ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

JÉRÔME CHASTENET DE GÉRY

Les espaces de la cinématique. axiomatique et formalisme en mécanique classique et en relativité restreinte

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 24, série *Mathématiques*, n° 3 (1964), p. 3-36

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1964__24_3_3_0>

LES ESPACES DE LA CINÉMATIQUE.
AXIOMATIQUE ET FORMALISME EN MÉCANIQUE CLASSIQUE ET EN RELATIVITÉ RESTREINTE

Jérôme CHASTENET DE GÉRY

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Le but de cette étude est de développer un formalisme et une terminologie précis, basés explicitement sur un système d'axiomes simples et directement utilisables, et permettant d'éviter les obscurités ou ambigüités qui subsistent dans certaines méthodes traditionnelles d'exposition.

Nous avons abordé à la suite l'une de l'autre la Cinématique Classique et celle de la Relativité Restreinte car il s'y présente des analogies notables, et particulièrement dans l'exposé qui va suivre, bien que cet effet n'ait pas été recherché a priori mais résulte plutôt de la nature des choses. De plus elles sont toutes deux justiciables d'un traitement mathématique assez élémentaire, ce qui n'est plus exactement le cas de la Relativité Générale.

L'exposé que nous présentons ici[*] serait certes encore trop compliqué pour l'enseignement élémentaire de la Mécanique Classique, mais on pourrait en tirer une version plus intuitive, ce qui sera fait par ailleurs. Par contre certaines parties sont sans doute trop développées pour les mathématiciens, mais peut-être tous les physiciens ne s'en plaindront-ils pas. Ce travail doit permettre de formuler plus sûrement la cinématique des systèmes continus déformables, la cinétique et la dynamique, en Mécanique Classique et en Relativité, (de laquelle nous n'aborderons ici que les problèmes les plus immédiats) toutes questions que nous développerons ultérieurement suivant ces méthodes.

Nous avons employé dans ce travail un vocabulaire et des notations mathématiques qui nous ont semblé les plus appropriées ; comme ce ne sont pas toujours les plus orthodoxes, une annexe placée à la fin donne quelques précisions à ce sujet. Pour rester aussi élémentaire que possible on s'est abstenu, notamment, d'utiliser le langage des espaces fibrés.

(*) tiré de communications aux 7ème et 8ème Colloques Internationaux de théories Variationnelles, en septembre 1962 à l'Alpe de Venosc et en Septembre 1963 à la Baule.

PREMIÈRE PARTIE

MÉCANIQUE CLASSIQUE

O - OBSERVATIONS PRELIMINAIRES -

En mécanique Rationnelle, et pour commencer en cinématique, on parle communément dès l'abord de points (ou de points mobiles) et de vecteurs (déplacements, vitesses...) comme si l'on avait évidemment *un* espace géométrique ordinaire à trois dimensions que l'on ne précise même pas. Il faut voir, sans doute là, un souci de simplicité, mais nous pensons que cette méthode est malheureuse. Des problèmes comme celui de la composition des vitesses ou de la cinématique des milieux déformables, par exemple, seront alors privés de toute la netteté qui leur est nécessaire. Bien sûr, quand on passe à l'étude du mouvement relatif, où la situation se complique un peu, on introduit deux systèmes de coordonnées différents, mais cela risque de masquer qu'en fait ce sont les espaces eux-mêmes qui sont essentiellement différents.

Pour éviter cette dernière ambigüité nous réserverons l'usage des systèmes de coordonnées explicites jusqu'à la fin d'un problème, au moment où il sera théoriquement résolu et où il ne restera qu'à donner des formules pratiques. Ceci nous permettra de séparer très nettement, en particulier, le choix capital, du corps de référence et le choix, tout à fait secondaire, d'un système de coordonnées dans ce corps.

Mais la difficulté fondamentale est de choisir un espace de départ ayant une signification objective.

On peut d'abord penser que l'espace où s'inscrivent tous les mouvements de la Mécanique est l'espace géométrique attaché à l'Observateur (rigide). C'est un point de vue subjectif, égocentriste, et il est très difficile, sans en sortir de comparer les points de vue des différents observateurs et de rendre compte simplement de la composition des mouvements.

On peut alors imaginer que les divers points mobiles prennent position à chaque instant t dans un certain espace affine de dimension trois, mais on ne peut placer les mobiles à un autre instant dans ce même espace sans un arbitraire qui ruine l'objectivité.

On peut enfin considérer que l'espace est l'ensemble de tous les mobiles ponctuels possibles. C'est un point de vue objectif mais trop complexe pour commencer. En particulier on n'a pas affaire à un espace affine.

Pour sortir de l'arbitraire tout en conservant au maximum des structures initiales simples, nous sommes amenés à séparer les configurations aux différents instants, c'est-à-dire à considérer à chaque instant un espace distinct où se trouvent les positions des mobiles à cet instant. On obtient ainsi une famille à un paramètre d'espaces affines euclidiens de dimension 3 qui sont en quelque sorte les photographies (en relief et sans cadrage indiqué) de l'Univers aux différents instants. Réciproquement l'Univers peut être caractérisé par le portefeuille des espaces de cette famille, formant un espace-temps à 4 paramètres, à condition d'y mettre une topologie assurant la continuité du mouvement ; c'est le principe même de la représentation des mouvements par le cinématographe (la continuité étant permise par la persistance des impressions lumineuses). Aucune autre structure n'est nécessaire pour la seule cinématique. Mais l'existence des référentiels galiléens, postulée ultérieurement par la dynamique, nous amène à considérer l'Univers comme étant lui-même un espace affine où sont plongés les espaces de la famille et muni d'une mesure affine des temps (le mouvement "rectiligne et uniforme" se traduisant alors simplement par une trajectoire rectiligne dans l'espace-temps). Comme cette hypothèse supplémentaire simplifie considérablement l'exposé (en particulier pour la topologie, qui est déterminée partout par la structure affine de dimension finie $n = 4$), nous la ferons dès le début bien qu'elle n'y soit pas indispensable. C'est notamment le point de vue qu'Hermann Weyl avait adopté dans "Temps, Espace, Matière" et qui semble n'avoir malheureusement pas été suffisamment développé par la suite. Par contre il n'est absolument pas indiqué de munir l'espace-temps tout entier d'une structure proprement euclidienne comme on le fait parfois. Si l'on a vainement cherché autrefois parmi les espaces affines de dimension 3 un espace privilégié qui puisse être qualifié d'*absolu*, l'espace-temps de dimension 4 en revanche peut bien mériter ce titre.

Bien que conçue spécialement pour la Mécanique Classique, la présentation que l'on obtient facilite considérablement le passage à la relativité restreinte comme on le verra dans la seconde partie ; dans cette perspective nous nous sommes efforcés de rapprocher les deux vocabulaires.

Nous postulerons au départ une correspondance entre notions physiques et ensembles à structures mathématiques. On pourra considérer, suivant le point de vue, les énoncés correspondants soit comme des axiomes de la théorie physique, soit comme des définitions de la théorie mathématique.

N.B. Le mot espace sera pris dans ce qui suit avec son sens mathématique général ; pour le sens usuel en géométrie vectorielle élémentaire et en physique nous emploierons plus spécialement le mot : étendue (cf. I, 2°).

I - ENONCES GENERAUX -

1/ On suppose que l'*Univers* est un espace affine réél $\mathcal{U}$ de dimension 4, appelé encore Espace-Temps ou Univers quadridimensionnel ou Espace Absolu.

Les éléments de $\mathcal{U}$ sont appelés *évènements*.

Les éléments de l'espace vectoriel $\Delta\mathcal{U}$ associé à $\mathcal{U}$ seront appelés *vecteurs d'Univers* ou simplement vecteurs (les physiciens disaient : quadrivecteurs, en les opposant aux vecteurs ordinaires de dimension 3, mais il y aura plusieurs espèces de ces derniers).

2/ On suppose que l'*Etendue* est un certain sous-espace vectoriel E de dimension 3 de $\Delta\mathcal{U}$ (ou hyperplan vectoriel).

On dit que les évènements X_1 et X_2 sont *simultanés* si $X_2 - X_1 \in E$; il est clair que c'est une relation d'équivalence sur $\mathcal{U}$ et que les classes sont des sous-espaces affines de dimension 3 (hyperplans affines) de même direction E.

Ces classes sont appelées *instants* et l'ensemble $\mathcal{T}$ des classes est appelé le *Temps* (Universel) ; on sait que la structure affine passe à l'espace quotient $\mathcal{T} = \mathcal{U}/E$ et qu'il est de dimension 1. Un élément de l'espace vectoriel $\Delta\mathcal{T}$, associé à $\mathcal{T}$, est appelé *durée*.

Nous appellerons *Chronométreur* l'opérateur C qui applique $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{T}$, et qui à l'évènement X fait correspondre sa classe $t = C(X)$; on a donc $[X \in t] \Longleftrightarrow [C(X) = t]$. Il est clair que l'opérateur C est affine (homomorphisme).

Soit $\hat{C}$ l'opérateur linéaire associé à C, la durée de X_1 à X_2 est $C(X_2) - C(X_1) = \hat{C}(X_2 - X_1)$, elle ne dépend que de vecteur $X_2 - X_1$ on l'appelle aussi *durée du vecteur* $X_2 - X_1$.

Un vecteur de durée nulle est un *vecteur d'étendue*.

Un vecteur de durée non nulle est appelé *vecteur de* (genre) *temps* (ne pas confondre avec un vecteur *du* temps, ou durée, élément de $\Delta\mathcal{T}$). On sait que les vecteurs de temps sont partagés en deux classes opposées.

On peut montrer que les directions des vecteurs de temps ou *directions de temps* forment un espace affine de dimension 3.

Pour simplifier, nous pourrons identifier si besoin est $\mathcal{T}$ avec R au moyen d'une base (instant origine, durée unité) choisie une fois pour toutes.

3/ On suppose que le Temps est *orienté*, la base choisie étant alors toujours directe.

La classe des vecteurs de durée positive de $\Delta\mathcal{U}$ est appelée l'*Avenir*, la classe négative est appelée le *Passé*.

L'évènement X_0 étant donné, les évènements X qui vérifient $C(X) > C(X_0)$ sont dits *postérieurs à* X, ils forment l'*avenir de* X_0 ; ceux qui vérifient $C(X) < C(X_0)$ sont dits *antérieurs à* X_0, ils forment le *passé de* X_0 ; enfin ceux qui vérifient $C(X) = C(X_0)$ sont simultanés de X_0, ils forment l'instant (présent) de X_0.

