ce 4 en un 8 ; enfin, en entendant le son *dix*, il reconnaîtra qu'il faut corriger une seconde fois et remplacer de nouveau le 8 par un 9. Si, en faisant une addition, on trouve septante pour la somme d'une colonne, et qu'on se serve de la locution *soixante et dix*, on sera souvent tenté de retenir *six* au lieu de *sept*, pour la colonne suivante.

un *juste milieu*, elle voulut bien, tout au moins, déclarer que les mots *septante*, *huitante*, *nonante* sont également de recette.

Toutefois nous n'hésiterions pas à leur préférer les expressions *deux dix*, *trois dix*, *quatre dix*, .... De même, en effet, qu'un enfant en bas âge ne se fait jamais expliquer, par exemple, ce que c'est que *quatre cens*, il ne s'aviserait jamais de demander davantage ce que c'est que *quatre dix*; la dénomination lui indiquant la chose d'une manière assez claire; tandis qu'on est obligé de lui expliquer que *quarante* est le nom de la collection de quatre dixaines. Un enfant qui sait que cinq et trois font huit ne demandera jamais non plus combien valent ensemble cinq cens et trois cens, parce qu'il verra évidemment de lui-même que cela fait huit cens; il ne demandera pas davantage combien font ensemble cinq dix et trois dix, tandis qu'il sera, au contraire, très-fondé à demander combien valent ensemble cinquante et trente; parce qu'ici les mots ne rendent les idées que d'une manière imparfaite. D'ailleurs, l'ordre et l'uniformité plaisent et attachent naturellement, parce qu'ils offrent plus aisément prise à l'action de la mémoire et à celle du jugement, et de là sans doute ce penchant des enfans en bas âge à faire tous les verbes réguliers; or, comment veut-on qu'ils prennent quelque goût pour les spéculations numériques, eux chez qui l'étude de la numération parlée doit nécessairement précéder celle de la numération écrite, si cette numération parlée présente, dès le début, des anomalies dont il est impossible de se rendre compte? Cependant telle est l'indifférence générale du public sur toutes ces choses, tel est le petit nombre des hommes qui en sentent l'importance que nous ne serions pas surpris de voir beaucoup de lecteurs nous reprocher d'y avoir beaucoup trop insisté.

Pour leur prouver que nous sommes peu disposés à nous corriger, signalons encore une dernière irrégularité. De même que les nombres qui s'écrivent

39 , 38 , 37 ,

s'énoncent *trente-neuf*, *trente-huit* et *trente-sept ;* les nombres qui s'écrivent

19 , 18 , 17 ,

s'énoncent *dix-neuf*, *dix-huit* et *dix-sept* ; de même donc que les nombres qui s'écrivent

36 , 35 , 34 , 33 , 32 , 31 ,

s'énoncent *trente-six* , *trente-cinq* , *trente-quatre* , *trente-trois* , *trente-deux* et *trente-un* ; les nombres qu'on écrit

16 , 15 , 14 , 13 , 12 , 11 ,

devraient s'énoncer *dix six* , *dix cinq* , *dix quatre*, *dix trois* , *dix deux* et *dix un* ; cependant l'usage veut qu'on les énonce *seize* , *quinze*, *quatorze* , *treize* , *douze* et *onze*.

Ces anomalies ne portent heureusement que sur la numération parlée et non sur la numération écrite qui , comme nous l'avons déjà fait observer , est d'une régularité parfaite. Cela s'explique facilement si l'on considère que la numération écrite n'est guère employée que par des hommes qui ont déjà acquis assez d'instruction pour sentir tout le prix de l'uniformité, et pour ne point y porter atteinte partout où ils la trouvent établie ; tandis qu'au contraire la numération parlée est à l'usage de tout le monde , des ignorans aussi bien que des savans. C'est la même raison , sans doute , qui fait que la langue parlée des plus petits nombres , à l'usage de plus de gens , et des gens des plus basses classes , est plus altérée que celle des plus grands. C'est sans doute la même cause qui fait que, dans toutes les langues , les verbes dont l'emploi est le plus fréquent, et notamment les verbes auxiliaires sont les plus irréguliers de tous.

