ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

A. A. MARKOV

Sur les invariants calculables

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 7, série *Mathématiques*, n° 1 (1962), p. 117-120

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1962__7_1_117_0>

SUR LES INVARIANTS CALCULABLES

A.A. MARKOV
Moscou

1/ En considérant une relation réflexive, symétrique et transitive $\mathcal{R}$, définie pour des objets constructifs d'une espèce donnée, on peut introduire la notion d'un *invariant calculable de cette relation*. Nous appelons ainsi un algorithme, appliquable à chaque objet de cette espèce et transformant chaque deux objets liés par la relation $\mathcal{R}$ en un même objet. Nous disons d'un algorithme, appliquable à chaque objet de l'espèce considérée, qu'il est un *invariant calculable de la relation* $\mathcal{R}$ *pour l'objet* P, si cet algorithme transforme en un même objet tous les objets liés à P par la relation $\mathcal{R}$. Nous disons que les objets P et Q sont *indistinguables par des invariants de la relation* $\mathcal{R}$, si l'on a $\mathfrak{I}$ (P) = $\mathfrak{I}$ (Q) quel que soit l'invariant $\mathfrak{I}$ de la relation $\mathcal{R}$ pour l'objet P ainsi que pour l'objet Q.

En ce qui suit les mots dans un alphabet donné, satisfaisant à une certaine condition, figurent comme objets constructifs. Le terme "algorithme" en correspondance au principe de la normalisation (c'est-à-dire au thesis de Church) est compris comme "algorithme normalisable". Le terme "invariant" est compris comme "invariant calculable". Nous faisons usage de la terminologie et des notations de la monographie [2], tandis que les systèmes déterminants des calculs associatifs sont considérés comme systèmes ordonnés des égalités.

2/ Soit P et Q - des mots, dans l'alphabet A, V et W des égalités dans cet alphabet. Nous disons que V *est contigü à* W *d'après l'égalité* $P \longleftrightarrow Q$, s'il existe des mots R et S (dans l'alphabet $A \cup \{\longleftrightarrow\}$) tels que V = R P S et W = R Q S ou bien V = R Q S et W = R P S.

Soit $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ - des calculs associatifs dans un même alphabet. Soit $\{V_i$ (i = 1, ..., m), resp. $\{W_i$ (i = 1, ..., n), leurs systèmes déterminants. Nous disons que $\mathfrak{A}$ est *immédiatement transformable en* $\mathfrak{B}$, si m = n et s'il existe des nombres naturels i et j satisfaisant aux conditions : $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $i \neq j$, $V_k = W_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et $k \neq i$, V_i est contigü à W_i d'après V_j.

Nous disons des calculs associatifs $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ qu'ils sont *mutuellement transformables* s'il existe une suite de calculs associatifs $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_l$ $(l \geqslant 0)$ telle que $\mathfrak{A}_0$ est $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_l$ est $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{A}_{r-1}$ est immédiatement transformable en $\mathfrak{A}_r$ pour $0 < r \leqslant l$. Nous disons des calculs associatifs $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ dans un même alphabet qu'ils sont *équipollents*, si les mêmes équivalences des mots ont lieu dans ces calculs. Si deux calculs sont mutuellement transformables alors ils sont équipollents et si deux calculs sont équipollents alors ils sont isomorphes. La transformabilité mutuelle, l'équipollence et l'isomorphie des calculs associatifs dans un alphabet donné sont des relations réflexives, symétriques et transitives. En considérant les invariants de ces relations nous identifions les calculs associatifs avec leurs titres (*) et nous traitons les invariants comme algorithmes appliqués aux titres des calculs associatifs.

Nous disons d'un calcul associatif dans l'alphabet $\{\xi_1, \ldots, \xi_q\}$ qu'il est *trivial*, si les p premières égalités de son système déterminant sont $\Lambda \longleftrightarrow \Lambda$ et les q égalités restantes sont $\xi_i \longleftrightarrow \Lambda$ (i = 1, ..., q). Ici p peut être un nombre naturel quelconque.

Dans un calcul trivial tous les mots sont égaux au mot vide.