4/ On suppose que l'Etendue E est munie d'un *produit scalaire euclidien positif*, ce qui fait que les différents instants sont des espaces affines euclidiens positifs.

En fait on pourrait baser l'axiomatique directement sur les groupes et ce serait peut-être plus satisfaisant physiquement mais d'une utilisation beaucoup moins simple.

Ainsi le 4/, par exemple, pourrait être remplacé par : on suppose qu'il existe un groupe $\mathcal{D}$ de permutations de E que l'on appelle *groupe des déplacements* de E et qui est tel que, pour un certain isomorphisme $\mathcal{S}$ de R^3, sur l'espace vectoriel E, le groupe des matrices $\mathcal{S}^{-1}.D.\mathcal{S}$ pour tout

$D \in \mathcal{D}$ soit le groupe $O_3(R)$ des déplacements de l'espace vectoriel R^3.

Nous appellerons *repère orthogonal de* E tout isomorphisme de R^3 sur E qui possède par rapport à $\mathcal{D}$ la même propriété que $\mathcal{S}$. La condition nécessaire et suffisante pour que S soit un repère orthogonal est que la matrice $\mathcal{S}^{-1}.S$ soit une similitude de R^3.

Le groupe $\mathcal{D}$ détermine sur E des classes d'intransitivité qui forment une partition de E ; la classe de V s'appelle *longueur de* V et sera désigné par L(V), l'*ensemble des longueurs* sera désigné par $\mathcal{L}$.

On vérifie que :

$$[|s| = |s'| \text{ et } L(V) = L(V')] \Longrightarrow [L(sV) = L(s'V')]$$

et l'on pose $L(sV) = |s|\, L(V)$, ce qui constitue l'ensemble R^+ des nombres réels positifs ou nuls en domaine d'opérateurs sur $\mathcal{L}$. Quelle que soit la longueur e on a $1e = e$, et $(m'm)e = m'(me)$ pour tous réels positifs m et m'. On pose $L(0_E) = 0_{\mathcal{L}}$ alors $0e = 0$ et $[L(V) = 0] \Longrightarrow [V = 0]$.

Soit e_o une longueur non nulle, on montre que l'application de R^+ dans $\mathcal{L}$: $m \longrightarrow me_o$ est une bijection. Etant donné $e \in \mathcal{L}$, on désigne par $\frac{e}{e_o}$ le nombre $m \in R^+$ tel que $e = me_o$, et on l'appelle rapport des longueurs e et e_o, ou *mesure de la longueur* e avec e_o pris comme *unité de longueur*. On appelle *étalon* de longueur un vecteur V_o tel que $L(V_o) = e_o$, unité de longueur.

Soient e et e' deux longueurs quelconques :

$$e = m_o e_o = m_o L(V_o) = L(m\ V\ ) \qquad \text{et} \qquad e' = m'_o e_o = L(m'_o V_o).$$

On pose :

$$e + e' = [m_o + m'_o]\, e_o = L(m_o V_o + m'_o V_o).$$

On vérifie que la *somme* e + e' est indépendante de l'unité de longueur choisie. Il est clair que l'*addition* des longueurs ainsi définis fait de $\mathcal{L}$ un demi-groupe à opérateurs isomorphe à R^+.

De même on peut mettre une relation d'ordre total sur $\mathcal{L}$, compatible avec la loi précédente telle que :

$$[m\ e_o \leqslant m'\ e_o] \Longleftrightarrow [m < m']$$

Il est clair que cet ordre est indépendant de l'unité choisie.

On montre alors que $L(V + W) \leqslant L(V) + L(W)$.

On montre que les trois vecteurs de base d'un repère orthogonal S ont même longueur, qui est appelée unité de longueur de la base et que nous désignerons par L(S). On montre alors que pour tout repère orthogonal S, $L(S(X)) = |X|\, L(S)$, où $|X|$ est la norme euclidienne du triplet $X \in R^3$.

Une unité de longueur e_o étant choisie, l'application qui à V fait correspondre $\left[\frac{L(V)}{e_o}\right]^2$ est une forme quadratique sur E définie positive ; il lui correspond un produit-scalaire euclidien, qui dépend de l'unité de longueur choisie ; nous supposerons ce choix fait une fois pour toutes.

II - PARTICULES, SYSTEMES ET REFERENTIELS -

1/ Nous appellerons *particule* (on dit aussi ligne de temps ou trajectoire d'Univers) toute courbe (variété de dimension 1 et, sauf indication contraire, de classe $\mathcal{C}^2$) dont la tangente est partout de genre temps ; nous la supposerons illimitée dans les deux sens.

Il en résulte qu'il y a au plus un point commun et un seul entre une particule P et un instant t quelconques ; on l'appelle *position absolue* de la particule P à l'instant t. Nous supposerons enfin que toute particule a une position à chaque instant de $t \in \mathcal{T}$.

On peut donc donner une représentation paramétrique propre de la particule en fonction du temps, et si l'on désigne par p l'opérateur qui à chaque instant fait correspondre la position de P, on a : $\forall t,\ P \cap t = \{p(t)\}$. L'opérateur p caractérise complètement la particule P et réciproquement ; aussi nous les identifierons le plus souvent dorénavant. On remarque que, $\forall t,\ C(P(t)) = t$ et par conséquent que $C.P = I_{\mathcal{T}}$; toute particule est donc un inverse-à-droite du chronométreur.

On dit que deux particules P et Q *coïncident à l'instant* t si elles ont la même position à l'instant t c'est-à-dire si $P(t) = Q(t)$.

Nous appellerons *translation absolue* (ou translation d'Univers) de la particule P entre t_o et t la différence : $P(t) - P(t_o)$, qui est un vecteur de temps.

2/ Nous appellerons *système* tout ensemble de particules.

Soit Φ un système, sa *position à l'instant* t sera la famille, indexée par Φ, des positions de ses particules à l'instant t, ce sera donc un opérateur $\varphi(t)$ défini sur Φ tel que : $\forall\, P \in \Phi$, $[\varphi(t)]\,(P) = p(t)$. Nous associons donc à tout système Φ un opérateur double φ défini sur $\mathcal{C}$ et tel que $\varphi(t)$ soit la position de Φ à l'instant t.

Nous appellerons *translation absolue* de Φ entre l'instant t_o et l'instant t et nous noterons $\varphi(t) - \varphi(t_o)$, l'opérateur qui applique Φ dans $\Delta\mathfrak{U}$ de telle sorte que :

$$\forall P \in \Phi,\ [\varphi(t) - \varphi(t_o)]\,(P) = \varphi(t)(P) - \varphi(t_o)(P) = P(t) - P(t_o)$$

Nous dirons que le système Φ est *régulier* si deux particules distinctes de Φ ne peuvent coïncider à l'instant t sans qu'il en soit de même à tout instant, ce qui revient à dire que la position $\varphi(t)$ est un opérateur régulier quel que soit t.

Etant donné un système Φ régulier, nous appellerons *déplacement absolu* (ou d'Univers) de Φ entre t_o et t l'opérateur régulier $\varphi(t).\,\varphi(t_o)^{-1}$ qui transforme les positions des éléments de Φ à l'instant t_o en leurs positions à l'instant t. Soit encore $A(t, t_o)$ cet opérateur, on aura d'une part :

$$\forall\ P \in \Phi,\ [A(t,t_o)](P\ (t_o)) = P(t),$$

et d'autre part :

$$A(t,t_o).\ \varphi(t_o) = \varphi(t)\ ;$$

de plus $A(t,t_o)^{-1} = A(t_o,t)$, enfin il est clair que :

$$A(t_1,t_o) = A(t_1,t).\,A(t,t_o),$$

ce que nous exprimerons en disant que les déplacements de Φ sont associables.

On a encore :

$$\varphi(t) - \varphi(t_o) = [A(t,t_o) - I_{\mathfrak{U}}]\,.\,\varphi(t_o) = [I_{\mathfrak{U}} - A(t_o,t)].\ \varphi(t).$$

3/ Nous dirons que le système Φ est un *référentiel* s'il est une partition de $\mathfrak{U}$. Alors il est nécessairement régulier et de plus l'opérateur $\varphi(t)$ établit une correspondance biunivoque entre Φ et t. Si l'on désigne par $\Phi(X) = \varphi(C(X))^{-1}\,(X)$ la *position de l'évènement* X *par rapport à* Φ, c'est-à-dire la particule de Φ qui passe par X, cet évènement est caractérisé par le couple $(t,P) = (C(X),\ \Phi\ (X)) \in \mathcal{C} \times \Phi$ et $t \cap P = \{X\}$.

Nous réserverons le nom de *repère* pour désigner un système de coordonnées dans un référentiel.

4/ Un cas particulier important est celui où les particules de Φ sont des droites parallèles, le référentiel sera alors dit *galiléen*. L'opérateur associé à toute particule $P \in \Phi$, et que nous identifions avec P, est alors affine et l'on a : $P(t) - P(t_o) = \hat{P}(t - t_o)$, l'opérateur linéaire $\hat{P}$, associé à P, étant le même pour toutes les particules de Φ, et $\hat{P}(t - t_o)$ étant le vecteur directeur, de durée $t - t_o$, des droites de Φ. Si l'on prend pour unité de temps la durée τ, le référentiel galiléen Φ est caractérisé par le vecteur unitaire $U = \hat{P}(\tau)$; alors :

$$\forall\ Q \in \Phi,\ Q(t + s\tau) = Q(t) + s\ U.$$

Mais on a aussi :

$$\hat{P}(t - t_o) = P(t) - P(t_o) = \varphi(t)\,(P) - \varphi(t_o)\,(P) = [\varphi(t) - \varphi(t_o)]\,(P),$$

donc :

$$\varphi(t) - \varphi(t_o) = \hat{\varphi}(t - t_o)$$

φ étant dans ce cas un opérateur affine et $\hat{\varphi}$ l'opérateur linéaire associé tel que $\hat{\varphi}(\tau)(P) = \hat{P}(\tau)$.

L'ensemble des translations absolues du référentiel galiléen Φ forme alors un espace vectoriel isomorphe à $\Delta \mathscr{T}$ par l'isomorphisme canonique $\hat{\varphi}$, de sorte que nous pourrons éventuellement identifier translations de Φ et durées.

L'ensemble des positions de Φ forme par suite un espace affine isomorphe à $\mathscr{T}$, par l'isomorphisme canonique φ, de sorte que nous pourrons éventuellement identifier positions de Φ et instants.

