

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

A. GHIZZETTI

Les formules de quadrature sur les intervalles infinis

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 8, série *Mathématiques*, n° 2 (1962), p. 109-115

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1962__8_2_109_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES FORMULES DE QUADRATURE SUR LES INTERVALLES INFINIS

A. GHIZZETTI

Professeur à l'Université de Rome,

Directeur de l'Institut National pour les Applications du Calcul de Rome

[1] - Avant de traiter le problème des formules de quadrature sur les intervalles *infinis*, je dois exposer un résultat sur les formules relatives aux intervalles *finis* (voir [1]).

Soit (a, b) un intervalle fini, n un nombre entier positif, $u(x)$ une fonction dont la dérivée d'ordre $n-1$ est absolument continue dans (a, b) [$u(x) \in AC^{n-1}$], $g(x)$ une fonction sommable sur (a, b) [$g(x) \in L$].

L'intégrale à calculer sera écrite sous la forme :

$$\int_a^b u(x) g(x) dx \quad (1, 1)$$

et la fonction $g(x)$ sera appelée le *poids*.

Fixons dans (a, b) un certain nombre m de points x_1, x_2, \dots, x_m , avec :

$$x_0 = a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq b = x_{m+1}, \quad (1, 2)$$

et un opérateur différentiel linéaire d'ordre n :

$$E = \sum_{h=0}^n a_h(x) \frac{d^{n-h}}{dx^{n-h}}, \quad [a_0(x) \equiv 1, a_h(x) \in C^{n-h}]. \quad (1, 3)$$

On appellera formule de quadrature, pour l'intégrale (1,1), *relative aux points* x_1, x_2, \dots, x_m et à l'opérateur E , une formule du type suivant :

$$\int_a^b u g dx = \sum_{i=1}^m \sum_{h=0}^{n-1} A_{i,h} u^{(h)}(x_i) + R(u), \quad (1, 4)$$

où les coefficients $A_{i,h}$ sont indépendants de $u(x)$ et le *reste* $R(u)$ est nul si $u(x)$ est une intégrale de l'équation différentielle linéaire homogène $E(u) = 0$:

$$E(u) = 0 \implies R(u) = 0. \quad (1, 5)$$

On peut donner immédiatement un procédé pour construire une formule du type (1,4) sous la condition (1,5). L'opérateur E admet un *opérateur adjoint* :

$$E^* = \sum_{h=0}^n (-1)^{n-h} \frac{d^{n-h}}{dx^{n-h}} a_h(x) \quad (1, 6)$$

et pour deux fonctions $u(x), v(x) \in AC^{n-1}$ est valable presque partout l'*identité de Green Lagrange* :

$$v E(u) - u E^*(v) = \frac{d}{dx} \sum_{h=0}^{n-1} u^{(h)} E_{n-h-1}^*(v), \quad \left[E_k^* = \sum_{h=0}^k (-1)^{k-h} \frac{d^{k-h}}{dx^{k-h}} a_h(x) \right]. \quad (1, 7)$$

Considérons l'équation différentielle linéaire non homogène :

$$E^*(v) = g \quad (1, 8)$$

et soient :

$$v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \quad (1,9)$$

m-1 intégrales distinctes de (1,8). De plus dénotons par v_0 l'intégrale de (1,8) qui est définie par les conditions initiales nulles au point a :

$$v_0^{(h)}(a) = 0, \quad (h = 0, 1, \dots, n-1), \quad (1,10)$$

et par v_m l'intégrale de (1,8) qui est définie par les conditions initiales nulles au point b :

$$v_m^{(h)}(b) = 0, \quad (h = 0, 1, \dots, n-1). \quad (1,11)$$

Si dans l'identité (1,7) on pose $v = v_i$ ($i = 0, 1, \dots, m$) et on intègre sur l'intervalle (x_i, x_{i+1}) , on obtient [en rappelant que $E^*(v_i) = g$] :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} u g dx = - \sum_{h=0}^{n-1} [u^{(h)} E_{n-h-1}^*(v_i)]_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i E(u) dx, \quad (i = 0, 1, \dots, m). \quad (1,12)$$

