

ANNALES SCIENTIFIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2  
*Série Mathématiques*

ROGER CAYREL

**Quelques applications des fractions continues en analyse numérique**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 8, série *Mathématiques*, n° 2 (1962), p. 77-83

[http://www.numdam.org/item?id=ASCFM\\_1962\\_\\_8\\_2\\_77\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1962__8_2_77_0)

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# QUELQUES APPLICATIONS DES FRACTIONS CONTINUES EN ANALYSE NUMÉRIQUE

Roger CAYREL

Maître de Recherches à l'Institut d'Astrophysique de Paris

## I - INTRODUCTION -

En Analyse Numérique l'emploi des fractions continues (limitées à leur réduite d'ordre  $n$ ) s'est révélé particulièrement fécond dans trois domaines : le calcul des transcendentes usuelles, l'interpolation d'une fraction au voisinage d'un pôle et la sommation des séries lentement convergentes. Dans ce qui suit nous esquisserons ces trois applications après quelques généralités indispensables.

## II - GENERALITES -

L'intérêt de la représentation approchée d'une fonction  $f(Z)$  par la réduite d'ordre  $n$  de la fraction continue :

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + Z + \frac{a_2}{b_2 + Z + \frac{a_3}{b_3 + Z + \dots}}}$$

que nous noterons :

$$\frac{A_n(Z)}{B_n(Z)} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + Z} + \frac{a_2}{b_2 + Z} + \dots + \frac{a_n}{b_n + Z} \quad (1)$$

ou encore :

$$\frac{A_n(Z)}{B_n(Z)} = b_0 + \sum_{r=1}^n \frac{a_r}{b_r + Z} \quad (1')$$

tient à deux raisons. La première est tout à fait élémentaire. Le calcul de (1) n'exige que  $n$  divisions bien qu'il s'agisse d'une représentation à  $2n + 1$  paramètres. Il y a économie d'opérations longues (multiplications et divisions) par rapport à une représentation polynomiale à même nombre de paramètres. La seconde est que les approximations rationnelles permettent de représenter exactement les singularités polaires qui limitent inexorablement le rayon de convergence des développements en série entière.

Il est utile de connaître la transformation d'équivalence:

$$\frac{c_1 c_2 \dots c_p A_p(Z)}{c_1 c_2 \dots c_p B_p(Z)} = b_0 + \frac{c_1 a_1}{c_1(b_1 + Z)} + \frac{c_1 c_2 a_2}{c_2(b_2 + Z)} + \frac{c_2 c_3 a_3}{c_3(b_3 + Z)} + \dots + \frac{c_{n-1} c_n a_n}{c_n(b_n + Z)} + \dots \quad (2)$$

qui ne modifie pas la valeur de la réduite d'ordre  $n$ , ni évidemment la limite, d'une fraction continue.

Voyons maintenant comment on obtient certains développements usuels en fractions continues.

Fraction continue de Gauss : Gauss a obtenu une véritable mine de développements en fraction continue en partant de l'identité :

$$F(a, b, c, z) = F(a, b+1, c+1, z) - \frac{a(c-b)}{c(c+1)} z F(a+1, b+1, c+2, z) \quad (3)$$

qui peut être facilement établie pour la série hypergéométrique  $F(a, b, c ; z)$  et qui est donc valable pour :

$$z \in \mathbb{C}, |z| < 1$$

L'identité (3) mise sous la forme :

$$\frac{F(a, b+1, c+1 ; z)}{F(a, b, c ; z)} = \frac{1}{1 - \frac{a(c-b)}{c(c+1)} z \frac{F(a+1, b+1, c+2 ; z)}{F(a, b+1, c+1 ; z)}} \quad (4)$$

contient l'amorce du développement en fraction continue.