Enfin les déplacements absolus de Φ vérifient :

$$A(t_o + \tau, t_o) = [\varphi(t_o) + \hat{\varphi}(\tau)].\ \varphi(t_o)^{-1} = I_{t_o} + [\hat{\varphi}(\tau).\ \varphi(t_o)^{-1}]$$

III - SYSTEMES ET REFERENTIELS RIGIDES -

1/ Nous dirons que le système Φ est *rigide* si les positions au même instant de deux quelconques de ses particules ont une distance (mesurable en chaque instant par la norme euclidienne de l'espace t) qui est indépendante de l'instant considéré.

Il est clair qu'un système rigide est nécessairement régulier, et que les déplacements sont des isométries euclidiennes d'une position sur une autre. La distance des positions passe même de façon canonique aux particules, le système Φ devient alors un espace métrique et l'opérateur $\varphi(t)$ devient une isométrie de Φ sur une partie de t.

2/ Si le système rigide Φ comporte au moins quatre particules dont les positions en un instant t ne sont pas dans un même plan, donc sont affinement indépendantes, donc forment une base affine, il en est manifestement de même à tout instant. Nous dirons alors que le système Φ est de dimension 3. On montre dans ce cas que l'on peut prolonger d'une façon et d'une seule le déplacement $A(t, t_o)$ par une isométrie B qui applique t_o tout entier sur t tout entier et se trouve être un opérateur affine unitaire (on dit aussi orthogonal), voir l'annexe pour les notations).

Alors si $\hat{B}$ est l'opérateur linéaire associé à B, nous aurons $\bar{\hat{B}}.\hat{B} = \hat{B}.\bar{\hat{B}} = I_E$ et donc $|\text{dét } \hat{B}| = 1$. Comme B prolonge $A(t, t_o)$, on aura :

$$\forall (P_1, P_2) \in \Phi^2,\ B(P_1(t_o)) = P_1(t)$$

et :

$$\hat{B}(P_2(t_o) - P_1(t_o)) = B(P_2(t_o)) - B(P_1(t_o)) = P_2(t) - P_1(t).$$

On peut alors, étant donné un instant t_o, construire un système Ψ tel que pour tout $M_o \in t_o$ il existe une particule $Q \in \Psi$ définie par $Q(t) = B(M_o)$. Comme pour $t = t_o$, $B = I_{t_o}$, on a $Q(t_o) = M_o$ et on voit que Ψ est une extension de Φ. Cette extension est un référentiel puisque B est défini sur t_o tout entier, et elle est rigide puisque B est unitaire. De plus, en raison de l'associabilité des déplacements de Φ, il est clair que cette extension est indépendante du choix de t_o ; nous l'appellerons *extension canonique* de Φ ou référentiel associé au système Φ. Enfin on montre que Ψ est un espace affine réel de dimension 3 tel que si Q_1 et Q_2 sont deux particules de Ψ le vecteur $Q_2 - Q_1$ est défini par :

$$\forall t,\ [Q_2 - Q_1](t) = Q_2(t) - Q_1(t).$$

L'espace vectoriel associé $\Delta\Psi$, ou *étendue* de Ψ, est muni canoniquement d'un produit scalaire euclidien tel que $|Q_2 - Q_1| = |Q_2(t) - Q_1(t)|$, qui est bien indépendant de t.

Soit ψ l'opérateur double associé à Ψ, l'opérateur position $\psi(t)$ qui applique Ψ sur t est aussi une isométrie euclidienne donc un opérateur affine unitaire, l'opérateur linéaire associé $\widehat{\psi(t)}$ *ou position vectorielle absolue* de Ψ, ou position absolue de $\Delta\Psi$, étant tel que l'on ait :

$$\widehat{\psi(t)}\ (Q_2 - Q_1) = \psi(t)\ (Q_2) - \psi(t)\ (Q_1) = Q_2(t) - Q_1(t)$$

quelles que soient les particules Q_1 et Q_2 de Ψ ; alors :

$$\overline{\widehat{\psi(t)}}.\ \widehat{\psi(t)} = I_{\Delta\psi},\quad \widehat{\psi(t)}.\ \overline{\widehat{\psi(t)}} = I_E,$$

et l'opérateur $\widehat{\psi(t)}.\ \overline{\overline{\psi(t_o)}} = \hat{B}$ sera appelé *déplacement vectoriel absolu* de Ψ, ou déplacement absolu de $\Delta\Psi$, entre t_o et t.

Supposons que E et $\Delta\Psi$ soient munies de jauges euclidiennes quelconques, on a $|$ dét $\widehat{\psi(t)}| = 1$; mais comme les particules sont continues il en est de même pour ψ, et dét$(\widehat{\psi(t)})$ est constant et égal soit à + 1 soit à - 1 suivant les jauges choisies ; et par suite dét$(\hat{B}) = 1$ et $\hat{B}$ est une isométrie directe de E.

En fait on choisira généralement les orientations éventuelles de sorte que l'orientation des positions de $\Delta\ \Psi$, déduite de celle de $\Delta\ \Psi$, soit la même que celle de E, ce qui entraînera dét$(\widehat{\psi(t)}) = +1$; c'est ce que nous ferons dorénavant.

Remarquons qu'au début on aurait pu supposer seulement que Φ était de dimension 2 (c'est-à-dire comportant au moins 3 particules dont les positions sont affinement indépendantes) le prolongement B de $A(t, t_o)$ aurait été déterminé complètement à condition d'imposer en plus qu'il soit direct, ou dépende continûment de t.

3/ Un référentiel galiléen Φ est évidemment un référentiel rigide particulier, c'est donc aussi un espace affine euclidien.

L'espace vectoriel euclidien associé $\Delta\Phi$ peut éventuellement être identifié canoniquement à E par l'intermédiaire de l'isomorphisme $\widehat{\varphi(t)}$, position vectorielle absolue de Φ, qui est indépendant de t puisque $\widehat{\varphi(t)}\,(Q-P) = Q(t) - P(t) = Q(t_o) - P(t_o)$; dans ces conditions l'opérateur à valeur constante Q - P est identifié avec cette valeur.

De même le déplacement vectoriel $\widehat{A(t_o, t)}$ de Φ entre t_o et t est indépendant de t_o et t, c'est l'opérateur identique I_E.

IV - MOUVEMENT ABSOLU DES PARTICULES ET DES SYSTEMES RIGIDES -

L'étude du *mouvement absolu* sera pour nous l'étude des éléments différentiels du premier et du second ordre des particules (qui sont appelées aussi, rappelons-le, lignes de temps ou trajectoires d'Univers), et des relations entre ces éléments pour les particules d'un même système.

1/ Etant donnée une particule P, un instant t et une durée dt, nous poserons :

$$\lim_{s \to o} \frac{P(t + s\,dt) - P(t)}{s} = P'(t)\,(dt) = d\,[P(t)] \in \Delta\mathcal{U},$$

et nous appellerons *vitesse absolue* (on dit aussi quadri-vitesse) de la particule P à l'instant t l'opérateur linéaire P'(t) qui applique $\Delta\,\mathcal{C}$ dans $\Delta\mathcal{U}$.

Or on a :

$$\hat{C}\,(P'(t)\,(dt)) = \lim_{s \to o} \frac{C(P(t + s\,dt)) - C(P(t))}{s} = dt$$

$\forall$ dt $\in \Delta\,\mathcal{C}$, et par suite $\hat{C}.\,[P'(t)] = I_{\Delta\mathcal{C}}$. On voit donc que d[P(t)] est un vecteur de temps de durée dt, donc que la vitesse absolue n'indique rien d'autre que la direction de la tangente à la particule. On voit aussi que l'ensemble des vitesses absolues à n'importe quel instant de toutes les particules possibles est un hyperplan affine de $\mathcal{L}(\Delta\,\mathcal{C}, \Delta\,\mathcal{U})$, hyperplan dont la direction est l'hyperplan vectoriel formé des opérateurs V de $\mathcal{L}(\Delta\mathcal{C}, \Delta\,\mathcal{U})$ tels que $\hat{C}.\,V = O_{\Delta\mathcal{C}}$, c'est-à-dire que cette direction est l'espace $\mathcal{L}(\Delta\mathcal{C}, E)$. En résumé l'espace des vitesses absolues est un espace affine, et son espace vectoriel associé est $\mathcal{L}(\Delta\mathcal{C}, E)$. Ce dernier sera appelé *espace des vitesses relatives* , ainsi qu'on le verra plus loin.

2/ La dérivée seconde de la particule P à l'instant t ou *accélération absolue* de P à l'instant t sera P''(t) tel que, quelle que soit la durée fixe δt :

$$\lim_{s \to o} \frac{P'(t + s\,\delta\,t) - P'(t)}{s} = P''(t)\,(\delta t) = \delta[P'(t)] \in \mathcal{L}(\Delta\,\mathcal{C}, \Delta\,\mathcal{U})$$

On verra plus loin que P''(t) représente l'accélération de la particule P par rapport à tout référentiel galiléen.

Il est entendu, comme la plupart du temps en Mécanique classique, que nous prenons le temps comme variable indépendante. Quelle que soit la durée fixe dt, on aura :

$$\delta d[P(t)] = P''(t)\,(\delta t)\,(dt) = d\,\delta\,[P(t)] \in \mathscr{T}(\Delta\mathscr{T}, \Delta\mathscr{U}),$$

car on sait que $P''(t)$ est un opérateur bilinéaire et symétrique sur les durées.

On a :

$$\hat{C}(P''(t)\,(\delta t)\,(dt)) = \lim_{s \to o} \hat{C}\left(\frac{P'(t+s\;\delta t)\,(dt) - P'(t)\,(dt)}{s}\right) = \lim_{s \to o} \frac{dt-dt}{s} = 0$$

et :

$$\hat{C}.\,[P''(t)\,(\delta\,t)] = O_{\Delta\mathscr{T}}.$$

Nous appellerons *espace des accélérations* l'ensemble de tous les $P''(t)$ possibles; c'est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de l'espace $\mathscr{L}(\Delta\mathscr{T}, \mathscr{L}(\Delta\mathscr{T}, \Delta\mathscr{U}))$.