Du moment qu'on sait lire couramment les nombres qui n'ont pas plus de trois chiffres, la lecture des nombres écrits avec un grand nombre de chiffres peut être réduite à la règle suivante : *Partagez, par la pensée, le nombre proposé en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche, sauf la dernière à gauche qui pourra fort bien en avoir moins ; donnez ensuite successivement aux tranches, toujours en partant de la droite, les noms suivans :* unités, milles, millions, billions, trillions, ..... ; *alors, en partant de la gauche, énoncez chaque tranche comme si c'etait un nombre isolé d'un, de deux ou de trois chiffres, et ajoutez à la fin de l'enoncé le nom que vous aviez d'abord donné à la tranche.*

Nous pouvons dire ici de la numération parlée ce que nous avons dit plus haut de la numération écrite. Rien ne nous empèche de considérer le nom de chacun des nombres naturels comme un mot unique, mais composé ; et alors il sera vrai de dire que nous avons inventé autant de mots différens qu'il y a de nombres à nommer ; mais, par l'effet de l'art avec lequel ces mots sont composés, il arrive que nous n'avons pas besoin de les apprendre tous à l'avance pour être en état de prononcer chacun d'eux en particulier, lorsque le besoin l'exige.

Il y a dans ce système, deux choses de pures conventions que l'on pourrait fort bien y changer sans nuire, en aucune sorte, à sa régularité. D'abord on pourrait, réunir plus ou moins de dix unités de chaque ordre pour en composer une de l'ordre immédiatement supérieur, ensuite on pourrait dans la nomenclature des unités des différens ordres, introduire une dénomination nouvelle de deux en deux ou de quatre en quatre ordres, tout aussi bien que de trois en trois. On ne voit pas trop, sur ce dernier point, ce qui a pu déterminer le choix du nombre de trois, quant au premier ; le choix du nombre dix est évidemment le résultat de notre organisation, c'est-à-dire, qu'il a pour cause le nombre de nos doigts qui ont été, sans doute, les premiers instrumens dont nous nous sommes aidés pour compter. Aussi voit-on le nombre dix jouer un rôle plus ou moins important dans les systèmes de numération les plus divers, dans ceux mêmes des peuples qui jamais n'ont eu entre eux aucune communication.

Il n'en est pas moins vrai qu'en réunissant plus ou moins de dix unités de chaque ordre dans une unité de l'ordre immédiatement supérieur, on peut, à l'imitation de notre système de numération, en concevoir tant d'autres qu'on voudra, tout aussi réguliers que celui-là, dont plusieurs n'auraient rien à lui céder du côté des avantages et dont quelques-uns même pourraient lui être préférables à certains égards. Nous n'avons donc pas seulement en mains une langue unique, mais bien une infinité de langues propres à exprimer uniformément tous les nombres. Dans chaque système de numération, ainsi calqué sur le nôtre, le nombre qui exprime combien on réunit d'unités de chaque ordre, pour en faire une de l'ordre immédiatement supérieur, est ce qu'on appelle la *base* du système; et on dit, en conséquence, que notre système de numération a dix pour base. Il est aisé de voir que chacun de ces systèmes exigera l'usage d'autant de chiffres, y compris le zéro, que sa base contiendra d'unités. Si donc sa base est moindre que dix, nos chiffres n'y seront pas tous employés; si, au contraire, elle est plus grande, il exigera l'introduction de nouveaux chiffres. Il paraît que, dans une antiquité très-reculée, le système *binaire*, c'est-à-dire, celui qui a *deux* pour base, et qui n'exige conséquemment que l'emploi des chiffres 0 et 1, était connu et pratiqué dans l'empire de la Chine.