Dans le second membre on remplace le rapport des fonctions hypergéométriques par l'expression obtenue en appliquant de nouveau l'identité (4) mais en y permutant  $a$  et  $b$ , ce qui est permis puisque  $F(a, b, c ; z)$  est symétrique en  $a$  et  $b$ . On obtient alors :

$$\frac{F(a, b+1, c+1 ; z)}{F(a, b, c ; z)} = \frac{1}{1 - \frac{a(c-b)}{c(c+1)} z \frac{1}{1 - \frac{(b+1)(c-a+1)}{(c+1)(c+2)} z \frac{F(a+1, b+2, c+3 ; z)}{F(a+1, b+1, c+2 ; z)}}} \quad (5)$$

La deuxième fraction du second membre a même forme que le premier membre,  $a$  et  $b$  ayant progressé d'une unité et  $c$  de deux unités. On peut donc poursuivre le processus et obtenir le développement formel :

$$\frac{F(a, b+1, c+1 ; z)}{F(a, b, c ; z)} = \sqrt[1]{1} + \sum_{q=1}^{\infty} \sqrt[1]{-a_q z} \quad (6)$$

avec :

$$a_{2p} = \frac{(b+p)(c-a+p)}{(c+2p-1)(c+2p)} \quad (7)$$

$$a_{2p+1} = \frac{(a+p)(c-b+p)}{(c+2p)(c+2p+1)} \quad (7')$$

On établit que le développement suivant les puissances ascendantes de  $z$  de la réduite d'ordre  $n$  de la fraction continue de Gauss coïncide avec le développement du premier membre pour les  $n$  premiers termes ( $|z| < 1$ ). Le théorème général suivant :

**THEOREME** - Soit une fraction continue du type :

$$\sqrt[1]{a_0} + \sum_{q=1}^{\infty} \sqrt[1]{-a_q z} \quad (8)$$

Si :

$$\lim_{q \rightarrow \infty} a_q = 0$$

la fraction continue (8) converge vers une fonction méromorphe de  $z$ . La convergence est uniforme sur tout domaine fermé, borné, ne contenant aucun pôle de la fonction.

Si :

$$\lim_{q \rightarrow \infty} a_q = a$$

la fraction continue (8) converge vers une fonction méromorphe de  $z$  dans le plan complexe privé de la demi-droite  $(\frac{1}{4a}, \infty)$ , le support de la demi-droite passant par l'origine.

La convergence est uniforme dans tout domaine fermé borné du plan privé des pôles et de la coupure.

L'expression de  $a_q$  de la fraction continue de Gauss montre que :

$$\lim_{q \rightarrow \infty} a_q = \frac{1}{4}$$

La fraction continue de Gauss converge donc dans tout le plan complexe privé de la coupure  $(1, \infty)$  le long de l'axe réel, exception faite de certaines singularités polaires.

Le développement en série de la fraction continue coïncidant avec celui du quotient  $F(a, b+1, c+1; z)/F(a, b, c; z)$  au voisinage de l'origine, la fraction continue donne le prolongement analytique de ce développement dans presque tout le plan complexe.

Voici quelques cas particuliers de la fraction continue de Gauss qui sont utilisés en Analyse Numérique :

$$\text{Log} \frac{1+z}{1-z} = \frac{2z F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z^2\right)}{1} = \left[ \frac{2z}{1} \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{-m^2 z^2}{2m+1} \right] \quad (9)$$

$$\text{Arctg } z = z F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right) = \left[ \frac{z}{1} \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{m^2 z^2}{2m+1} \right] \quad (10)$$

$$\text{th } z = \frac{z \psi\left(\frac{3}{2}; \frac{z^2}{4}\right)}{\psi\left(\frac{1}{2}; \frac{z^2}{4}\right)} = \left[ \frac{z}{1} \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{z^2}{2m+1} \right] \quad (11)$$

où :

$$\psi(c; z) = 1 + \frac{z}{c} + \dots + \frac{z^n}{c(c+1)\dots(c+n)} + \dots$$

est la fonction hypergéométrique particulière obtenue en faisant tendre  $a$  et  $b$  vers l'infini. Le développement en fraction continue correspondant est :

$$\frac{\psi(c+1; z)}{\psi(c; z)} = \left[ \frac{1}{1} \right] + \sum_{q=1}^{\infty} \left[ \frac{z}{(c+q-1)(c+q)} \right] \quad (12)$$

Les développements (9) (10) (11) sont des cas particuliers de développements (6) et (12) à une transformation d'équivalence près.