Pour mieux faire apparaître cela, on peut faire choix une fois pour toutes d'une unité de temps, soit la durée τ, et poser $dt = \tau$. On peut ensuite identifier toute vitesse $P'(t)$ avec son image $U = P'(t)\,(\tau) = d\,[P(t)]$, que nous appellerons le *cap* de P à l'instant t, car il y a correspondance biunivoque entre les $P'(t)$ et $P'(t)\,(\tau)$. On peut faire de même pour toute accélération $P''(t)$ et son image $Y = P''(t)\,(\tau)\,(\tau) = d^2[P(t)]$ puisque $P''(t)$ est bilinéaire et symétrique.

Les caps sont des vecteurs de temps de même durée τ, tandis que les images des vitesses relatives (différences de caps) et des accélérations sont des vecteurs d'étendue.

Le couple $(P'(t), P''(t))$ caractérise le plan osculateur à la particule P à l'instant t.

3/ Soit maintenant Φ un système rigide et φ l'opérateur du référentiel rigide associé à Φ. Si Q_1 et Q_2 sont deux particules de Φ, on a quel que soit t :

$$Q_2(t) - Q_1(t) = \varphi(t)\,(Q_2) - \varphi(t)\,(Q_1) = \widehat{\varphi(t)}\,(Q_2 - Q_1)$$

et :

$$Q_2'(t)\,(dt) - Q_1'(t)\,(dt) = \widehat{\varphi'(t)\,(dt)}\,(Q_2 - Q_1).$$

Or :

$$\widehat{\varphi(t)}.\overline{\overline{\varphi(t)}} = I_E \quad \text{et} \quad \widehat{\varphi'(t)\,(dt)}.\overline{\overline{\varphi(t)}} + \widehat{\varphi(t)}.\overline{\overline{\varphi'(t)\,(dt)}} = 0$$

donc :

$$\widehat{\varphi'(t)\,(dt)}.\overline{\overline{\varphi(t)}} = -\widehat{\varphi(t)}.\overline{\overline{\varphi'(t)\,(dt)}} = -\overline{\overline{\widehat{\varphi'(t)\,(dt)}.\overline{\overline{\varphi(t)}}}}$$

et $\widehat{\varphi'(t)\,(dt)}.\overline{\overline{\varphi(t)}}$ est un endomorphisme antihermitien (ou antisymétrique) de l'espace vectoriel E. Comme E est de dimension 3, si on le suppose orienté il existe un vecteur et un seul $\Lambda \in E$ tel que si l'on désigne par $J(\Lambda)$ l'opérateur de produit vectoriel par Λ (c'est-à-dire que $J(V)(W) = V_\wedge W$) on ait :

$$\widehat{\varphi'(t)\,(dt)}.\overline{\overline{\varphi(t)}} = J(\Lambda).$$

On pose :

$$\Lambda = \lambda(t)\,(dt)$$

et $\lambda(t)$ est un opérateur linéaire qui applique $\Delta\mathscr{T}$ dans E, que nous appellerons la *rotation instantanée absolue de* $\Delta\Phi$ *à l'instant* t. Il représente la rotation instantanée de Φ par rapport à tout référentiel galiléen, ainsi que nous le verrons plus loin.

On a donc :

$$\widehat{\varphi'(t)\,(dt)} = J(\Lambda).\,\widehat{\varphi(t)} = J(\widehat{\varphi(t)}\,(\Lambda))$$

et par suite :

$$Q_2'(t)\,(dt) - Q_1'(t)\,(dt) = [J(\Lambda).\,\widehat{\varphi(t)}](Q_2 - Q_1) = J(\Lambda)\,(Q_2(t) - Q_1(t))$$

soit :

$$\boxed{U_2 - U_1 = J(\Lambda)(A - A_1) = \Lambda \wedge (A_2 - A_1)}$$

en posant :

$$A = Q(t) \quad \text{et} \quad U = Q'(t)(dt).$$

Si $\lambda(t) = 0$, $\Lambda = 0$ et $U_2 = U_1$; la vitesse absolue est donc la même pour toutes les particules à l'instant t, et il existe un référentiel galiléen tangent à Φ à l'instant t, défini par le cap commun U.

Si $\lambda = 0$, ceci est vrai à chaque instant, mais le référentiel galiléen tangent peut varier avec l'instant.

Si enfin le cap U, commun à toutes les particules de Φ, est indépendant de l'instant, les trajectoires sont des droites de temps parallèles et le référentiel Φ lui-même est galiléen. On a alors :

$$Q'(t)(s\tau) = s\,\hat{Q}(\tau) = s\,U, \quad \varphi'(t)(dt)(Q) = d[\varphi(t)(Q)] = d[Q(t)] = Q'(t)(dt) = \hat{Q}(dt),$$

$$\varphi(t+dt) - \varphi(t) = \hat{\varphi}(dt) = \varphi'(t)(dt)$$

donc :

$$\varphi'(t) = \hat{\varphi},$$

enfin :

$$\widehat{\varphi'(t)(dt)} = 0$$

De plus dans un référentiel galiléen, les vitesses absolues étant constantes, les accélérations absolues sont constamment nulles.

V - MOUVEMENT RELATIVEMENT A UN REFERENTIEL RIGIDE -

1/ Tout observateur détermine, à un instant donné, les positions des particules par des mesures d'angles et de distances par rapport à certaines directions et certains points qui sont les positions, à cet instant, d'éléments d'un référentiel Φ. Celui-ci aura été choisi pour sa commodité et, dans le cas qui nous occupe ici, c'est un référentiel *rigide*. Ce pourrait être l'extension par le procédé étudié en III d'un solide rigide qui joue un rôle remarquable dans le problème étudié.

L'observateur dispose alors d'un espace Φ où il peut porter à chaque instant t la position de toute particule P qu'il observe, en indiquant la particule :

$$Q = \Phi(P(t)) = \varphi(t)^{-1}(P(t)) \in \Phi$$

qui coïncide avec P à cet instant t et que l'on appelle élément de Φ coïncidant avec P à l'instant t ou *position de* P *par rapport à* Φ *à l'instant* t. On a évidemment à l'instant t : $Q(t) = P(t)$, et même quel que soit t : $\Phi(P(t))(t) = P(t)$. Par contre $Q(t_1) = \Phi(P(t))(t_1)$, qui est la position à l'instant t_1 de la particule de Φ qui coïncide avec P à l'instant t, diffère en général de $P(t_1)$ si $t_1 \neq t$ ou si $P \notin \Phi$.

Comme $\Phi(P(t))$ est une particule de Φ, on a donc $\Phi(P(t))(t_1) = \varphi(t_1)(\Phi(P(t))) = [\varphi(t_1).\varphi(t)^{-1}](P(t))$, quels que soient t et t_1.

Nous dirons que le graphe :

$$\{(t,Q) \; ; \; Q = \Phi(P(t)), \; t \in \mathcal{T}\}$$

représente l'*évolution* de P dans Φ, et que la courbe de l'espace $\Phi : \{Q \; ; \; Q = \Phi(P(t)), \; t \in \mathcal{T}\}$ est la *trajectoire de* P *par rapport à* Φ.

La *translation de la particule* P dans Φ entre t et t_1 sera le vecteur : $\Phi(P(t_1)) - \Phi(P(t)) \in \Delta\,\Phi$; on peut lui faire correspondre un vecteur de E en prenant sa position à un instant t_o, mais il n'y a pas de raison de prendre $t_o = t$ plutôt que $t_o = t_1$, et cette position dépendra en général de t_o si Φ n'est pas galiléen.

2/ On définira tout naturellement la *vitesse d'évolution de* P *dans* Φ à l'instant t comme étant l'opérateur $[\Phi . P]'(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{C}, \Delta\Phi)$. On a alors :

$$\lim_{s \to 0} \frac{\Phi(P(t + sdt)) - \Phi(P(t))}{s} = [\Phi . P]'(t)(dt) = dQ \in \Delta\Phi.$$

Si l'on prend $dt = \tau \neq 0$, où τ est l'unité de temps, l'opérateur $[\Phi . P]'(t)$ est entièrement déterminé par le vecteur dQ que nous appellerons *image de la vitesse d'évolution.*

La position de dQ à l'instant t_0 sera le vecteur :

$$\widehat{\varphi(t_0)}(dQ) = [dQ](t_0) = [\Phi . P]'(t)(dt)(t_0) \in E.$$

Mais c'est évidemment la position V de dQ à l'instant t qui sera intéressante et c'est celle-là que nous appellerons *image de la vitesse relative de* P *par rapport à* Φ à l'instant t. On aura :

$$V = \varphi(t)(dQ) = [dQ](t) = [\Phi . P]'(t)(dt)(t) \in E.$$

Mais on a d'autre part :

$$[dQ](t) = d[Q(t)] - Q'(t)(dt) = d[P(t)] - Q'(t)(dt) = P'(t)(dt) - Q'(t)(dt) = [P'(t) - Q'(t)](dt)$$

On a donc le résultat remarquable que la *vitesse relative de* P *par rapport à* Φ *l'instant* t est justement :

$$P'(t) - Q'(t) = [P - Q]'(t).$$

On peut encore écrire, en désignant par U le cap de l'élément coïncidant de Φ :

$$\boxed{V = U - U_\Phi}$$

En résumé : la vitesse relative d'une particule est égale à la différence entre sa vitesse absolue et la vitesse absolue de l'élément coïncidant.

Si on a deux particules P_1 et P_2 dont les positions absolues à l'instant t sont $A_1 = P_1(t)$ et $A_2 = P_2(t)$, on a :

$$V_2 - V_1 = U_2 - U_1 - [U_{\Phi_2} - U_{\Phi_1}] = U_2 - U_1 - J(\Lambda)(A_2 - A_1)$$

où Λ est la rotation instantanée de Φ à l'instant t.