En faisant la somme de ces formules (1,12), on trouve :

$$\int_a^b u g dx = - \sum_{i=0}^m \sum_{h=0}^{n-1} [u^{(h)} E_{n-h-1}^*(v_i)]_{x_i}^{x_{i+1}} + \sum_{i=0}^m \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i E(u) dx. \quad (1,13)$$

On voit aisément, en vertu de (1,10), (1,11) qui entraînent $[E_{n-h-1}^*(v_0)]_{x=x_0} = 0$, $[E_{n-h-1}^*(v_m)]_{x=x_{m+1}} = 0$, que la formule (1,13) peut s'écrire :

$$\int_a^b u g dx = \sum_{i=1}^m \sum_{h=0}^{n-1} [E_{n-h-1}^*(v_i - v_{i-1})]_{x=x_i} u^{(h)}(x_i) + \sum_{i=0}^m \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i E(u) dx. \quad (1,14)$$

Nous avons bien obtenu une formule de quadrature du type (1,4), avec :

$$A_{ih} = [E_{n-h-1}^*(v_i - v_{i-1})]_{x=x_i}, \quad (1,15)$$

$$R(u) = \sum_{i=0}^m \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i E(u) dx, \quad (1,16)$$

et la condition (1,5) est évidemment remplie.

Réciproquement on peut démontrer que ce procédé est le plus général. A chaque formule (1,4), sous la condition (1,5), on peut faire correspondre univoquement m-1 intégrales v_1, v_2, \dots, v_{m-1} de l'équation (1,8) de sorte que les coefficients A_{ih} et le reste $R(u)$ peuvent s'exprimer au moyen des formules (1,15), (1,16). La démonstration est semblable à celle qui sera exposée au paragraphe 2 pour les formules de quadrature sur les intervalles infinis.

Pour d'autres renseignements sur la formule (1,4), qui comprend toutes les formules de quadrature connues, on renvoie aux travaux [1], [2], [3].

2 - Traitons maintenant le cas des formules de quadrature sur les intervalles infinis, par exemple $(a, +\infty)$. Supposons $u(x) \in AC^{n-1}$, $g(x)$ localement sommable sur $(a, +\infty)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} u g dx$ simplement convergente (c'est-à-dire $= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b u g dx$) ; cette dernière hypothèse sera dénotée par :

$$u g \in I. \quad (2,1)$$

Fixons des points x_1, x_2, \dots, x_m tels que :

$$x_0 = a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m < +\infty = x_{m+1} \quad (1) \quad (2,2)$$

et un opérateur E. Proposons nous de construire une formule de quadrature du même type que (1,4) :

(1) On verra ensuite (§.3) qu'on peut aussi supposer $x_m = +\infty$.

$$\int_a^{+\infty} ug \, dx = \sum_{i=1}^m \sum_{h=0}^{n-1} A_{ih} u^{(h)}(x_i) + R(u), \quad (2,3)$$

toujours avec la condition :

$$E(u) = 0 \implies R(u) = 0. \quad (2,4)$$

Si (y_1, y_2, \dots, y_n) est un système d'intégrales linéairement indépendantes de $E(u) = 0$, il est évident que la condition (2,4) a un sens pourvu que l'hypothèse :

$$y_i g \in I, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2,5)$$

soit valable.

Cela posé, pour chaque point $b > x_m$ nous pouvons faire le même calcul qui a été fait au §. 1 pour atteindre la formule (1,13). Il suffit de considérer $m+1$ intégrales $v_0, v_1, \dots, v_{m-1}, v_m$ de l'équation différentielle (1,8) (la première v_0 définie par les conditions initiales (1,10) et les autres v_1, \dots, v_{m-1}, v_m arbitraires), d'écrire les formules (1,12) pour les intervalles $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{m-1}, x_m), (x_m, b)$ et d'en faire la somme. On obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \int_a^b ug \, dx = & - \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{h=0}^{n-1} [u^{(h)} E_{n-h-1}^*(v_i)]_{x_i}^{x_{i+1}} - \sum_{h=0}^{n-1} [u^{(h)} E_{n-h-1}^*(v_m)]_{x_m}^b + \\ & + \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i E(u) \, dx + \int_{x_m}^b v_m E(u) \, dx, \end{aligned} \quad (2,6)$$

qui pourra évidemment donner une formule du type (2,3) s'il est possible de choisir l'intégrale v_m de sorte que :