#### Développement d'une série entière en fraction continue.

Soit une série entière :

$$P\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p / z^{p+1} \quad c_p \in \mathbb{R} ; z \in \mathbb{C} \quad (13)$$

les  $c_p$  étant tels que pour tout  $p$  :

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_p \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_p & \dots & \dots & c_{2p} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (14)$$

on peut alors trouver une fonction bornée non décroissante  $\Phi(u)$  telle que les  $c_p$  soient les moments de la distribution  $d\Phi$  :

$$c_p = \int_{-\infty}^{+\infty} u^p d\Phi(u) \quad (\text{Intégrale de Stieltjes}) \quad (15)$$

Il existe une fraction continue :

$$J = \sqrt{\frac{a_0}{b_1 + z}} + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{-a_k}{b_{k+1} + z}} \quad (16)$$

univoquement déterminée, dont le développement en série entière suivant les puissances ascendantes de  $\frac{1}{z}$  coïncide avec  $P\left(\frac{1}{z}\right)$ . Les dénominateurs  $B_p(z)$  des réduites d'ordre  $p$  forment une famille de polynômes orthogonaux.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B_p(u) B_q(u) d\Phi(u) = 0 \quad \text{si } p \neq q \quad (17)$$

et les  $a_k$  satisfont à :

$$\Delta_p = a_0 a_1 \dots a_p \Delta_{p-1} \quad (18)$$

lorsque la fraction continue  $J$  est définie positive l'on a en outre :

$$J(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi(u)}{z - u} \quad (19)$$

Table de Padé. Soit une série entière :

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (20)$$

on cherche une expression rationnelle :

$$R(z) = \frac{A_p(z)}{B_q(z)} = \frac{\sum_{k=0}^p a_k z^k}{\sum_{k=0}^q b_k z^k} \quad (21)$$

approchant  $P(z)$ . Padé détermine les coefficients  $a$  et  $b$  par la condition que la série :

$$B_q(z) P(z) - A_p(z) = \gamma_0 z^{p+q+1} + \gamma_1 z^{p+q+2} + \dots \quad (22)$$

commence par un terme de degré aussi élevé que possible. Sauf cas particulier ce terme est de degré  $p + q + 1$ , les  $a_k$  et les  $b_k$  étant déterminés par un système linéaire et homogène de  $p + q + 1$  équations. A chaque couple de nombre entiers positifs  $(p, q)$  correspond ainsi une fraction rationnelle. Le tableau de ces approximations rationnelles constitue la table de Padé. Ce sont les approximations voisines de la diagonale principale qui sont les plus intéressantes au point de vue numérique. On met après coup cette approximation sous forme de fraction continue pour son calcul numérique de manière à diminuer le nombre d'opérations longues.

Méthode de Mahely. Toutes les fractions continues déjà vues ont le défaut d'être des représentations locales au voisinage de  $z = 0$  (ou de  $\frac{1}{z} = 0$ ) alors que l'on a généralement besoin d'approximation sur un intervalle fini. Mahely a suggéré d'appliquer la méthode de Padé au développement de Tchebycheff. On cherche une expression rationnelle.

$$S(z) = \frac{\sum_{k=0}^p a_k T_k(z)}{\sum_{k=0}^q b_k T_k(z)} \simeq \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(z) \quad (23)$$

telle que :

$$\left(\sum_{k=0}^q b_k T_k(z)\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(z)\right) - \sum_{k=0}^p a_k T_k(z) = \gamma T_{p+q+1} + \dots \quad (24)$$

commence par un terme d'ordre le plus élevé possible généralement égal à  $p + q + 1$ . En effectuant le produit on utilise évidemment la relation entre les polynomes de Tchebycheff.

$$T_r(z) T_s(z) = \frac{1}{2} (T_{r+s}(z) + T_{r-s}(z))$$

On obtient ainsi une représentation rationnelle avec une erreur mieux répartie sur l'intervalle de variation fini de la variable.

### III - CALCUL DES TRANSCENDANTES USUELLES -

Ce sujet a été traité en détail par Kogbetliantz (1960). Nous ne faisons que rappeler ici certains de ses résultats.

Calcul de Log x. Les meilleurs programmes utilisent la réduction, par addition de constantes, à un petit intervalle tel que  $(1 \leq x^* < 2^{1/8})$ . Le calcul de  $\text{Log } x^*$  est ensuite fait en utilisant la fraction continue de Gauss (9) où la méthode de Maehly. Nous donnons sur la table I le nombre de divisions ou de multiplications nécessitées par ces deux méthodes pour obtenir respectivement 10 chiffres et 20 chiffres décimaux exacts.