3/ Une espèce particulière de calculs associatifs est formée par les *calculs inversifs* construits de la manière suivante. L'alphabet du calcul consiste en deux parties d'*alphabet positif A* et d'*alphabet négatif* A^{-1}. On établit une correspondance biunivoque entre ces parties. La lettre d'alphabet A^{-1}(A), correspondant à la lettre ξ d'alphabet A(A^{-1}), sera désignée par le symbole ξ^{-1}. La fin du système déterminant est constituée de toutes les égalités de la forme $\xi\ \xi^{-1} \longleftrightarrow \Lambda$, où ξ est une lettre d'alphabet $A \cup A^{-1}$. Toutes les autres égalités ont aussi la partie droite vide.

Si nous donnons un calcul inversif dans l'alphabet $A \cup A^{-1}$ à 2q lettres, nous omettrons les 2q égalités dernières de la forme $\xi\ \xi^{-1} \longleftrightarrow \Lambda$. Nous appelons le système restant d'égalités le *sys-*

(*) Le *titre* d'un calcul associatif $\mathfrak{A}$ est composé des égalités du système déterminant de $\mathfrak{A}$, écrites consécutivement avec des lettres auxiliaires de séparation ; le signe $\longleftrightarrow$ doit être remplacé par une autre lettre auxiliaire.

tème déterminant abrégé du calcul considéré. Ce système a la forme $\{ R_i \longleftrightarrow$ (i = 1, ..., m) où R_i sont des mots dans l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Soit $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ - deux calculs inversifs dans *un* même alphabet Γ(*) aux systèmes déterminants abrégés $\{ R_i \longleftrightarrow \Lambda (i = 1, \ldots, m)$ resp. $\{ S_i \longleftrightarrow (i = 1, \ldots, n)$. Nous disons que $\mathfrak{G}$ *se transmue en* $\mathfrak{H}$ si m = n et si une des trois conditions suivantes est satisfaite.

1°) Il y a un nombre naturel i, une lettre ξ d'alphabet Γ et un mot U dans Γ tels que $1 \leqslant i \leqslant n$, $R_k = S_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et $k \neq i$, $R_i = \xi U$ et $S_i = U \xi$.

2°) Il y a des nombres naturels i et j tels que $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $i \neq j$, $R_k = S_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et $k \neq i$, $R_i R_j = S_i$.

3°) Il y a un nombre naturel i et une lettre ξ d'alphabet Γ, tels que $1 \leqslant i \leqslant n$, $R_k = S_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et $k \neq i$, $R_i \xi \xi^{-1} = S_i$.

Nous disons des calculs inversifs $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ qu'ils sont *mutuellement transmuables* s'il existe une suite de calculs inversifs $\mathfrak{G}_0, \ldots, \mathfrak{G}_l$ $(l \geqslant 0)$ telle que $\mathfrak{G}_0$ est $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_l$ est $\mathfrak{G}$ et que $\mathfrak{G}_{r-1}$ se transmue en $\mathfrak{G}_r$ ou $\mathfrak{G}_r$ se transmue en $\mathfrak{G}_{r-1}$ pour $0 < r \leqslant l$.

Si deux calculs inversifs sont mutuellement transmuables, alors ils sont équipollents. La transmuabilité mutuelle des calculs inversifs dans un alphabet donné est réflexive, symétrique et transitive. Nous traitons les invariants de la transmuabilité mutuelle de ces calculs comme des algorithmes appliqués à leurs titres abrégés. Nous appelons ici *titre abrégé* du calcul inversif à système déterminant abrégé $\{ R_i \longleftrightarrow \Lambda (i = 1, \ldots, m)$ le mot $R_1 \alpha \ldots R_m \alpha$, où α est une lettre fixe n'appartenant pas à l'alphabet considéré.

Nous disons d'un calcul à l'alphabet positif $\{\xi_1, \ldots, \xi_q\}$ qu'il est *explicitement unitaire* si les p premières égalités de son système déterminant abrégé sont $\Lambda \longleftrightarrow \Lambda$ et les q égalités restantes sont $\xi_i \longleftrightarrow \Lambda$ (i = 1, ..., q). Ici p peut être un nombre naturel quelconque.

THEOREME 1. On peut construire un calcul inversif $\mathfrak{G}$ *et un mot* A *dans son alphabet de manière que les conditions suivantes soient satisfaites* : 1°. A *n'est pas équivalent en* $\mathfrak{G}$ *au mot vide* ; 2°. A *est indistinguable du mot vide par des invariants de l'équivalence de mots en* $\mathfrak{G}$.