Il convient de remarquer ici que notre manière de lire les nombres en les partageant en tranches de trois chiffres revient exactement à considérer tous les nombres inférieurs à mille, sauf à écrire un ou deux zéros à la gauche de ceux qui n'ont que deux ou un chiffre, comme les chiffres d'un système de numération qui a mille pour base, et dont les unités des différens ordres sont les tranches successives de trois chiffres.

Dans le système de numération qui aurait *un* pour base, les unités des différens ordres auraient toutes la même valeur, et conséquemment ce système ne serait autre que le premier des deux systèmes extrêmes de numération que nous nous sommes vus contraints de rejeter au commencement de cette dissertation. On pourrait fort bien y faire usage du zéro, et même le placer partout et autant de fois qu'on le voudrait, mais il n'y produirait qu'un encombrement superflu.

Dans le système de numération qui aurait une base infinie, il faudrait une infinité d'unités de chaque ordre pour en former une de l'ordre immédiatement supérieur; tous les nombres finis n'exprimeraient donc que des unités du premier ordre, et seraient conséquemment des nombres d'un seul chiffre; ce système exigerait donc l'emploi d'une infinité de chiffres différens; ce serait donc le dernier des deux systèmes extrêmes que leur incommodité nous avait d'abord conduit à rejeter. Celui-ci n'aurait pas à faire usage du zéro, ou plutôt l'unité suivie d'un zéro y serait le symbole de l'infini.

Tous les autres systèmes de numération, à base plus ou moins grande, se trouvent compris entre ces deux systèmes extrêmes, et le nôtre occupe conséquemment le dixième rang dans la série. On sent aisément que l'un quelconque des systèmes de numération qui s'y trouvent compris participera plus ou moins des avantages et des inconvéniens de l'un ou de l'autre des deux systèmes extrêmes, à mesure qu'il s'en rapprochera davantage.

Nous avons essayé, dans ce qui précède, d'écrire le *roman* de notre numération, roman auquel nous nous sommes attachés principalement à donner autant de vraisemblance qu'il nous a été possible de le faire; ceux de nos lecteurs qui désireront des détails sur son *histoire* pourront consulter, entr'autres, un savant mémoire allemand de M. le baron Alex. de HUMBOLD, inséré à la pag. 205 du IV.me volume du *Journal de Mathématiques* de M. CRELLE, mémoire dont nous pourrons quelque jour publier une traduction dans le présent recueil.

FIN DU VINGT-UNIÈME VOLUME.

# TABLE

## *Des matières contenues dans le XXI.me volume des* Annales.

### ANALYSE ALGÉBRIQUE.



### ANALYSE APPLIQUÉE.



### ANALYSE ÉLÉMENTAIRE.



### ANALYSE INDÉTERMINÉE.



### ANALYSE TRANSCENDANTE.



### ARITHMÉTIQUE.

## ARITHMÉTIQUE SOCIALE.



## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.



## GÉOMÉTRIE DES COURBES.



## GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.



## GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.



## PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

## CORRESPONDANCE

*Entre les* questions proposées *et les* questions résolues.

# ERRATA

## *Pour le tome vingt-unième des* Annales.

PAGE 2, ligne 16 — placez une virgule après $r$.

Pag. 28, lig. dernière — *supprimez* en.

Pag. 29, lig. 12 — *placez une virgule après* normale.

lig. 13 — *placez une virgule après* lieu.

Pag. 63, lig. 5 — $D_{2m\ 1}$; lisez : $D_{2m-1}$.

$D_{3m-2}$; lisez : $D_{3m-4}$.

$D_{3m-1}$; lisez : $D_{3m-3}$.

Pag. 71, lig. 7 — après *arcs*; ajoutez : *de grands cercles*.

Pag. 174 — L'équation (a) est inexacte, et doit être remplacée par celle-ci :

$$\omega\frac{\mathrm{d}k\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}x}=\gamma\varepsilon u\ ;$$

laquelle devient, en développant son premier membre et divisant par $\omega$,

$$k\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\gamma\frac{\varepsilon}{\omega}u\,.$$

Il n'en est pas moins vrai qu'on peut ramener les calculs à intégrer l'équation (b) ; car, en posant dans l'autre $u=\dfrac{v}{\sqrt{k}}$, c'est à cette forme qu'elle se réduit.