	10 chiffres	20 chiffres
Gauss	5	8
Maehly	4	7

Calcul de Arctg x. Comme on utilise généralement la réduction à un intervalle plus petit que dans le cas précédent, la méthode de Maehly n'a pas d'avantages par rapport à la fraction continue de Gauss (10). En divisant  $(0, \frac{\pi}{2})$  en 6 sous-intervalles on obtient une précision de 10 chiffres décimaux significatifs avec 5 opérations longues seulement.

Calcul de Sin x et Cos x. La fraction continue de Padé limitée à son troisième terme :

$$\cos x \approx B_0 + \sum_{k=1}^3 \frac{A_k}{x^2 + B_k}$$

fournit  $\cos x$  avec 10 chiffres décimaux exacts dans l'intervalle  $(0, \pi/3)$ .

Le calcul de  $\cos x$  dans  $(\pi/3, \pi/2)$  peut se faire en prenant le sinus du complément dans  $(0, \pi/6)$ . On obtient 10 chiffres décimaux exacts avec le développement de Padé.

$$\sin x = x \left( B_0 + \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{x^2 + B_k} \right)$$

Dans tous les cas le calcul des fonctions circulaires peut donc se faire avec seulement quatre opérations longues.

Racine carrée : La méthode de Héron pour le calcul par itération de  $\sqrt{a}$  :

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

nécessite une première approximation  $x_0$  qui est avantageusement une fraction continue de Padé dans les intervalles  $(1/4, 1/2)$  et  $(1/2, 1)$  avec une machine binaire. Le calcul de  $x_0$  est bon à  $10^{-5}$  près en ne conservant que 2 termes :

$$x_0 = B_0 + \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{B_k + a}$$

En appliquant ensuite la méthode de Héron une seule fois on obtient donc  $\sqrt{a}$  à  $10^{-10}$  près avec trois opérations longues seulement.

#### IV - INTERPOLATION AU VOISINAGE D'UN POLE. FRACTION CONTINUE DE THIELE -

L'interpolation polynomiale tombe en défaut au voisinage d'un pôle. Il faut alors interpoler en utilisant une fraction rationnelle qui s'obtient au mieux par l'algorithme suivant :

1/ On dresse une table des différences réciproques de la fonction. Celles-ci sont définies par :

$$+ \rho_{n-1}(x_1, \dots, x_n) \frac{b-a}{\rho_n(x_1, \dots, x_n, b) - \rho_n(a, x_1, \dots, x_n)} + \rho_{n-1}(x_1, \dots, x_n) \quad (25)$$

avec :

$$\rho_1(a, b) = \frac{b-a}{f(b) - f(a)} \quad (25')$$

ou si l'on préfère :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0(x) = f(x) \\ \rho_{-1} = 0 \end{array} \right. \quad (25'')$$

2/ De la définition des différences réciproques on peut déduire qu'elles sont fonctions symétriques de leurs arguments et établir la relation :

$$f(x) = f(x_1) + \frac{x-x_1}{\rho_1(x_1, x_2)} + \frac{x-x_2}{\rho_2(x_1, x_2, x_3) - \rho_0(x_1)} + \frac{x-x_3}{\rho_3(x_1, x_2, x_3, x_4) - \rho_1(x_1, x_2)} + \dots + \frac{x-x_n}{\rho_n(x, x_1, \dots, x_n) - \rho_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-1})} \quad (26)$$

La fraction rationnelle obtenue en abandonnant le dernier terme prend les valeurs de  $f(x)$  pour  $x = x_1, x_2, \dots, x_n$  et répond au problème posé. Si  $f(x)$  est une fraction rationnelle, les différences réciproques sont nulles à partir d'un certain rang et la fraction continue (26) (dite de Thiele) se termine en reproduisant  $f(x)$  exactement.

#### V - SOMMATION DES SERIES LENTEMENT CONVERGENTES -

Wynn (1956) a trouvé un algorithme simple permettant de construire les termes d'une fraction continue de Stieltjes à partir des sommes partielles d'une série entière. La fraction continue converge généralement beaucoup plus vite que la série entière vers la somme cherchée. En particulier la série entière peut être le développement d'une fraction rationnelle obtenue en un nombre fini d'opérations par cette méthode.