THEOREME 2. Quel que soit le calcul associatif $\mathfrak{A}$ *on peut construire un calcul associatif* $\mathfrak{B}$ *dans l'alphabet* a b c d *satisfaisant aux conditions* : 1°. $\mathfrak{A}$ *est immersible en* $\mathfrak{B}$; 2°. $\mathfrak{B}$ *est indistinguable par des invariants de la transformabilité mutuelle du calcul trivial dans l'alphabet* a b c d.

THEOREME 3. Quel que soit le calcul inversif $\mathfrak{G}$ *on peut construire un calcul inversif* $\mathfrak{H}$ *à l'alphabet positif* y z x t s a b d *satisfaisant aux conditions* : 1°. $\mathfrak{G}$ *est immersible en* $\mathfrak{H}$; 2°. $\mathfrak{H}$ *est indistinguable par des invariants de la transmuabilité mutuelle du calcul explicitement unitaire dans l'alphabet* y z x t s a b d.

THEOREME 4. On peut construire deux variétés 4-dimensionnelles M *et* N, *satisfaisant aux conditions* : 1°. M *est simplement connexe* ; 2°. N *n'est pas simplement connexe* ; 3°. M *et* N *sont indistinguables par des invariants de l'équivalence combinatoire.*

5/ Le théorème célèbre de Novikov sur la possibilité de la construction d'un calcul inversif avec le problème d'équivalence de mots insoluble [7] est une conséquence immédiate du théorème 1. En effet le problème d'équivalence de mots dans le calcul inversif $\mathfrak{G}$, construit d'après le théorème 1 ne peut être soluble.

Le théorème 2 entraîne le :

COROLLAIRE 1. Quels que soient les calculs associatifs $\mathfrak{A}$ *et* $\mathfrak{B}$, *on peut construire des calculs associatifs* $\mathfrak{D}$ *et* $\mathfrak{F}$ *dans un même alphabet qui satisfassent aux conditions* : 1°. $\mathfrak{A}$ *est immersible dans* $\mathfrak{D}$; 2°. $\mathfrak{F}$ *est isomorphe à* $\mathfrak{B}$; 3°. $\mathfrak{D}$ *et* $\mathfrak{F}$ *sont indistinguables par des invariants de la transformabilité mutuelle. L'alphabet du calcul* $\mathfrak{B}$ *consistant de q lettres, alors* $\mathfrak{D}$ *et* $\mathfrak{F}$ *peuvent être construits comme calculs associatifs dans un alphabet à q + 4 lettres.*

Le théorème sur l'impossibilité des algorithmes pour distinguer quelques propriétés des calculs associatifs [v [3] ou [2] p. 345] est une conséquence du corollaire 1.

Le théorème 3 entraîne le :

(*) Cela signifie que les alphabets positifs des calculs $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ coïncident, que leurs alphabets négatifs coïncident et que les correspondances entre ces deux alphabets dans ces calculs sont aussi les mêmes.

COROLLAIRE 2. Quels que soient les calculs inversifs $\mathcal{G}$ et $\mathcal{K}$, on peut construire des calculs inversifs $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ satisfaisant aux conditions : 1°. *$\mathcal{G}$ est immersible en $\mathfrak{M}$;* 2°. *$\mathfrak{N}$ est isomorphe à $\mathcal{K}$;* 3°. *$\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont indistinguables par des invariants de la transmuabilité mutuelle. L'alphabet positif du calcul $\mathcal{K}$ consistant de* q *lettres, alors $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ peuvent être construits comme calculs avec l'alphabet positif à* q + 8 *lettres.*

Ce corollaire entraîne le théorème d'Adjan-Rabin sur l'impossibilité des algorithmes pour distinguer quelques propriétés des calculs inversifs.

Le théorème 4 a pour conséquence le :

COROLLAIRE 3. Quel que soit le nombre naturel $n > 3$, *on peut construire deux variétés à* n-*dimensions* M^n *et* N^n *satisfaisant aux conditions :* 1°. *les groupes fondamentaux des variétés* M^n *et* N^n *ne sont pas isomorphes ;* 2°. M^n *et* N^n *sont indistinguables par des invariants de l'équivalence combinatoire des variétés à* n *dimensions.*

D'ici, le résultat principal de la note [5]. En effet, M^n et N^n étant construites d'après le corollaire 3, nous pouvons montrer, que n'importe quelle relation binaire $\mathcal{R}$, incluse entre équivalence combinatoire et la "parenté", le problème de la distinction de la relation $\mathcal{R}$ à M^n parmi les variétés à n-dimensions est insoluble.

