ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

CHARLES BLANC

Analyse numérique et considérations stochastiques

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 8, série *Mathématiques*, nº 2 (1962), p. 85-88

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1962__8_2_85_0>

ANALYSE NUMÉRIQUE ET CONSIDÉRATIONS STOCHASTIQUES

Charles BLANC
Professeur à l'Université de Lausanne (Suisse)

On peut être surpris, au premier abord, de l'intervention de considérations probabilistes dans le domaine du calcul numérique ; un examen plus attentif montre que cette intervention s'est imposée en raison surtout des nombreuses servitudes dont s'accompagne le calcul, et qu'implique l'imperfection des méthodes mises en oeuvre.

Citons, sans nous y attarder, les *techniques de simulation* (méthodes de Monte-Carlo), dans lesquelles on observe le déroulement d'un phénomène (pseudo-aléatoire), dont un paramètre est la solution du problème considéré.

On sait que, dans l'étude des *erreurs d'arrondi*, on renonce le plus souvent à rechercher des bornes, peu utilisables parce que beaucoup trop grandes ; considérant les erreurs élémentaires comme des grandeurs aléatoires, on étudie alors la distribution en probabilité des erreurs finales, ou tout au moins certains paramètres de cette distribution. L'hypothèse la plus simple que l'on peut formuler à propos de ces erreurs élémentaires est qu'elles sont uniformément distribuées dans l'intervalle défini par le nombre de chiffres retenus dans le calcul. On a pu montrer que cette hypothèse un peu simpliste n'est pas toujours conforme à la réalité, et M. Forsythe [3] a suggéré à ce propos une technique d'arrondi qui assure une distribution uniforme et qui est différente de celle que l'on emploie usuellement.

Quoi qu'il en soit, le point de vue probabiliste définit ici une attitude souvent plus réaliste que celle qu'implique la considération de bornes. Prenons par exemple le cas où on désire effectuer un contrôle formel d'une suite de calculs ; on sait que, du fait des arrondis, le contrôle doit comporter une marge de tolérance ; il serait certainement imprudent de tolérer un écart qui, bien qu'inférieur aux bornes théoriques, se trouverait par ailleurs être très improbable.

Relativement aux *erreurs de discrétisation*, on adopte volontiers une attitude qui est implicitement probabiliste ; on dira par exemple : "telle méthode donne *en général* des résultats satisfaisants", ou bien "*dans la plupart des cas*, il est préférable de ..." ou encore "il est *rare* que telle circonstance se présente". Il y aurait tout intérêt à donner à ces affirmations un fondement précis ; on n'y parviendra qu'en précisant les hypothèses de nature stochastique sur lesquelles on prétend s'appuyer.

Traditionnellement, les erreurs de discrétisation sont étudiées à deux points de vue : ou bien on établit des bornes, ou bien on étudie le comportement de l'erreur (convergence vers zéro) quand le paramètre de discrétisation varie. Pour fixer les idées, prenons le calcul approché d'une intégrale définie $\int_a^b f(t)\,dt$ par la formule de Simpson. On montre que l'erreur est bornée par une expression :

$$A \frac{M_4}{n^4}$$

où M_4 est une borne de la dérivée quatrième de f(t) et n le nombre d'intervalles de subdivision. On peut donc dire que, si la fonction f(t) possède une dérivée quatrième bornée, l'erreur est $0\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

Diverses objections peuvent alors être faites :

1/ on introduit une hypothèse artificielle (existence d'une dérivée quatrième bornée) ;

2/ si on adopte une autre méthode de quadrature approchée, il faudra en général formuler une autre hypothèse (d'où la difficulté de comparer les méthodes) ;

3/ la borne donne un renseignement sur les cas extrêmes, alors que l'erreur est normalement beaucoup plus petite.