Pag. 175, — l'équation (c) doit être remplacée par celle-ci

$$c\omega\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}k\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}x}-\gamma\varepsilon u\quad .$$

Pag. 233, lig. 9 — placez avant le mot *tandis* la virgule qui le suit.

Pag. 236, lig. 7 et 8 — placez un signe + devant la première parenthèse.

Pag. 248, lig. 10, premier binôme — $\dfrac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}z'}$; lisez : $\dfrac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}$.

# LIVRES NOUVEAUX.

*Recherches de géométrie pure*, sur les lignes et surfaces du second degré, comprenant les principes des transformations polaires des coniques et des cônes du second degré, les propriétés générales des surfaces du second degré de révolution, quelques propriétés générales des cônes du second degré et une construction des directions des lignes de courbure des surfaces du second degré ; par M. **Chasles**. In-4.° de 80 pag., de l'imprimerie de M. *Hayez*, à Bruxelles.

Le mérite éminent des nombreux articles publiés par M. Chasles, soit dans la *Correspondance* de M. Hachette, soit dans le présent recueil, soit enfin dans la *Correspondance* de Bruxelles, nous paraît un titre suffisant de recommandation pour l'ouvrage que nous annonçons.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, c'est-à-dire, *Journal de Mathématiques pures et appliquées* ; par M. A. L. **Crelle**, membre du Conseil supérieur des bâtimens civil du royaume de Prusse. Tom. IV, 3.me et 4.me livraisons, et tom. V, 1.re livraison ; ensemble 300 pag., plus trois planches, chez *G. Reimer*, à Berlin.

Les articles dont se compose ces trois livraisons sont : de feu M. *Abel*, de Christiania (en français), Précis d'une théorie des fonctions elliptiques — de M. le *baron Alex. de Humbold*, un mémoire sur les systèmes de numération des différens peuples. — De M. *Gauss*, de Gottingue, sur un nouveau principe de mécanique. — De M. *Clausen*, d'Altona, divers théorèmes et sommation de diverses séries de fonctions circulaires. — De M. *Gudermann*, de Clèves, sur les fonctions exponentielles. — De M. *Scherk*, de Halle, sur les nombres de Bernouilli. — De M. *Crelle*, une démonstration nouvelle de la formule du binôme et une notice sur M. Abel. — De M. *Plucker*, de Bonn, sur les contacts des différens ordres. — De M. *Jacobi*, de Konisberg, sur les fonctions elliptiques. — De M. *Hill*, de Holm, un mémoire sur les séries, etc., etc.

# TABLE SOMMAIRE

*Des matières contenues dans cette livraison.*

# LIVRES NOUVEAUX.

*Rapport à l'Académie royale des sciences*, sur l'ouvrage de M. JACOBI, intitulé : *Fondamenta nova theoriæ functionum ellipticarum*, avec des notes ; par M. POISSON. In-4.° de 45 pag., imprimé par ordre de l'Académie ; chez *A. Firmin Didot*, imprimeur du Roi et de l'Institut, rue Jacob, n.° 24.

On prendra, dans ce rapport, une idée exacte de l'état présent de la théorie des transcendantes elliptiques et de ce qu'elle doit, en particulier, aux travaux de MM. Abel et Jacobi.

*Correspondance mathématique et physique* du Royaume des Pays-Bas ; par M. QUETELET, directeur de l'observatoire de Bruxelles, etc., etc. Tom. VI, 3.me, 4.me et 5.me livraisons ; ensemble 184 pag., in-8.°, plus deux planches ; chez M. *Hayez*, imprimeur de l'Académie, rue de la Montagne, n.° 10, à Bruxelles.