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \sum_{h=0}^{n-1} [u^{(h)} E_{n-h-1}^*(v_m)]_{x=b} = 0, \quad v_m E(u) \in I. \quad (2,7)$$

On peut construire des exemples (voir [4]) qui démontrent que les hypothèses (2,1), (2,5) ne sont pas suffisantes à assurer la validité de (2,7). Il faut faire quelques hypothèses ultérieures. Elles sont suggérées par la condition $v_m E(u) \in I$, en considérant que v_m (intégrale de $E^*(v) = g$) est la somme d'une intégrale particulière de la même équation et d'une combinaison linéaire des intégrales z_1, z_2, \dots, z_n de l'équation $E^*(v) = 0$. Cela nous induit à faire les hypothèses :

$$z_i E(u) \in I, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2,8)$$

Des exemples convenables démontrent que les trois hypothèses (2,1), (2,5), (2,8) sont indépendantes (voir [4]) ; elles sont aussi suffisantes à assurer la validité de (2,7), ce qui est une conséquence du lemme suivant :

LEMME - Si les fonctions $u(x), g(x)$ vérifient les hypothèses (2,1), (2,5), (2,8) et si $v(x)$ est une intégrale quelconque de l'équation différentielle $E^*(v) = g$, on peut affirmer que :

A) pour $x \rightarrow +\infty$, la fonction :

$$\varphi(x) = \sum_{h=0}^{n-1} u^{(h)} E_{n-h-1}^*(v) \quad (2,9)$$

tend vers une limite finie l ;

B) on a :

$$v E(u) \in I ; \quad (2,10)$$

C) on peut choisir l'intégrale v de façon qu'il résulte $l=0$ (quel que soit la fonction u).

Nous donnons en abrégé la démonstration de ce lemme. Il faut rappeler d'abord que, si (y_1, y_2, \dots, y_n) sont des intégrales indépendantes de $E(u) = 0$, les fonctions (z_1, z_2, \dots, z_n) définies par le système d'équations linéaires :

$$\sum_{i=0}^n y_i^{(h)} z_i = \delta_{h, n-1}, \quad (h = 0, 1, \dots, n-1), \quad (2, 11)$$

sont des intégrales indépendantes de l'équation adjointe $E^*(v) = 0$ et que ces intégrales vérifient aussi les équations suivantes :

$$\sum_{i=0}^n y_i^{(h)} E_{n-k-1}^*(z_i) = \delta_{hk}, \quad (h, k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (2, 12)$$

Il est facile (voir [4]) d'en tirer les conséquences :

$$\sum_{h=0}^{n-1} y_i^{(h)} E_{n-h-1}^*(z_j) = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (2, 13)$$

De plus, les intégrales générales des équations différentielles :

$$E(u) = f(x) \quad E^*(v) = g(x) \quad (2, 14)$$

peuvent s'exprimer par les formules (où α_i, β_i sont des constantes arbitraires) :

$$\begin{cases} u(x) = \sum_{i=1}^n y_i(x) \left[\alpha_i + \int_a^x z_i(\xi) f(\xi) d\xi \right], \\ v(x) = \sum_{i=1}^n z_i(x) \left[\beta_i - \int_a^x y_i(\xi) g(\xi) d\xi \right], \end{cases} \quad (2, 15)$$

qui entraînent les suivantes :

$$\begin{cases} u^{(h)}(x) = \sum_{i=1}^n y_i^{(h)}(x) \left[\alpha_i + \int_a^x z_i(\xi) f(\xi) d\xi \right], \\ E_{n-h-1}^*(v) = \sum_{i=1}^n E_{n-h-1}^*(z_i) \left[\beta_i - \int_a^x y_i(\xi) g(\xi) d\xi \right]. \end{cases} \quad (2, 16)$$