De toute façon, la borne donnée ici implique la considération non pas d'*une* fonction f(t), mais de tout un ensemble, celui des fonctions ayant une dérivée quatrième bornée par M_4. On introduira des considérations stochastiques en substituant à cet ensemble un ensemble pourvu d'une répartition en probabilité, en fait une fonction $X(t, \omega)$, où ω parcourt un espace de probabilité Ω ; la fonction *aléatoire* $X(t, \omega)$ étant introduite dans un calcul approché, l'erreur sera elle-même une grandeur aléatoire, dont la distribution nous renseignera sur la valeur de la méthode.

Supposons que la fonction $X(t, \omega)$ satisfait aux conditions :

$$E\, X(t, \omega) = 0$$

$$E\, X(t, \omega)\; X(\tau, \omega) = r(t, \tau) = R(t - \tau)$$

(stationnarité d'ordre deux) et que la fonction de corrélation R(h) admet un spectre $s(\alpha)$:

$$R(h) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\alpha)\; e^{i\alpha h}\, d\alpha.$$

Un problème linéaire portant sur la fonction X étant résolu par une méthode approchée (linéaire également), on aura une erreur Y qui sera une fonctionnelle linéaire $Y = L\, X$ de X ; en supposant que les opérateurs L et E sont permutables, on a :

$$E\, Y = E\, L\, X = L\, E\, X = 0$$

et :

$$\begin{aligned} E\, Y^2 &= E\;\; L_t X(t)\;\; L_\tau X(\tau) \\ &= L_t L_\tau E\, X(t)\;\; X(\tau) \\ &= L_t L_\tau R(t - \tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(\alpha)\;\; L_t\, e^{i\alpha t}\, L_\tau\, e^{-i\alpha\tau} d\alpha \end{aligned}$$

(en admettant que l'on peut permuter l'intégration en α avec l'opérateur L). On voit ainsi que la variance de l'erreur s'exprime simplement au moyen de l'erreur commise en appliquant la méthode approchée au cas où la donnée du problème est $e^{i\alpha t}$.

Revenons au problème de la quadrature approchée ; prenons d'abord le cas d'un intervalle $[c - h,\; c + h]$; on aura une erreur :

$$Y = L\, X = h \sum_k p_k X(c + ha_k) - \int_{c-h}^{c+h} X(t)\; dt$$

donc :

$$\begin{aligned} L\, e^{i\alpha t} &= h\, \Sigma p_k\, e^{i\alpha(c + ha_k)} - \int_{c-h}^{c+h} e^{i\alpha t}\; dt \\ &= e^{i\alpha c}\, h\varphi(h\,\alpha) \end{aligned}$$

avec :

$$\varphi(z) = \Sigma p_k \exp(iza_k) - \int_{-1}^{1} \exp(izt)\; dt \;;$$

si la formule est symétrique, $\varphi(z)$ est réelle et paire ; on a alors :

$$L(\exp(-i\alpha\tau)) = \exp(-i\alpha\tau)\; h\varphi(h\,\alpha)$$

et :

$$E\, Y^2 = h^2 \int_{-\infty}^{\infty} s(\alpha)\;\; \varphi^2(h\,\alpha)\; d\alpha \;;$$

supposons maintenant que l'intégration approchée porte sur un intervalle [a,b] divisé en n intervalles égaux de longueur 2h, dans lesquels on applique la formule de quadrature approchée étudiée ; on a, par un calcul assez simple (voir [2]),

$$E\,Y^2 = 2h^2 \int_{-\infty}^{\infty} s(\alpha) \left(\frac{\sin nh\alpha}{\sin h\alpha}\right)^2 \varphi^2(h\alpha)\, d\alpha \;;$$

les propriétés de l'intégrale de Fejer permettent de préciser le comportement de cette expression lorsque n augmente indéfiniment ; on a en effet :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E\,Y^2 = h\left[s(0)\ \varphi^2(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} s\left(\frac{k\pi}{h}\right) \varphi^2(k\pi)\right].$$