Les principaux articles mathématiques contenus dans ces trois livraisons sont, savoir ; de M. *Van Rees*, sur la convergence des séries et produits indéfinis, et sur l'analyse des sections angulaires. — De M. *R. Lobatto*, sur une question d'intérêt composé. — De M. *Roche*, sur diverses sortes de piles de boulets. — De M. *Weiler*, la solution d'un problème sur le contact des sphères. — De M. *Chasles*, sur la génération des focales, et sur diverses propriétés des surfaces du second degré. — De M. *Lévi*, sur une nouvelle manière de déterminer les pesanteurs spécifiques, et sur quelques propriétés des systèmes de forces. — De M. *Pagani*, sur l'intégration d'une équation aux différences partielles et sur d'autres sujets. — De M. *Obici*, sur le quadrilatère de moindre périmètre inscrit à un rectangle. — De M. le docteur *Reiss*, sur la surface enveloppe du plan de niveau d'un liquide contenu dans une boîte cubique mobile. — Etc., etc.

# TABLE SOMMAIRE

*Des matières contenues dans cette livraison.*

---

# LIVRES NOUVEAUX.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, c'est-à-dire, *Journal de Mathematiques pures et appliquées*; par M. A. L. CRELLE, membre du Conseil supérieur des bâtimens civils du Royaume de Prusse. Tom. VI.me, 1.re livraison, in-4.o de 106 pag, plus une planche. Chez Bachelier, à Paris.

Les principaux articles de cette livraison sont: de M. le professeur *Gudermann*, de Clèves, un mémoire très-étendu sur les fonctions hyperboliques équilatères, considérées comme les analogues des fonctions circulaires. — De MM. *Lamé* et *Clapeyron*, colonels du génie en Russie, deux mémoires (en français) l'un sur deux nouvelles formules analogues aux séries de *Taylor* et de *Maclaurin*, et l'autre sur le développement des fonctions suivant de séries de lignes trigonométriques d'arcs imaginaires. — De M. le professeur *Lehmann*, de Greifswalde, sur la théorie de la courbe tautochrone, traitée à la manière des anciens géomètres. — De M. le comte *Guillaume Libri*, de Florence, une note (en français) sur la discontinuité de la fonction $0^{0^x}$. — De feu M. *Abel*, de Christiania, une lettre à M. *Legendre* (en français), sur la théorie des fonctions elliptiques. — D'un *Abonné*, un mémoire sur la courbe de moindre périmètre sur une surface courbe, où l'auteur démontre que, si l'on circonscrit à la surface courbe une surface développable qui la touche suivant cette courbe de moindre périmètre, la courbe, devenue plane par le développement de la surface circonscrite, sera un arc de cercle. — De M. le docteur *Ferdinand Minding*, de Berlin, un mémoire sur les intégrales doubles. — De *divers auteurs*, la solution d'un grand nombre de problèmes proposés dans les précédentes livraisons du recueil, ou dans d'autres collections scientifiques.

# TABLE SOMMAIRE

*Des matières contenuès dans cette livraison.*

---

# TABLE SOMMAIRE

*Des matières contenues dans cette livraison.*

# LIVRES NOUVEAUX.

Journal für die reine und angewandte Mathematik; c'est-à-dire, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, par M. Crelle, etc. Tom. VI.me, 2.me et 3.me livraisons; ensemble 200 pages in-4.o, plus deux planches; chez *Bachelier*, à Paris.