Si le référentiel Φ est galiléen, le vecteur U est indépendant de P et du temps, c'est le cap constant du référentiel, la différence de vitesse par rapport à deux particules est égale à la différence de leurs caps et, plus précisément, V ne dépend que de U et de Φ. D'ailleurs le projecteur $I_{\Delta\mathcal{U}} - [U_\Phi . \hat{C}]$ sur E parallèlement à U_Φ ne dépends que de Φ, or on a évidemment :

$$V = [I - U_\Phi . \hat{C}](U).$$

3/ *L'accélération d'évolution de* P *dans* Φ à l'instant t sera par définition l'opérateur bilinéaire et symétrique sur les durées $[\Phi . P]''(t)$. On a :

$$\lim_{s \to 0} \frac{[\Phi . P]'(t + s\delta t) - [\Phi . P]'(t)}{s} = [\Phi . P]''(t)(\delta t),$$

et :

$$\delta[dQ] = [\Phi . P]''(t)(\delta t)(dt) = d[\delta Q].$$

On prendra maintenant $\delta t = dt = \tau$, unité de temps, et l'on sait que l'accélération $[\Phi . P]''(t)$ sera caractérisée par son image quadratique :

$$d^2Q = [\Phi . P]''(t)(\tau)(\tau) \in \Delta\Phi.$$

C'est la position Γ de ce vecteur à l'instant t que nous appellerons l'*image de l'accélération relative de* P *par rapport à* Φ *à l'instant* t. On a donc :

$$\begin{aligned}\Gamma &= [\Phi \,.\, P]''(t)\,(dt)\,(dt)\,(t) = [\,d^2 Q]\,(t)\\ &= d^2[Q(t)] - Q''(t)\,(dt)\,(dt) - [dQ]'(t)\,(dt) - [\,dQ']\,(t)\,(dt)\end{aligned}$$

mais :

$$\begin{aligned}[dQ']\,(t)(dt) = [\,dQ]'(t)(dt) &= \lim_{s\to 0} \frac{[dQ](t+s\,dt) - [dQ\,](t)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{[\,\widehat{\varphi(t+s\,dt)} - \widehat{\varphi(t)}]\,(dQ)}{s} = \widehat{\varphi'(t)(dt)}(dQ)\\ &= J(\Lambda)\,\widehat{(\varphi(t)}\,(dQ)) = J(\Lambda)\,([dQ](t)) = J(\Lambda)\,(V) = \Lambda \wedge V,\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$Q(t) = P(t) \Longrightarrow d^2[Q(t)] = P''(t)\,(dt)\,(dt)$$

puisque P est indépendant de t. En définitive on a :

$$\boxed{\Gamma = Y - Y_\Phi - 2\,\Lambda \wedge V},$$

où Y et Y_Φ sont respectivement les images des accélérations absolues de P et de l'élément de Φ coïncidant avec P, où Λ est l'image de la rotation instantannée absolue de Φ avec P, et où V est l'image de la vitesse *relative* de P par rapport à Φ.

Si le référentiel Φ est galiléen, $\Lambda = 0$, $Y_\Phi = 0$ et l'on a simplement $\Gamma = Y$, indépendant de Φ (galiléen).

4/ Etudions maintenant les particularité du mouvement d'un système Ψ par rapport à un référentiel rigide Φ.

La *position relative de* Ψ *dans* Φ à l'instant t sera l'opérateur qui à tout $P \in \Psi$ fait correspondre $Q \in \Phi$ tel que $P(t) = Q(t)$. Or on a :

$$Q = \Phi\,(P(t)) = \varphi\,(t)^{-1}\,(P(t)) = \varphi\,(t)^{-1}(\psi(t)(P)) = [\varphi\,(t)^{-1}.\ \psi(t)]\,(P)$$

La position relative de Ψ dans Φ à l'instant t est donc l'opérateur $\varphi\,(t)^{-1}.\,\psi\,(t)$ qui applique Ψ dans Φ. Si Ψ est régulier, on définira le *déplacement relatif de* Ψ *dans* Φ entre t_0 et t, qui sera de même l'opérateur $\varphi(t)^{-1}.\,\psi\,(t).\,\psi\,(t_0)^{-1}.\,\varphi\,(t_0)$, qui applique une partie de Φ dans Φ.

Si Ψ est de plus un référentiel rigide on définira sa position vectorielle relative, ou *position relative de* $\Delta\Psi$: $\overline{\widehat{\varphi(t)}}.\,\widehat{\psi(t)}$ qui applique $\Delta\Psi$ dans $\Delta\Phi$, et son *déplacement vectoriel relatif* entre t_0 et t ou déplacement relatif de $\Delta\Phi$, soit l'opérateur linéaire :

$$\overline{\widehat{\varphi(t)}}.\,\widehat{\psi(t)}.\overline{\widehat{\psi\,(t_0)}}.\,\widehat{\varphi\,(t_0)}$$

qui est une isométrie *directe* de $\Delta\Phi$.

Dans ce dernier cas, quand le premier référentiel est galiléen, et que $\widehat{\varphi\,(t)}$ est indépendant de t, si l'on identifie canoniquement $\Delta\Phi$ avec E, c'est-à-dire $\widehat{\varphi(t)}$ avec I, le déplacement de $\Delta\Psi$ par rapport à $\Delta\Phi$ sera identifié avec $\widehat{\psi(t)}.\,\overline{\widehat{\psi(t_0)}}$ qui est le déplacement absolu de $\Delta\psi$.

Etudions maintenant les particularités des éléments différentiels du premier ordre, dans le cas où Ψ est un référentiel rigide.

Soit $P \in \Psi$, de cap U_P à l'instant t, et Q l'élément de Φ coïncidant avec P, de cap U_Q à l'instant t, l'image de la vitesse relative de P par rapport à Φ est à l'instant t : $V = U_P - U_Q$, mais comme en même temps Q est l'élément de Φ coïncidant avec P à l'instant t, l'image de la vitesse relative de Q par rapport à Ψ à l'instant t est $U_Q - U_P = -V$.

Soient maintenant P_1 et P_2 deux particules quelconques de Ψ, on a :

$$\begin{aligned}V_2 - V_1 &= U_{P_2} - U_{Q_2} - [U_{P_1} - U_{Q_1}] = U_{P_2} - U_{P_1} - [U_{Q_2} - U_{Q_1}]\\ &= J(\Lambda_\psi)\,(A_2 - A_1) - J(\Lambda_\Phi)\,(A_2 - A_1)\\ &= J(\Lambda_\psi - \Lambda_\Phi)\,(A_2 - A_1)\end{aligned}$$

où $A_1 = P_1(t) = Q_1(t)$ et $A_2 = P_2(t) = Q_2(t)$, Λ_ψ et Λ_Φ étant les images des rotations instantanées absolues de Ψ et Φ, le vecteur $\Omega = \Lambda_\psi - \Lambda_\Phi$ est appelé l'*image de la rotation instantanée relative* de Ψ par rapport à Φ ; on voit que celle de Φ par rapport à Ψ est $\Lambda_\Phi - \Lambda_\psi = -\Omega$.

Notons que si Φ est galiléen, $\Lambda_\Phi = 0$ et l'on a $\Omega = \Lambda_\psi$.

Le vecteur $\overline{\overline{\varphi(t)}}(\Omega)$ est la position de Ω dans Φ à l'instant t, et le vecteur $\overline{\overline{\psi(t)}}(\Omega)$ est la position de Ω dans Ψ à l'instant t.

Montrons qu'il existe des particules P du référentiel telles que la position V de leur vitesse par rapport à un instant donné t soit parallèle à $\Omega \neq 0$ à cet instant. Soit P une particule quelconque de Ψ dont la vitesse est V_o, la position absolue A_o, tandis que la position absolue de P_o est A, le tout au même instant donné.

On a $V = V_o + \Omega_\wedge (A - A_o)$ et l'on veut que :

$$O = \Omega_\wedge V = \Omega_\wedge V_o + \Omega . \bar{\Omega} . [A - A_o] - [A - A_o] . \bar{\Omega} . \Omega \quad \text{(double produit vectoriel)}$$

On doit donc avoir :

$$A - A_o = \frac{\Omega_\wedge V_o + \Omega . \bar{\Omega} . [A - A_o]}{\bar{\Omega} . \Omega}$$

et par suite :

$$\Omega_\wedge \left(A - A_o - \frac{\Omega_\wedge V_o}{\bar{\Omega}\Omega}\right) = 0$$

Mais ceci est l'équation d'une droite affine de t, soit D, parallèle à Ω et passant, entre autres, par le point :

$$A_1 = A_o + \frac{\Omega_\wedge V_o}{\bar{\Omega} . \Omega}.$$

Or $P_1 = \psi(t)^{-1}(A_1)$ est bien une particule du lieu car sa vitesse est :

$$V_1 = V_o + \Omega_\wedge \left(\frac{\Omega_\wedge V_o}{\bar{\Omega} . \Omega}\right) = \Omega \frac{\bar{\Omega} . V_o}{\bar{\Omega} . \Omega}.$$

On vérifie sans peine que tous les points de la droite D donnent de même des particules du lieu formant une droite affine de Ψ que l'on appelle l'*axe instantanée de rotation de Ψ par rapport à Φ à l'instant* t, tandis que D est sa position à l'instant t et que la position de D par rapport à Ψ à l'instant t est l'axe instantané de rotation de Φ par rapport à Ψ à l'instant t.

Toutes les particules de l'axe ont même vitesse, que l'on appelle *translation instantanée de Ψ par rapport à Φ à l'instant* t.

VI - COMPOSITION DES MOUVEMENTS RELATIFS -

Il s'agit maintenant de comparer les mouvements d'une même particule par rapport à deux référentiels différents.

Les vitesses et accélérations d'évolution n'étant pas dans le même espace dans les deux cas, on écrira seulement les formules, plus simples, pour les vitesses et accélérations relatives dont les images sont dans le même espace E, ce qui a été la raison de leur introduction.

On prendra donc deux référentiels rigides Φ et Ψ, une particule P dont les éléments coïncidants dans Φ et Ψ seront notés Q et R respectivement. Les vecteurs absolus attachés à ces particules seront notés par l'indice correspondant, et les vecteurs relatifs en indiquant de plus le référentiel concerné. Les calculs se passent alors de commentaires.

1/ Composition des vitesses relatives.

$$V_{P/\psi} = U_P - U_R = U_P - U_Q + U_Q - U_R = V_{P/\Phi} + V_{Q/\psi}$$

La vitesse relative de P par rapport à Ψ est égale à la vitesse relative de P par rapport à Φ plus la vitesse relative par rapport à Ψ de l'élément de Φ coïncidant avec P, cette dernière étant appelée *vitesse d'entrainement* de P avec Φ par rapport à Ψ.

2/ Composition des accélérations relatives.

$$\begin{aligned}\Gamma_{P/\psi} &= Y_P - Y_R - 2\,\Lambda_\psi \wedge V_{P/\psi} \\ &= Y_P - Y_Q + Y_Q - Y_R - 2\,\Lambda_\psi \wedge (V_{P/\Phi} + V_{Q/\psi}) \\ &= \Gamma_{P/\Phi} + 2\,\Lambda_\Phi \wedge V_{P/\Phi} + \Gamma_{Q/\psi} - 2\,\Lambda_\psi \wedge V_{P/\Phi} \\ &= \Gamma_{P/\Phi} + \Gamma_{Q/\psi} + 2\,\Omega_{\Phi/\psi} \wedge V_{P/\Phi}.\end{aligned}$$

On sait que le vecteur $\Gamma_{Q/\psi}$ est appelé *accélération d'entrainement*, et que le vecteur $2\,\Omega_{\Phi/\psi} \wedge V_{P/\Phi}$ est appelé *accélération complémentaire* ou de Coriolis.