La moyenne quadratique de l'erreur dépend ainsi du choix du spectre $s(\alpha)$, qui précise la répartition en probabilité de $X(t,\omega)$. Ce choix est limité par des conditions assez larges ; pour des raisons de commodité (qui sont de toute façon inévitables dans une étude d'erreurs de discrétisation), on peut prendre :

$$s(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{A}{2} & \text{pour} \quad |\alpha| \leqslant 1 \\ 0 & \text{pour} \quad |\alpha| > 1 \end{cases}$$

ce choix permet un calcul facile de $E\,Y^2$; il correspond au reste assez bien à une hypothèse plus ou moins sous-jacente dans l'emploi de méthodes approchées, à savoir qu'on y considère comme très improbables des variations très rapides de la fonction considérée (ici des variations à fréquence élevée).

Remarquons encore ceci :

a) le choix de la méthode approchée n'a aucune influence sur celui du spectre ; la comparaison de diverses méthodes est donc directement possible ;

b) le comportement de l'erreur en fonction du paramètre de discrétisation résulte du comportement de cette erreur quand la fonction sur laquelle porte le calcul est exp(izt), donc du comportement de $\varphi(z)$ quand z tend vers zéro. On voit qu'aucune hypothèse (parasite) de dérivabilité n'est plus nécessaire sur la fonction $X(t)$; l'ordre de l'infiniment petit $\varphi(z)$ est du reste précisément celui de la borne d'erreur obtenue sous des hypothèses assez fortes.

On a exposé ici le cas de l'étude de formules de quadrature approchée ; on verrait qu'aucun obstacle ne s'oppose à la mise en oeuvre de ces considérations pour d'autres problèmes linéaires (interpolation, intégration d'équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles). Signalons à ce propos une étude récente de M. Uhlmann [4], qui porte sur la résolution par des équations aux différences de problèmes elliptiques dans R_n ($n \geqslant 2$). Dans les problèmes non-linéaires, il est également possible de parvenir à des résultats utiles, grâce à une linéarisation appropriée (voir par exemple [1]).

Une étude stochastique d'erreur permet de donner, en quelques sortes a posteriori, une explication à des faits connus empiriquement des utilisateurs. Elle permet également d'opérer un choix entre diverses méthodes, ou de former des méthodes optimales. Même dans des cas particuliers, elle permet de porter des jugements raisonnables sur l'erreur commise. Si on adopte un spectre $s(\alpha)$ du type envisagé plus haut, on pourra procéder ainsi : à partir de la considération du comportement de $X(t)$ (par exemple de ses différences finies), on peut *estimer* les paramètres A et 1 figurant dans la définition de $s(\alpha)$; adoptant ces valeurs, on calcule ensuite $E\,Y^2$; on en déduit une information très valable sur l'erreur commise effectivement ; on le verra par exemple dans l'étude citée de M. Uhlmann, et tout permet de présumer qu'il y a là un moyen très puissant d'obtenir des indications valables sur les erreurs de discrétisation.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ch. BLANC - Sur les formules d'intégration approchée d'équations différentielles ; Archiv der Mathematik 5, (1954), 301-308.

[2] Ch. BLANC et W. LINIGER - Stochastische Fehlerauswertung bei numerischen Methoden ; Zeitschrift für Ang. Math. und Mech. 35, (1955), 121-130.

[3] FORSYTHE, GEORGE E. - Reprint of a note on rounding-off errors ; SIAM-Review, 1, (1959), 66-67.

[4] UHLMANN, WERNER - Uber harmonische und isotrope stochastische Prozesse mit Fehlerschätzung für ein Differenzenverfahren ; Zeitschrift für ang. Math. und Mech. 41, (1961), 428-447.

DISCUSSION

M. de POSSEL - Je crois que le procédé deviendrait beaucoup plus intéressant si on l'appliquait à des catégories bien déterminées de fonctions, que l'on rencontre souvent. Il faudrait distinguer le cas des fonctions définies expérimentalement de celui des fonctions définies analytiquement.