Les principaux articles contenus dans ces deux livraisons sont: de M. *Plucker*, professeur à Bonn, sur un nouveau moyen d'exprimer les points et les courbes dans la géométrie analytique. — De M. le docteur *Stern*, de Gottingue, remarque de haute arithmétique. — De M. le docteur *Minding*, de Berlin, des remarques sur le développement des courbes tracées sur les surfaces. — De M. le P.r *Guderman*, de Clèves, une théorie des fonctions cylindrico-hyperboliques; sur l'analyse sphérique et sur les élémens de géométrie. — De M. *Jurgensen*, de Copenhague, des remarques (en français) sur une certaine tranformation des fonctions, fondée sur les racines de l'unité. — De M. le P.r *Möbius*, de Leipzic, des additions à la théorie des fractions continues, avec application à la dioptrique. — De M. *Köhlau*, officier prussien, la démonstration élémentaire d'une expression qui se rencontre dans le calcul différentiel. — De M. le professeur C. G. J. *Jacobi*, de Konisberg, De resolutione æquationum per series infinitas. — De M. *Th. Clausen*, de Munich, sur une quadrature mécanique et Alia solutio problematis a celeberrimo Gauss in opere *Demonstratio attractionis*, *quam*, etc., tractati. — De M. le docteur *Dietlein*, de Berlin, solution d'un problème de mécanique.

# TABLE SOMMAIRE

*Des matières contenues dans cette livraison.*

---



---

# LIVRES NOUVEAUX.

*Mémoire de géométrie pure* sur les propriétés générales des cônes du second degré; par M. CHASLES, correspondant de l'académie de Bruxelles, de la société philomatique de Paris, etc. In-4.° de 60 pag.; chez *Barchlier*, à Paris.

Dans un précédent mémoire annoncé dans notre livraison de juillet dernier, M. Chasles avait déjà démontré occasionnellement quelques propriétés des cônes du second degré, en les déduisant, comme conséquences, des principes qu'il avait établis sur les transformations polaires de ces cônes et des coniques.

Dans le présent mémoire, M. Chasles reprend ces mêmes recherches d'une manière plus large et plus directe, et parvient à un grand nombre de propriétés curieuses et non encore aperçues des cônes du second degré, en partant uniquement de ces deux propositions connues, savoir : 1.° que, dans tout cône du second degré, il existe trois axes conjugués rectangulaires; 2.° que tout cône du second degré peut, dans deux directions différentes, être coupé circulairement par un plan.

Ce mémoire, que le nom et le talent bien connus de l'auteur recommandent suffisamment, sera lu avec beaucoup d'intérêt par tous les amateurs de la belle géométrie.

# TABLE SOMMAIRE

*Des matières contenues dans cette livraison.*

# TABLE SOMMAIRE

*Des matières contenues dans cette livraison.*

---



---

## RÉCLAMATIONS.

J'ai cru devoir, à la pag. 18* du présent volume, témoigner à mes lecteurs l'extrême déplaisir que j'éprouvais d'avoir été entraînés, par des circonstances indépendantes de ma volonté, à leur présenter un mémoire dont la rédaction me paraissait extrêmement maussade, et tout à fait dépourvue de goût et de clarté.

Bien que cette manifestation de mon opinion sur le mérite *littéraire* d'un ouvrage que son auteur avait livré volontairement au jugement du public, soit tout à fait dans mon droit de journaliste, je n'en suis pas moins extrêmement peiné d'avoir été amené à faire quelque chose que je reconnais devoir être extrêmement désagréable à M. Liouville, dont je n'ai aucunement prétendu d'ailleurs contester le talent mathématique.

Ce qui me peine le plus encore, c'est que, comme je l'avais prévu, M. Liouville est un malade qui ne sent pas son mal. Il signale d'abord quelques erreurs dans les formules, erreurs que j'aurai soin de corriger dans l'errata du volume; il déclare n'avoir point revu avec assez de soin les articles 25 et 25, qu'alors il n'aurait pas dû m'envoyer; il suppose que je lui reproche de n'avoir point démontré les formules, très-connues, qu'il a empruntées à MM. Poisson et Fourier, tandis que mes critiques ne tombent réellement sur rien de tout cela, mais uniquement sur l'art de disposer et de rédiger, sur l'art d'éviter les alternatives de marche traînante et de sauts brusques, enfin sur ce je ne sais quoi presque indéfinissable qu'on a nommé *goût*, et au défaut duquel on s'expose infailliblement à ne point trouver de lecteurs.

