LE BARBIER

Questions résolues. Solution des deux problèmes de géométrie énoncés à la pag. 72 du présent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 21 (1830-1831), p. 184-187
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1830-1831__21__184_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des deux problèmes de géométrie énoncés à la pag. 72 du présent volume;

Par M. Le Barbier.

PROBLÈME I. *Conduire, dans l'intérieur d'un triangle, deux droites telles que chacune d'elles contienne les centres de gravité des aires des deux segmens du triangle déterminés par l'autre?*

Solution. De quelque manière qu'une droite divise l'aire d'un triangle en deux segmens, toujours les centres de gravité de ces deux segmens sont en ligne droite avec le centre de gravité du triangle; d'où il est aisé de conclure que les deux droites demandées par l'énoncé du problème doivent avoir leur intersection à ce dernier point.

Si l'on joint l'un des sommets du triangle au milieu du côté opposé par une droite, cette droite contiendra le centre de gravité de l'aire du triangle qu'elle divisera en deux autres : et si, par ce centre de gravité, on mène une parallèle au côté du triangle au milieu duquel se termine la droite dont il s'agit, cette parallèle contiendra évidemment les centres de gravité des aires des deux segmens du triangle.

D'un autre côté, cette parallèle divisera le triangle en deux segmens, dont l'un sera un triangle qui lui sera semblable, tandis que l'autre sera un trapèze. Le centre de gravité du premier de ces deux segmens sera évidemment sur la première droite ; et, comme le centre de gravité du triangle total y est aussi, il en sera de même du centre de gravité de l'autre segment.

Ainsi, si, par le centre de gravité de l'aire d'un triangle, on mène deux droites ; l'une parallèle à l'un de ses côtés et l'autre passant par le sommet opposé, chacune de ces deux droites contiendra les centres de gravité des aires des deux segmens du triangle déterminés par l'autre ; le système de ces deux droites offrira donc une solution du problème.

Et comme, dans un triangle, on peut conduire trois systèmes de deux pareilles droites, il s'ensuit que le problème proposé admet trois solutions.

PROBLÈME II. Conduire, dans l'intérieur d'un tétraèdre, trois plans tels que l'intersection de deux quelconques contienne les centres de gravité des volumes des deux segmens du tétraèdre déterminés par le troisième ?

Solution. De quelque manière qu'un plan divise un tétraèdre en deux segmens, toujours les centres de gravité des volumes de ces deux segmens seront en ligne droite avec le centre de gravité du volume du tétraèdre. Puis donc que l'intersection de deux quelconques des trois plans cherchés doit contenir les centres de gravité des volumes des deux segmens déterminés par le troisième, elle doit aussi contenir le centre de gravité du volume du tétraèdre ; d'où l'on doit conclure que les trois plans cherchés doivent se couper en ce point.

Soient A , B , C , D les sommets du tétraèdre , et soit G son centre de gravité. Par ce point , conduisons un plan parallèle à la face ABC, ce plan déterminera un triangle A′B′C′ , semblable à ABC , et dont le centre de gravité sera le même que le centre de gravité G du tétraèdre. De plus ce même plan A′B′C′ divisera le tétraèdre en deux segmens dont les centres de gravité seront évidemment sur la droite DG.

Conduisons , par le point G, dans le plan du triangle A′B′C′, deux droites qui résolvent le précédent problème par rapport à ce triangle ; par exemple , une parallèle A″B″ au côté A′B′ et une droite C′C″ , joignant le sommet C′ au milieu C″ du côté opposé A′B′, par chacune de ces droites et par le sommet D conduisons deux plans ; le premier divisera le tétraèdre en deux pyramides de même sommet que lui , dont une sera elle-même un tétraèdre , tandis que l'autre sera une pyramide quadrangulaire ; et ces deux segments auront évidemment leurs centres de gravité sur la droite C′C″ , intersections du premier plan A′B′C′ avec le troisième.

Quant à ce troisième plan , il divisera le tétraèdre en deux autres de même sommet que lui , dont les centres de gravité seront évidemment sur la droite A″B″ , intersection des deux premiers plans. Ainsi les trois droites DG , CC′ et A″B″ , prises deux à deux , déterminent trois plans tels que chacun d'eux partage le tétraèdre en deux segmens dont les centres de gravité sont situés à l'intersection des deux autres , c'est-à-dire , trois plans qui résolvent le problème.

Mais , par le précédent problème , on peut mener , dans le plan du triangle A′B′C′, deux autres systèmes de droites qui , avec la même droite DG déterminent trois plans qui le résolvent également ; donc , en conservant toujours le plan A′B′C′, comme l'un des plans cherchés , le problème aura déjà trois solutions.

Mais attendu qu'au lieu de conduire ce plan parallèlement à la face ABC on aurait pu tout aussi bien le conduire parallèlement à chacune des trois autres faces ; et que, pour chaque direction qu'on voudra lui assigner, le problème aura toujours trois solutions ; il s'ensuit que le nombre de ses solutions s'élève jusqu'à douze.

Mais comme il existe quatre plans dont chacun est le même pour trois des solutions, il s'ensuit que le nombre des plans employés dans les douze solutions s'élève seulement à vingt-huit et non pas à trente-six.