Soit  $S_m$  la somme partielle des  $m+1$  premiers termes de la série donnée. L'algorithme de Wynn consiste à calculer les quantités  $\varepsilon_s^{(m)}$  définies par les relations récurrentes :

$$\varepsilon_{-1}^{(m)} = 0 \quad \varepsilon_0^{(m)} = S_m \quad m = 0, 1, \dots \quad (27)$$

$$\varepsilon_{s+1}^{(m)} = \varepsilon_{s-1}^{(m+1)} + \frac{1}{\varepsilon_s^{(m+1)} - \varepsilon_s^{(m)}} \quad (28)$$

Les  $\varepsilon_{2p}^{(m)}$  sont des approximations de la somme cherchée ( $p = 1, 2, \dots$ ). Si l'on a calculé les  $S_m$  jusqu'au rang  $2n$  on prend  $\varepsilon_{2n}^{(n)}$  comme meilleure approximation.

L'algorithme appliqué au calcul de :

$$\text{Log } 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

donne une erreur d'une unité sur la huitième décimale pour  $2n = 10$ .

L'algorithme permet de sommer des séries divergentes. Par exemple :

$$-e^{-z} E_i(-z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! z^{-n-1} \quad (29)$$

peut être calculé en appliquant l'algorithme une première fois normalement, puis une deuxième fois en prenant pour  $S_m$  les  $\varepsilon_{2m}^{(0)}$  et en recommençant. Le nombre de valeurs est divisé par deux à chaque itération.

En itérant 4 fois avec  $2n = 16$  au départ, on peut ainsi sommer la série (29) pour  $z = 0,1$ :

$$-e^{-0,1} E_i(-0,1) = 0 + 10 - 100 + 200 \dots$$

On trouve le résultat avec une erreur moindre que  $10^{-4}$ . La fraction continue associée à la série (29) est :

$$\sqrt{\frac{1}{z+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{k^2}{z+2k+1}}$$

#### BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

E. G. KOGBETLIANTZ (1960) - Le chapitre "Generations of elementary functions" dans *Mathematical Methods for digital computers* Ralston et Wilf, Wiley, New-York.

H. S. WALL (1948) - *Analytic Theory of Continued fractions*, van Nostrand, New-York.

P. WYNN (1956) - *M.A.T.C. X 54*, 91 et *chiffres mars 1961* pages 19 et 23.

#### DISCUSSION

M. NUGEYRE - Peut-on comparer la méthode des fractions continues pour la sommation des séries lentement convergentes avec la méthode de Césaro itérée plusieurs fois ?

M. CAYREL - Je ne connais pas d'exemple de comparaison entre la méthode de Cesaro et celle de Wynn.

M. de POSSEL - Si, au cours d'un calcul, on rencontre la différence de deux nombres trop voisins, il conviendrait d'adopter un programme qui, automatiquement, reprend alors le calcul en double précision.

M. CAYREL - Oui, mais avec les calculateurs électroniques tels qu'ils sont, cela alourdirait le programme.

M. BERTRANDIAS - Peut-on préciser les hypothèses que doivent satisfaire les séries faiblement convergentes (ou divergentes) pour qu'on puisse leur appliquer la méthode des fractions continues ?

- Peut-on préciser l'erreur ?

M. CAYREL - On peut, sans doute, préciser ces hypothèses pour certaines classes de série, mais cela n'a pas été fait à ma connaissance.

Dans le mémoire de P. Wynn, il n'y a pas d'estimation d'erreur.

M. F. ROCHE - Avez-vous essayé un développement en fraction continue pour l'exponentielle intégrale dans le cas où l'argument est négatif ?

M. CAYREL - Non.

M. de POSSEL - L'étude de la meilleure approximation d'une fonction continue par une fraction rationnelle dont on fixe les bornes des degrés pour le numérateur et le dénominateur, en multipliant éventuellement la fraction par un poids, avait déjà été développée par Tchébycheff. Ici la fraction continue n'intervient que pour le calcul effectif des valeurs de la fraction rationnelle qu'on a toujours avantage à mettre sous la forme d'une fraction continue.