Alors, en posant $E(u) = f$, de (2,9) et (2,16) on peut déduire :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{i=1}^n y_i^{(h)}(x) \left[\alpha_i + \int_a^x z_i(\xi) f(\xi) d\xi \right] \sum_{j=1}^n E_{n-h-1}^*(z_j) \left[\beta_j - \int_a^x y_j(\xi) g(\xi) d\xi \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\alpha_i + \int_a^x z_i(\xi) f(\xi) d\xi \right] \left[\beta_j - \int_a^x y_j(\xi) g(\xi) d\xi \right] \sum_{h=0}^{n-1} y_i^{(h)}(x) E_{n-h-1}^*(z_j) \end{aligned} \quad (2, 17)$$

et ensuite, en vertu de (2,13) :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \left[\alpha_i + \int_a^x z_i(\xi) f(\xi) d\xi \right] \left[\beta_i - \int_a^x y_i(\xi) g(\xi) d\xi \right]. \quad (2, 18)$$

En rappelant les hypothèses (2,5) et (2,8), on tire de (2,18) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \sum_{i=1}^n \left[\alpha_i + \int_a^{+\infty} z_i(\xi) f(\xi) d\xi \right] \left[\beta_i - \int_a^{+\infty} y_i(\xi) g(\xi) d\xi \right], \quad (2, 19)$$

ce qui prouve l'affirmation A) du lemme.

L'affirmation B) est une conséquence immédiate de l'identité (1,7), écrite sous la forme $v E(u) = ug + \varphi'(x)$, en tenant compte de l'hypothèse (2,1) et de A).

Enfin, la limite (2,19) sera nulle (quel que soit u , c'est-à-dire pour des α_i arbitraires) si on donne aux constantes β_i les valeurs $\beta_i = \int_a^{+\infty} y_i(\xi) g(\xi) d\xi$, ce qui équivaut à considérer comme intégrale v de $E^*(v) = g$ l'intégrale suivante :

$$V(x) = \sum_{i=1}^n z_i(x) \int_x^{+\infty} y_i(\xi) g(\xi) d\xi. \quad (2, 20)$$

$$\int_a^{+\infty} ug \, dx = \sum_{i=1}^m \sum_{h=0}^{n-1} A_{ih} u^{(h)}(x_i) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{h=0}^{n-1} u^{(h)} E_{n-h-1}^*(v_m) + \sum_{i=0}^m \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i E(u) \, dx. \quad (2,26)$$

En comparant avec (2,3) on obtient :

$$R(u) = \sum_{i=0}^m \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i E(u) \, dx - \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{h=0}^{n-1} u^{(h)} E_{n-h-1}^*(v_m). \quad (2,27)$$

En vertu de (2,4) on doit avoir $R(y_k) = 0$, ($k = 1, 2, \dots, n$) ; en tenant compte de (2,27), cela entraîne :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{h=0}^{n-1} y_k^{(h)} E_{n-h-1}^*(v_m) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2,28)$$

Mais, d'après (2,9) (avec $u = y_k$, $v = v_m$) et (2,19) (avec $\alpha_i = \delta_{ik}$, $f = 0$), la limite (2,28) est égale à $\beta_k - \int_a^{+\infty} y_k(\xi) g(\xi) \, d\xi$; donc (2,28) exprime que les constantes β_k correspondantes à l'intégrale v_m sont données par $\beta_k = \int_a^{+\infty} y_k(\xi) g(\xi) \, d\xi$, c'est-à-dire que $v_m = V$. Alors, en vertu de l'affirmation C) du lemme, la limite qui figure en (2,27) est nulle et (2,27) se réduit à (2,23).