La formule obtenue peut encore se mettre sous la forme :

$$\Gamma_{P/\Phi} = \Gamma_{P/\psi} - \Gamma_{Q/\psi} - 2\,\Omega_{\Phi/\psi} \wedge V_{P/\Phi}$$

où quand Ψ est un référentiel galiléen on retrouve l'expression de l'accélération relative en fonction des accélérations et rotation instantannée absolues et de la vitesse relative.

Si les deux référentiels sont galiléens, alors :

$$\Gamma_{P/\psi} = \Gamma_{P/\Phi} = Y_P.$$

3/ Composition des rotations instantanées relatives.

Avec trois référentiels rigides Φ, Ψ et Θ, on a :

$$\Omega_{\theta/\psi} = \Lambda_\theta - \Lambda_\psi = \Lambda_\theta - \Lambda_\Phi + \Lambda_\Phi - \Lambda_\psi = \Omega_{\theta/\Phi} + \Omega_{\Phi/\psi}.$$

SECONDE PARTIE

RELATIVITÉ RESTREINTE

O - OBSERVATIONS PRELIMINAIRES -

La nécessité de se placer dans un espace-temps (d'ailleurs hyperbolique) est posée en Relativité Restreinte dès le départ et l'on pourrait croire que le parti en soit toujours pris sans remords. Cependant, même dans ce cas il semble que l'on craigne encore trop souvent que cela entraîne une gêne (mathématique, physique ou métaphysique). C'est sans doute ce qui explique la tendance assez fréquente à revenir dès la première occasion à un espace de bonne apparence euclidienne, soit en prenant des coordonnées partiellement complexes, soit en abandonnant l'espace-temps pour travailler dans un espace à 3 dimensions qui, bien souvent, n'a guère de signification objective (ainsi dans la méthode de C. Møller).

Des méthodes de ce genre nous paraissent en fait aussi peu satisfaisantes mathématiquement que physiquement, et elles ne sont pas sans danger, nécessitant parfois des correctifs et restrictions sous-entendus, ainsi quand il arrive que l'on dise que les vitesses relatives de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_2$ et de $\mathcal{R}_2$ par rapport à $\mathcal{R}_1$ sont des vecteurs opposés alors qu'elles ne sont pas colinéaires dans l'espace temps, ce que des figures "à 3 dimensions" d'espace ne peuvent montrer.

Il nous semble qu'il est bien préférable dorénavant de s'en passer complètement d'autant qu'on peut arriver beaucoup plus simplement aux résultats qui ont un sens avec des axiomes analogues à ceux que nous avons utilisés dans la première partie, et un formalisme qui sera même plus dépouillé ici car nous nous en tiendrons aux référentiels galiléens. En particulier les vecteurs utilisés appartiendront tous à un même espace vectoriel quel que soit le système de référence. Nous obtiendrons ainsi, par des calculs élémentaires, des formules vectorielles commodes et d'un emploi rigoureux et automatique, sans aucune référence nécessaire aux choix de repères d'étendue dans les référentiels utilisés puisque nous ne travaillons qu'avec des éléments invariants (les formules classiques des transformations générale et spéciale de Lorentz apparaissent alors comme des applications particulières des principes). Il nous semble que la signification objective est ainsi mieux mise en évidence et certaines notions qui en sont dépourvues ne se retrouvent plus.

Pour être plus directs, nous sommes partis des axiomes qui nous ont semblé les plus simples du point de vue mathématique, mais on aurait pu aussi déduire ceux-ci des groupes fondamentaux, et donner en particulier une définition géométrique de la grandeur "intervalle d'univers" comme il a été fait pour la longueur dans la première partie ; ceci aurait d'ailleurs mieux fait voir la ressemblance entre les deux parties.

Enfin précisons bien qu'il s'agit uniquement d'un développement mathématique a posteriori, et non de l'étude de la genèse de la théorie à partir de l'expérience, ni de l'adéquation de cette théorie à la réalité.

I - ENONCE GENERAUX -

1/ On suppose que l'*Univers* est un espace affine réél $\mathcal{U}$ de dimension 4.

Ses éléments sont appelés *évènements*.

2/ On suppose que l'espace vectoriel $\Delta\mathcal{U}$, associé à $\mathcal{U}$, est muni d'un produit scalaire dont la forme quadratique associée a pour signature : (+, - , - , -).

Les vecteurs à carré positif sont appelés *vecteurs de temps ;* les vecteurs à carré négatif sont appelés *vecteurs d'étendue* (en conservant le mot espace pour son sens mathématique général) ; les vecteurs à carré nul (ou isotropes) sont appelés *vecteurs de lumière*. On emploi une terminologie similaire pour les droites de $\Delta\mathcal{U}$ ainsi que pour celles de $\mathcal{U}$.

On partage alors les vecteurs de temps (qui sont intérieurs au cone de lumière) en deux classes (les vecteurs d'une même classe étant intérieurs à un demi-cône) ; le produit scalaire de deux vecteurs de temps est alors positif ou négatif suivant qu'ils appartiennent à la même classe ou non.

On suppose que l'une de ces deux classes est appelée *avenir* et l'autre *passé* de $\Delta\mathcal{U}$. On peut alors définir une relation d'ordre strict (partiel) sur l'univers $\mathcal{U}$:

Si B - A est un vecteur d'avenir, A - B est un vecteur de passé et l'on écrit $B > A$ ou $A < B$; on dit alors que l'évènement B est *postérieur* à l'évènement A, ou encore que A est *antérieur* à B.

Nous appellerons *cornet*(1) *de lumière de* A l'ensemble des évènements X tels que les vecteurs X - A soient des vecteurs de lumière ; il sépare dans l'univers les évènements postérieurs à A *ou avenir de* A, les évènements antérieurs à A ou *passé de* A et les évènements extérieurs qui forment l'*ailleurs de* A.

3/ On suppose que les *particules* sont des courbes de $\mathcal{U}$ (variétés de dimension 1 et, sauf indication contraire, de classe $\mathcal{C}^2$), dont le vecteur tangent est partout un vecteur de temps.

Nous appelerons *cap* (ou vitesse absolue, on dit aussi quadrivitesse) de la particule P en $A \in P$, le vecteur unitaire d'avenir U tangent en A à P ; si s est une abcisse curviligne sur P, croissant du passé à l'avenir, on peut écrire :

$$U = \frac{d_P A}{d_P s} \tag{1}$$

Si alors U_1 et U_2 sont deux caps, les carrés scalaires $\overline{U}_1 . U_1$ et $\overline{U}_2 . U_2$ sont égaux à 1 et le produit scalaire $\overline{U}_1 . U_2$ est positif (voir l'annexe pour les notations).

On dit que les particules P et Q *coïncident* en A si l'évènement A est une position commune à P et à Q.

4/ Il n'y a plus ici de temps universel mais un temps propre associé à chaque particule. On prend comme point de départ non pas la simultanéité perçue immédiatement (et qui dépendrait, même en mécanique classique et dans un référentiel galiléen, de la position de l'observateur dans le référentiel au moment où il reçoit le signal lumineux), mais une simultanéité médiate, élaborée d'après un "aller et retour" du rayon lumineux.

En ce sens nous dirons que deux évènements A et B sont *simultanés par rapport à la particule* P s'il existe un évènement $M \in P$ équidistant *le long de* P de A' et A'' intersections de P avec le cornet de lumière de A, ainsi que de B' et B'' intersections de P avec le cornet de lumière de B.

On voit que cette simultanéité par rapport à P est une relation d'équivalence dans $\mathcal{U}$; nous appellerons *temps propre* de P l'ensemble $\mathcal{T}_P$ de ces classes ; la classe de l'évènement A dans $\mathcal{T}_P$ sera appelée l'*instant de* A en temps de P, ou par rapport à P.

Il est clair qu'il y a un représentant dans P pour chaque classe et que l'on pourrait identifier $\mathcal{T}_P$ avec P, mais nous ne le ferons pas.

Le temps de P est totalement ordonné du passé vers l'avenir et possède une structure affine de dimension 1, déduite de celle des abcisses curvilignes sur P. L'espace vectoriel associe $\Delta\mathcal{T}_P$, dont les éléments sont appelés *durées par rapport à* P, peut être identifié à R en prenant une base (unité de durée) ; nous supposerons que cela est fait une fois pour toutes de telle sorte que la durée de $A \in P$ à $B \in P$ soit l'abcisse curviligne de B mesurée sur P à partir de A et comptée positivement vers l'avenir (la célérité de la lumière est alors égale à 1).

II - REFERENTIELS GALILEENS -

1/ On peut chercher à constituer un *référentiel* $\mathcal{R}$ par une partition de l'univers $\mathcal{U}$ en particules, et à caractériser un évènement A par la particule P du référentiel $\mathcal{R}$ qui passe par A ainsi que par l'instant t de A par rapport à P.

Mais si on a deux évènements, appartenant à des particules de $\mathcal{R}$ différentes, la durée de l'un à l'autre ne sera pas en général la même suivant que l'on se rapporte à une particule ou à une autre, et il faudra, par exemple, élire une particule de référence dans $\mathcal{R}$ dont le temps sera le temps "légal" dans $\mathcal{R}$.

2/ Il y a cependant un cas simple où cette question ne se pose pas, les durées étant indépendantes de la particule origine choisie, c'est quand le référentiel est formé de droites (de temps)

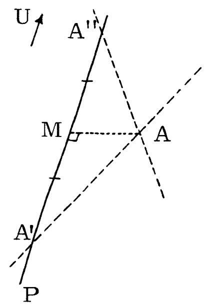
---

(1) Nous emploierons ce mot pour éviter l'ambigüité qui existe avec le mot cône entre la surface et le "volume".

parallèles ; on dit alors que le référentiel est *galiléen*, c'est ce cas que nous supposerons dorénavant.

Toutes les particules d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ ont donc le même cap, soit U, qui détermine entièrement le référentiel.