---

A la pag. 118 du présent volume, j'ai reproché aux auteurs d'élémens de ne point donner de préceptes généraux pour réduire des fractions au même dénominateur de la manière la plus simple. M. Develey, professeur distingué à Lausanne, me fait observer, à ce sujet, que son *Arithmétique d'Emile*, qui a paru en 1823, et son *Algèbre d'Emile*, dont la dernière édition a paru en 1828, ne sont pas passibles de ce reproche, comme on peut le voir à la pag. 160 du premier de ces deux ouvrages et à la pag. 208 du second. C'est bien, je crois, ici le cas de dire : *l'exception prouve la règle.*

# TABLE SOMMAIRE

*Des matières contenues dans cette livraison.*

---

# LIVRES NOUVEAUX.

*Correspondance mathématique et physique* publiée par M. Quételet, directeur de l'Observatoire de Bruxelles, etc.; tom. VI, n.° 6, in-8.°, d'environ 60 pag., plus une planche. Chez M. *Hayez*, à Bruxelles.

Les principaux articles mathématiques contenus dans cette livraison, sont: Des considérations sur la figure du soleil, par M. *L. Thilo*. — Une lettre de M. le D.r *Reiss* sur quelques problèmes. — Un mémoire de M. *Boch* sur la multisection des angles. — La construction des cinq polyèdres réguliers, par M. *Horner*. — Une note sur la texture de la cornée transparente; par M. *Fohmann*. — Sur l'action réciproque entre un courant électrique et des aiguilles d'acier non aimantées; par M. *Gloesener*.

Journal für die reine un angewandte Mathematik; c'est-à-dire, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*; par M. A. L. Crelle, membre du Conseil supérieur des Bâtimens civils du royaume de Prusse. Tom. VI.me, quatrième livraison; in-4.° de plus de 100 pag., plus une planche; chez *Bachelier*, libraire, à Paris.

Les principaux articles dont se compose cette livraison sont: Suite de la théorie des fonctions cylindrico-hyperboliques; par M. *Gudermann*. — De functionibus ellipticis commentatio altera; par M. *C. G. J. Jacobi*. — Solution de divers problèmes de M. *Steiner*; par M. *Th. Clausen*. — Sur la détermination des orbites des corps célestes; par le même.

# TABLE SOMMAIRE

*Des matières contenues dans cette livraison.*

# LIVRES NOUVEAUX.

Journal für die reine und angewandte Mathematik ; *c'est-à-dire* : Journal de Mathématiques pures et appliquées; par M. CRELLE, membre du Conseil supérieur des bâtimens civils du royaume de Prusse. Tom. VII, 1.re livraison, in-4.° d'environ 100 pag., chez *Bachelier*, à Paris.

Les principaux articles contenus dans cette livraison sont: de M.lle *Sophie Germain*, de Paris, un mémoire (en français) sur la courbe des surfaces. — De M. *Th. Clausen*, de Munich, les solutions de deux problèmes, l'un d'arithmétique et l'autre de géométrie, et la démonstration d'un théorème de géométrie, ainsi que la solution d'un problème relatif aux sections coniques. — De M. *C. G. J. Jacobi*, de Konisberg, une note (en français) sur une nouvelle application de l'analyse des fonctions elliptiques à l'algèbre. — De M. *C. J. D Hill*, de Londres, additamenta ad conatum, casum irreducibilem solvendi. — De M. *G. Libri*, de Florence, un mémoire (en français) sur quelques formules générales d'analyse. — De M. *L. Feldt*, de Braunsberg, une démonstration nouvelle des formules de trigonométrie sphérique de M. *Gauss*. — De M. *Guderman*, de Clèves, sur les fonctions hyperboliques équilatérales, avec des tables.

Reflections on the decline of science in England, and on some of its causes; *c'est-à-dire* : Réflexions sur la décadence des sciences en Angleterre et sur quelques-unes de ses causes; par M. Ch. BABLAGE, professeur de mathématiques à l'Université de Cambridge et membre de la Société royale de Londres. In-8° de plus de 200 pag. (Londres, 1830).