6/ Au fond de tous ces résultats se trouve le théorème connu d'existence d'une fonction partiellement récursive n'admettant que deux valeurs et qui ne peut être prolongée jusqu'à une fonction généralement récursive.

En langue des algorithmes normaux ce theorème peut être formulé ainsi : On peut construire un algorithme normal $\mathfrak{A}$ sur l'alphabet $\{a, b\}$ satisfaisant aux conditions suivantes : 1°. $\mathfrak{A}(P) = a$ ou $\mathfrak{A}(P) = b$, tant que l'algorithme $\mathfrak{A}$ est applicable au mot P dans l'alphabet A ; 2°. Il est impossible de construire un algorithme normal $\mathfrak{B}$ sur l'alphabet $\{a, b\}$ applicable à n'importe quel mot dans cet alphabet et tel que $\mathfrak{A}(P) = \mathfrak{B}(P)$, tant que l'algorithme $\mathfrak{A}$ est applicable au mot P dans l'alphabet $\{a, b\}$.

En appliquant à l'algorithme $\mathfrak{A}$, construit d'après ce théorème, le théorème sur la représentation d'un algorithme normal par un calcul associatif [v. [6] ou [2] p. 208] et utilisant le théorème de MM. Novikoff et Adjan sur la représentation d'un calcul associatif par un calcul inversif [8], nous arrivons au théorème 1. D'ici on obtient le théorème 2 à l'aide de la construction appliquée pour la démonstration du théorème sur l'impossibilité de distinction des propriétés des calculs associatifs [v. [3] ou [2] pp. 345-362]. Le théorème 3 peut être démontré d'une façon analogue à l'aide du théorème 1 et de la construction appliquée par M. Rabin [10]. En outre nous utilisons ici le théorème de G. Higman, B. Neumann, H. Neumann, sur l'immersion des calculs inversifs en les calculs inversifs avec les alphabets positifs à deux lettres [9]. Enfin, le théorème 4 peut être démontré à l'aide du théorème 3 et de la construction esquissée dans des notes [4] et [5].

BIBLIOGRAPHIE

[1] S.I. ADJAN - Algoritmicheskaja nerazreshimost' problem raspoznavanija nekotorykh svojstv grupp (La non-résolubilité algorithmique des problèmes de reconnaissance de certaines propriétés des groupes). *Dokl. Akad-Nauk SSSR (NS) 103* (1955) p. 533-535.

[2] A.A. MARKOV - Teorija algorifmov (Théorie des algorithmes). *Trudy Mat. Inst. Steklov 42* (1954).

[3] A.A. MARKOV - Nevozmozhnost' algorifmov raspoznavanija nekotorykh svojstv associativnykh system (l'impossibilité d'algorithmes reconnaissant certaines propriétés des systèmes associatifs). *Dokl Akad. Nauk SSSR 77* (1951) p. 953-956.

[4] A.A. MARKOV - Nerazreschimost' problemy goméomorfii (la non-résolubilité du problème de l'homéomorphie) *Dokl. Akad. Nauk SSSR 121* (1958) p. 218-220.

[5] A.A. MARKOV - O nerazreschimosti nekotorykh problem topologii (la non-résolubilité de certains problèmes de topologie) *Dokl. Akad. Nauk SSSR 123* (1958) p. 978-980.

[6] A.A. MARKOV - O nerazreshimykh algorifmicheskikh problemakh (sur les problèmes algorithmiques non résolubles) *Mat. Sbornik. NS 31* (*73*) p. 34-42 (1952).

[7] P.S. NOVIKOFF - Ob algoritmicheskoi nerazreshimosti problemy tozhdestva slov v teori grupp (sur la non-résolbulité algorithmique du problème de l'identité des mots dans la théorie des groupes) *Trudy Math. inst. Steklov 44* (1955).

[8] P.S. NOVIKOFF et S.I. ADJAN - Das Wortproblem für Halbgruppen mit einseitiger Kürzungsregel. *Z. Math. Logik Grundlagen Math. 4* (1958) p. 66-88.

[9] G. HIGMAN, B.H. NEUMANN, H. NEUMANN - Embedding theorems for groups. *J. London Math. Soc. 24* (1949) p. 247-254.

[10] M.O. RABIN - Recursive unsolvability of group theoretic problems. *Ann. Math (2) 67* (1958) p. 172-194.