Fig. 1



Soit la particule $P \in \mathcal{R}$, (voir figure 1), pour tout $A \in \mathcal{U}$ posons :

$$M = \frac{A' + A''}{2} \quad \text{avec} \quad A' \in P, \quad A'' \in P$$

et :

$$[\overline{A'' - A}].\,[A'' - A] = 0 = [\overline{A - A'}].\,[A - A'] \; ;$$

on a alors :

$$[\overline{A'' - A'}].\,[A - M] = [\overline{A'' - A + A - A'}].\; \frac{A - A' + A - A''}{2} = 0$$

Comme $A'' - A'$ est parallèle à U, on voit que M est la projection orthogonale de A sur P, et que par suite les instants de $\mathcal{T}_P$ sont des hyperplans orthogonaux à P, donc à toutes les particules de $\mathcal{R}$. La famile des hyperplans affines orthogonaux à U est le temps commun à toutes les particules de $\mathcal{R}$, on l'appelle le *temps du référentiel galiléen* $\mathcal{R}$, et on le désigne par $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$.

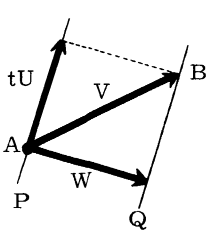
Alors la durée de A à B est égale à $\overline{U}(B-A)$, elle ne dépend donc que du vecteur B-A et l'on peut parler de la *durée d'un vecteur en temps de* $\mathcal{R}$.

Les vecteurs de durée nulle dans $\mathcal{R}$ forment l'hyperplan de $\Delta\mathcal{U}$ orthogonal à U que nous appellerons l'*étendue de* $\mathcal{R}$. C'est donc un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\Delta\mathcal{R}$, où la forme quadratique induite par celle de $\Delta\mathcal{U}$ est définie négative. Cette étendue de $\mathcal{R}$ peut être identifiée par un isomorphisme canonique à l'espace vectoriel $\Delta\mathcal{R}$ associé au référentiel $\mathcal{R}$ muni de la structure affine déduite de celle de $\mathcal{U}$, ce que nous ferons. Il faudra seulement prendre garde que le produit scalaire géométrique habituel de deux vecteurs V et W de $\Delta\mathcal{R}$ aura pour valeur ici $(-\overline{V}.W)$ à cause de la signature de l'univers.

Soient P et Q deux particules de $\mathcal{R}$ et soit θ un instant de $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$, hyperplan orthogonal à P et Q qu'il coupe en A et B respectivement ; le vecteur B-A est bien indépendant de θ et l'on pose $Q - P = B - A$.

Si maintenant A et B sont deux évènements quelconques et si P et Q sont les positions respectives de A et B dans $\mathcal{R}$, $U.\overline{U}$ étant le projecteur orthogonal sur U et $[I-U\overline{U}]$ le projecteur orthogonal sur $\Delta\mathcal{R}$, le vecteur $Q - P = [I-U.\overline{U}](B - A)$ est la position (ou étendue) du vecteur B - A dans $\Delta\mathcal{R}$.

Fig. 2



Un vecteur quelconque V est entièrement déterminé par :

$$\boxed{\text{sa durée } t = \overline{U}.V, \text{ et sa position } W = [I-U.\overline{U}]\,V} \tag{2}$$

par rapport à un référentiel galiléen donné $\mathcal{R}$ de cap U ; on a d'ailleurs :

$$V = tU + W \qquad \text{(voir figure 2).} \tag{3}$$

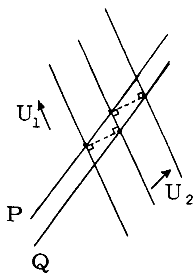
On appellera *distance par rapport à* $\mathcal{R}$ de A à B le nombre positif ou nul qui mesure la distance de la position P de A dans $\mathcal{R}$ à la position Q de B dans $\mathcal{R}$. Si l'on pose $V = B - A$ et $W = Q - P$, la distance de A à B est donc égale à $|W| = \sqrt{-\overline{W}.W} = \sqrt{\overline{V}.[U.\overline{U} - I].V} = \sqrt{[\overline{V}.U]^2 - \overline{V}.V}$.

On appellera *trajectoire par rapport à* $\mathcal{R}$ *d'une particule* P, l'ensemble de ses positions dans $\mathcal{R}$.

Soient deux référentiels galiléens $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ de caps respectifs U_1 et U_2, les trajectoires par rapport à $\mathcal{R}_1$ des particules de $\mathcal{R}_2$ sont des droites parallèles à $[I-U_1.\overline{U_1}].U_2$. Pour que les trajectoires par rapport à $\mathcal{R}_1$ de deux particules P et Q de $\mathcal{R}_2$ soient confondues il faut et suffit que P-Q soit parallèle à $[I-U_2.\overline{U}_2].U_1$, on dira alors du couple (P,Q), ou d'une droite affine de $\mathcal{R}_2$ de même direction, que sa position par rapport à $\mathcal{R}_1$ *glisse sur elle-même* (voir figure 3).

3/ Etant donnée une particule P et un évènement $A \in P$, on appelle *référentiel galiléen tangent*

Fig. 3



A à P le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ dont le cap U est égal à celui de P en A.

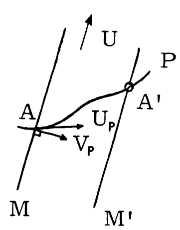
On démontre que les temps de $\mathcal{R}$ et de P coïncident (au 1er ordre) au voisinage de A, c'est-à-dire que si B est un évènement de $\mathcal{U}$ voisin de A, la durée t de A à B est un infiniment petit équivalent à $\bar{U}(B-A)$. On peut encore écrire ceci $dt = \bar{U}(dA)$. On peut ainsi dans un référentiel non-galiléen définir un repérage local pour des évènements voisins.

III - MOUVEMENT PAR RAPPORT A UN REFERENTIEL GALILEEN -

1/ La vitesse d'une particule par rapport à un référentiel se définit, comme en mécanique classique, à partir de la notion d'élément coïncidant, mais elle se présente plus simplement ici puisque nous nous limitons au cas des référentiels galiléens.

Soit donc $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen de cap U, et P une particule quelconque dont le cap au point A est $U_P = \dfrac{d_P A}{d_P s}$, vecteur unitaire d'avenir comme U.

Fig. 4



Soient A et A' deux évènements de P, et M et M' les positions respectives de A et A' par rapport à $\mathcal{R}$, c'est-à-dire les deux particules de $\mathcal{R}$ qui coïncident avec P en A et A' (figure 4).

Le déplacement de A à A' par rapport à $\mathcal{R}$ est le vecteur de $\Delta\mathcal{R}$:

$$M' - M = [I - U\bar{U}](A' - A), \tag{4}$$

la durée de A à A' en temps de $\mathcal{R}$ est le scalaire $\bar{U}(A' - A)$, et la *vitesse par rapport à $\mathcal{R}$ de la particule* P *au point* A est par définition :

$$V_P = \lim_{A'\to A}\left(\frac{M'-M}{\bar{U}(A'-A)}\right) = \lim_{A'\to A}\frac{[I-U.\bar{U}](A'-A)}{\bar{U}(A'-A)} = \frac{[I-U.\bar{U}].U_P}{\bar{U}.U_P} = \frac{U_P}{\bar{U}.U_P} - U. \tag{5}$$

On voit que c'est un vecteur de $\Delta\mathcal{R} \subset \Delta\mathcal{U}$, et qu'il ne dépend que de $\mathcal{R}$ et du référentiel galiléen tangent en A à P caractérisé par U_P.

2/ Pour donner une expression plus symétrique aux formules que nous allons écrire, nous supposerons donc maintenant que nous avons deux référentiels galiléens $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, de caps respectifs U_1 et U_2.

On peut parler de la vitesse de $\mathcal{R}_2$ par rapport à $\mathcal{R}_1$ puisque toutes les particules de $\mathcal{R}_2$ ont même cap en tous points, donc même vitesse par rapport à $\mathcal{R}_1$. La vitesse de $\mathcal{R}_2$ par rapport à $\mathcal{R}_1$ sera le vecteur de $\Delta\mathcal{R}_1$:

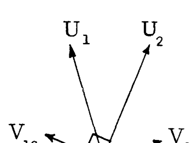
$$\boxed{V_{21} = \frac{[I-U_1.\bar{U}_1].U_2}{\bar{U}_2.U_1} = \frac{U_2}{\bar{U}_1.U_2} - U_1}, \text{ avec } \bar{U}_1.V_{21} = 0. \tag{6_1}$$

Réciproquement on a :

$$\boxed{V_{12} = \frac{[I-U_2.\bar{U}_2].U_1}{\bar{U}_2.U_1} = \frac{U_1}{\bar{U}_1.U_2} - U_2}, \text{ avec } \bar{U}_2.V_{12} = 0. \tag{6_2}$$

Les vecteurs V_{12} et V_{21} ne sont pas opposés comme on le dit parfois, ni même colinéaires, cependant les quatre vecteurs U_1, U_2, V_{12}, V_{21} sont dans un même plan d'Univers où les deux repères orthogonaux (U_1, V_{21}) et (U_2, V_{12}) sont de sens opposés, suivant la disposition dont la figure 5 ci-contre peut donner une idée, et les modules de V_{21} et V_{12} sont les mêmes, car :

Fig. 5



$$|V_{21}| = \sqrt{-\bar{V}_{21}.V_{21}} = \sqrt{1 - \frac{1}{[\bar{U}_1.U_2]^2}} = |V_{12}|. \tag{7}$$

Soit v ce module commun (c'est aussi ce que d'autres notent β, puisqu'ici c = 1), on a :

$$[\overline{U}_1 . U_2]^2 = \frac{1}{1-v^2},$$

et puisque $\overline{U}_1 . U_2 > 0$:

$$\overline{U}_1 . U_2 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \overline{U}_2 . U_1 \tag{8}$$

Il s'ensuit que $v < 1$ et que $\overline{U}_1 . U_2 > 1$ si $U_2 \neq U_1$.

De ces formules on peut tirer encore :

$$\overline{V}_{21} . V_{12} = \frac{v^2}{\sqrt{1-v^2}},$$

puis :

$$U_2 = \frac{U_1 + V_{21}}{\sqrt{1-v^2}} \text{ et } U_1 = \frac{U_2 + V_{12}}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{9}$$

qui montrent par exemple que si l'on se donne arbitrairement un vecteur unitaire d'avenir U_1 et un vecteur V_{21} orthogonal à U_1 et de module $v < 1$, U_2 est bien déterminé, et c'est un vecteur unitaire d'avenir. On voit donc qu'un référentiel galiléen $\mathcal{R}_2$ est parfaitement déterminé par son vecteur vitesse par rapport à un autre référentiel galiléen donné.