Je n'ai pu encore que jeter un coup d'œil rapide sur cet ouvrage; mais c'en est assez pour que je puisse en recommander la lecture comme très-propre à nous consoler, nous autres Français, de quelques abus qui règnent dans nos écoles et dans nos corporations savantes. Peut-être, au surplus, M. Bablage aura-t-il pensé que, pour mieux faire sentir l'urgence du remède, il pouvait être bon d'exagérer la peinture du mal; car, chez une nation qui compte encore des hommes de son mérite, le feu des sciences ne saurait être tout à fait éteint.

# TABLE SOMMAIRE

*Des matières contenues dans cette livraison.*

---



---

# LIVRES NOUVEAUX.

*Histoire des recherches sur la quadrature du cercle*, avec une addition concernant les problèmes de la duplication du cube et de la trisection de l'angle ; par MONTUCLA. Nouvelle édition revue et corrigée, avec des notes, in-8° de 300 pag., plus deux planches ; chez *Bachelier*, à Paris.

Cet intéressant ouvrage manquait à notre librairie scientifique ; la première édition, qui a paru en 1754, étant depuis long-temps épuisée, l'éditeur en a revu, corrigé et éclairé soigneusement le texte auquel il a ajouté quelques notes qui tiennent l'ouvrage au niveau de l'état actuel de la science. L'édition est du reste très-élégamment imprimée.

Une *Histoire des recherches sur le mouvement perpétuel* est encore à écrire, et pourrait être convenablement placée dans nos bibliothèques à côté de l'ouvrage que nous annonçons.

*Recherches sur la loi de la croissance de l'homme* ; par M. QUETELET, directeur de l'observatoire de Bruxelles, etc. In-4°, de 32 pag., plus un tableau et une planche, chez *Hayez*, à Bruxelles.

La taille et le poids d'un individu sont des fonctions de son âge que l'on peut se proposer de déterminer, si non *à priori*, du moins empiriquement, par des expériences, et dont la connaissance peut conduire à quelques conséquences utiles ou tout au moins curieuses. J'ai long-temps désiré de me trouver dans une position favorable aux recherches de ce genre, mais je n'en ai jamais rencontré l'occasion.

Dans le mémoire que j'annonce ici, M. Quetelet s'occupe de la relation entre l'âge et la taille, considérée dans chacun des deux sexes en particulier. Les réflexions générales par lesquelles il fait précéder l'exposé des faits, et les conséquences qu'il en déduit, donnent beaucoup d'intérêt à cette publication.

# TABLE SOMMAIRE

*Des matières contenues dans cette livraison.*

# LIVRES NOUVEAUX.

*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, c'est-à-dire, Journal de Mathématiques pures et appliquées ; recueil périodique publié par M. A. L. Crelle, membre du Conseil supérieur des Bâtimens civils du royaume de Prusse. Tom. VII.me, 2.me livraison, in-4.o de 100 pag., plus une planche; chez Bachelier, à Paris.

Les divers articles dont se compose cette livraison sont : de M. *Th. Clausen*, de Munich, une nouvelle manière de déterminer la hauteur du pôle ; sur les équations de condition servant à corriger les élémens des planètes et des comètes; sur la sommation de deux séries; solution d'un problème d'astronomie. — De M. le comte *Guillaume Libri*, de Florence, un mémoire ( en français ) sur la théorie de la chaleur. — De M. le docteur *Ferd. Minding*, *Observatio pertinens ad solutionem æquationum indeterminatarum secundi gradus.* — De MM. les colonels du génie *Lamé* et *Clapeyron*, un mémoire ( en français ) sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes. — De M. le baron *Poisson*, l'introduction ( en français ) d'une nouvelle théorie de l'action capillaire. — De M. le professeur *Gudermann* de Clèves, des tables des fonctions circulaires hyperboliques. — De M.lle *Sophie Germain*, de Paris, une note ( en français ) sur une question d'analyse.

# TABLE SOMMAIRE

*Des matières contenues dans cette livraison.*

---