[3] - Ajoutons deux remarques sur les résultats du §.2. La première pour constater que la formule (2,3), accompagnée par (2,22) et (2,23), reste valable si $x_m = +\infty$ pourvu qu'elle soit interprétée sous la forme suivante :

$$\int_a^{+\infty} ug \, dx = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{h=0}^{n-1} A_{ih} u^{(h)}(x_i) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{h=0}^{n-1} u^{(h)} E_{n-h-1}^*(v_{m-1}) + R(u), \quad (3,1)$$

les coefficients A_{ih} étant donnés par (2,22) et le reste $R(u)$ par (2,23) avec $\int_{x_m}^{x_{m+1}} v_m E(u) \, dx = 0$. La formule (3,1) est une conséquence immédiate de (2,21), en passant à la limite pour $x_m \rightarrow +\infty$ et en tenant compte de l'affirmation A) du lemme.

La deuxième remarque a rapport à la question des intégrales *absolument convergentes*. Tous les raisonnements du §.2 restent valables si on remplace (2,1), (2,5), (2,8) par les hypothèses plus restrictives $ug \in L$, $y_i g \in L$, $z_i E(u) \in L$. Il faut toutefois remarquer que *ces trois hypothèses ne sont plus indépendantes* ; on a en effet :

$$y_i g \in L, \quad z_i E(u) \in L \implies ug \in L. \quad (3,2)$$

En posant $E(u) = f$ et en rappelant (2,15) on déduit :

$$|ug| = \left| \sum_{i=1}^n y_i g \left(\alpha_i + \int_a^x z_i f \, d\xi \right) \right| \leq \sum_{i=1}^n |y_i g| \left(|\alpha_i| + \int_a^{+\infty} |z_i f| \, d\xi \right)$$

ce qui prouve évidemment la validité de (3,2).

[4] - La méthode du §.1 peut s'étendre au cas des intégrales doubles ; je renvoie pour ce problème au travail [5].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. GHIZZETTI - *Sulle formule di quadratura* - Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, vol. XXVI, 1954-55.
- [2] A. GHIZZETTI - *Sulla convergenza dei procedimenti di calcolo, degli integrali definiti, forniti dalle formule di quadratura* - Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, vol. XXVI, 1956.

- [3] A. GHIZZETTI - *Lezioni di Analisi Superiore (Teoria dell'approssimazione lineare)* - Cap. VI - Ed. Libreria Eredi Virgilio Veschi-Roma-1955-56.
- [4] A. GHIZZETTI - *Sulle formule di quadratura relative ad intervalli illimitati* - Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei-vol. XXXII - 1962, p.290-298 et 467-470.
- [5] A. GHIZZETTI - *Sulle formule di cubatura relative ad intervalli piani* - Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. XIV - 1960.

DISCUSSION

M. CAYREL - La majoration de la valeur absolue du reste est souvent délicate dans les formules d'intégration numérique. Peut-on profiter de l'arbitraire qui s'introduit dans la définition des v_i pour les choisir avec un signe constant sur tout l'intervalle (a,b) ?

M. GHIZZETTI - Ceci est possible car les v_i sont arbitraires. On dispose ici du choix de l'opérateur et des intégrales v_i ; on pourra donc chercher un reste facile à majorer. Pour chaque calcul on peut établir la formule la plus commode. Il faut cependant veiller à choisir des intégrales faciles à calculer, mais il reste un grand nombre de degrés de liberté qui permet une grande souplesse d'emploi.

M. KUNTZMANN - En modifiant les v_i , on modifie les coefficients ; si on choisit des v_i positifs, on risque donc d'avoir une grande erreur. Il faudrait alors choisir entre une erreur facile à évaluer et une grande précision.

M. GHIZZETTI - La méthode permettrait en effet d'optimiser les formules, ce qui constituerait une recherche intéressante.

M. de POSSEL - Comment peut-on choisir pratiquement les fonctions v_i dans le cas de l'intervalle infini ?

M. GHIZZETTI - Il se peut que ce choix soit très difficile, mais on a une expression explicite des v_i faisant intervenir des quadratures.