Enfin on peut résoudre en U_1 et U_2 ce qui donne :

$$\boxed{U_2 = \frac{-1}{v^2}[V_{12} + V_{21}\sqrt{1-v^2}] \quad \text{et} \quad U_1 = \frac{-1}{v^2}[V_{21} + V_{12}\sqrt{1-v^2}]} \tag{10}$$

Toutes ces formules sont essentielles dans les applications comme on va le voir sur quelques exemples.

3/ Donnons rapidement, auparavant, la définition et le calcul de l'accélération d'une particule P par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ de cap U.

Tout d'abord nous appellerons *accélération absolue* de la particule P en $A \in P$ le vecteur :

$$Y_P = \lim_{A' \to A} \frac{U'_P - U_P}{\overline{U}_P(A'-A)} = \frac{d_P U_P}{\overline{U}_P(d_P A)} = \frac{d_P U_P}{d_P s}, \tag{11}$$

en notant U_P et U'_P les caps de P en A et A' respectivement ; on remarque que, comme $\overline{U}_P . U'_P \geq 1$,

$$\overline{U}_P . Y_P = \lim_{A' \to A} \frac{\overline{U}_P . U'_P - 1}{\overline{U}_P(A'-A)} = 0$$

Soient V_P et V'_P les vitesses, par rapport à $\mathcal{R}$, de P en A et A' respectivement ; on appelle *accélération par rapport à* $\mathcal{R}$ *de* P *en* A le vecteur :

$$\Gamma_P = \lim_{A' \to A} \frac{V'_P - V_P}{\overline{U}(A'-A)} = \frac{d_P V_P}{\overline{U}(d_P A)}, \tag{12}$$

En différentiant la relation $V_P = \dfrac{[I - U.\overline{U}].U_P}{\overline{U}.U_P}$ on obtient :

$$d_P V_P = [I - U.\overline{U}].\left[\frac{d_P U_P}{\overline{U}.U_P} - \frac{U_P.\overline{U}.d_P U_P}{[\overline{U}.U_P]^2}\right] = [I - U.\overline{U}].\left[I - \frac{U_P \overline{U}}{\overline{U}.U_P}\right].\frac{d_P U_P}{\overline{U}.U_P}$$

$$= \left[I - \frac{U_P.\overline{U}}{\overline{U}.U_P}\right].\frac{d_P U_P}{\overline{U}.U_P} = \left[I - \frac{U_P.\overline{U}}{\overline{U}.U_P}\right].\ Y_P.\frac{\overline{U}_P(d_P A)}{\overline{U}.U_P}.$$

Comme $\overline{U}(d_P A) = \overline{U}.U_P.\overline{U}_P.d_P A$ on a par suite :

$$\boxed{\Gamma_P = \left[I - \frac{U_P.\overline{U}}{\overline{U}.U_P} \right] \frac{Y_P}{[\overline{U}.U_P]^2}} \tag{13}$$

L'accélération par rapport à $\mathcal{R}$ est donc la projection sur $\Delta\mathcal{R}$, parallèlement à U_P, du vecteur :

$$\frac{Y_P}{[\overline{U}.U_P]^2} = Y_P\,(1-v^2), \qquad \text{où } v = |V_P|.$$

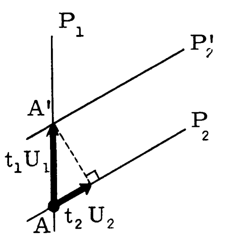
On remarque que ce vecteur n'est pas indépendant du référentiel galiléen $\mathcal{R}$, alors qu'il l'était en Mécanique Classique.

IV - DUREES, DISTANCES ET VOLUMES PROPRES ET RELATIFS -

La question est, on le sait, la suivante. Etant donné un référentiel galiléen $\mathcal{R}_1$ de cap U_1, à quoi vont correspondre, dans un autre référentiel galiléen $\mathcal{R}_2$, de cap U_2, la durée propre sur une particule de $\mathcal{R}_1$ et la distance propre entre deux particules de $\mathcal{R}_1$?

1/ Soit P_1 une particule de $\mathcal{R}_1$ les évènements A et A' de P_1 sont séparés par la durée *propre* (c'est-à-dire en temps de $\mathcal{R}_1$ lui-même) $t_1 = \overline{U_1}(A' - A)$. Comme $P_1 \in \mathcal{R}_1$, $[I - U_1.\overline{U_1}](A' - A) = 0$ et $A' - A = U_1.t_1$. Dans $\mathcal{R}_2$ par contre, ils seront séparés par la durée :

Fig.6



$$t_2 = \overline{U_2}(A' - A) = \overline{U_2}.U_1.t_1 = \frac{t_1}{\sqrt{1 - v^2}} \quad \text{(voir figure 6)}, \tag{14}$$

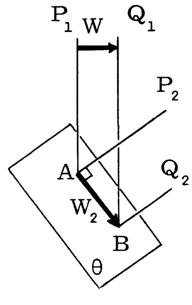
où v est le module de la vitesse de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_2$. On voit que $t_2 > t_1$, c'est-à-dire que la durée propre est toujours plus courte que la durée correspondante mesurée dans un autre référentiel. C'est le phénomène appelé dilatation des durées, où *ralentissement des horloges avec le mouvement* (relatif). Il est clair qu'une durée propre dans $\mathcal{R}_2$ est de même plus courte que la durée correspondante par rapport à $\mathcal{R}_1$.

Dans le cas de deux particules quelconques P_1 et P_2 coïncidant en A, la considération des référentiels galiléens tangents permet d'écrire la relation différentielle :

$$d_{P_1} t_2 = \frac{d_{P_1} t_1}{\sqrt{1 - v_A^2}}.$$

2/ Soient P_1 et Q_1 deux particules de $\mathcal{R}_1$. Une règle d'extrémités P_1 et Q_1 est fixe dans $\mathcal{R}_1$ et sa longueur est la distance propre de P_1 à Q_1. Cherchons sa longueur par rapport à un autre référentiel $\mathcal{R}_2$; la règle y est mobile c'est-à-dire que ses extrémités coïncident successivement avec diverses particules de $\mathcal{R}_2$. Un instant donné θ du temps de $\mathcal{R}_2$, coupe P_1 en $A \in P_2 \in \mathcal{R}_2$ et Q_1 en $B \in Q_2 \in \mathcal{R}_2$; c'est-à-dire que P_2 et Q_2 sont les positions dans $\mathcal{R}_2$ des extrémités de la règle en un même instant θ par rapport à $\mathcal{R}_2$ (figure 7).

Fig.7



$$Q_1 - P_1 = [I - U_1.\overline{U}_1]\,(B - A)$$

et :

$$Q_2 - P_2 = B - A$$

puisque $\overline{U}_2(B - A) = 0$.

Posons :

$$Q_1 - P_1 = W_1 \quad \text{et} \quad Q_2 - P_2 = W_2,$$

on a donc :

$$W_1 = [I - U_1.\overline{U}_1].W_2 \quad \text{et} \quad \overline{U}_2.W_2 = 0.$$

D'où :

$$W_2 = W_1 + U_1.\overline{U_1}.W_2, \quad O = \overline{U_2}.W_2 = \overline{U_2}.W_1 + \overline{U_2}.U_1.\overline{U_1}.W_2$$

$$\overline{U_1}.W_2 = -\frac{\overline{U_2}.W_1}{\overline{U_2}.U_1} \quad \text{et} \quad W_2 = \left[I - \frac{U_1.\overline{U_2}}{\overline{U_1}.U_2} \right].W_1 \tag{15}$$

Transformons cette dernière expression par les formules (8) (9) et (10). On a d'abord :

$$\overline{U_2}.W_1 = \frac{\overline{V_{21}}.W_1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \frac{\overline{U_2}.W_1}{\overline{U_2}.U_1} = \overline{V_{21}}.W_1,$$

puis :

$$\frac{U_1.\overline{U_2}.W_1}{\overline{U_2}.U_1} = \frac{-1}{v^2}[V_{21}.\overline{V_{21}}.W_1 + V_{12}.\overline{V_{21}}.W_1\sqrt{1-v^2}]$$

enfin :

$$\boxed{W_2 = \left[I + \frac{1}{v^2}V_{21}.\overline{V_{21}} \right].W_1 + \frac{1}{v^2}V_{12}.\overline{V_{21}}.W_1.\sqrt{1-v^2}} \tag{16}$$

On remarque que :

$$\Pi_{21} = \frac{-1}{v^2}V_{21}.\overline{V_{21}} \text{ est le projecteur orthogonal sur la direction de } V_1, \tag{17}$$

et par suite que $I - \Pi_{21} = I + \frac{1}{v^2}V_{21}.\overline{V_{21}}$ est le projecteur orthogonal sur l'hyperplan orthogonal à V_{21}. Le premier vecteur de la somme, soit $[I - \Pi_{21}].W_1$, est donc orthogonal à V_{21} mais aussi, comme W_1, à U_1, donc au plan qui contient ensemble les vecteurs U_1, U_2, V_{21} et V_{12} ; par suite le premier vecteur est orthogonal au second : $\frac{1}{v^2}V_{12}.\overline{V_{21}}.W_1.\sqrt{1-v^2}$, colinéaire à V_{12}.

Si l'on décompose d'une part W_1 en $W_1' = \Pi_{21}.W_1$, parallèle à V_{21}, et $W_1'' = [I - \Pi_{21}].W_1$, orthogonal à V_{21}, d'autre part :

$$W_2 \text{ en } W_2' = \Pi_{12}.W_2 \quad \text{et} \quad W_2'' = [I - \Pi_{12}].W_2, \tag{18}$$

la formule précédente montre que :

$$W_2 = W_1'' + \frac{1}{v^2}V_{12}.\overline{V_{21}}.W_1'\sqrt{1-v^2}$$

d'où, puisque W_1'' est orthogonal à V_{12} :

$$W_2'' = W_1'', \text{ tandis que } W_2' = \frac{1}{v^2}V_{12}.\overline{V_{21}}.W_1'.\sqrt{1-v^2} \tag{19}$$

ce qui donne :

$$|W_2'| = \sqrt{1-v^2}\,|W_1'| < |W_1'|. \tag{20}$$

C'est ce qui fait dire qu'il y a conservation des longueurs dans les directions orthogonales à la direction du mouvement, mais *contraction des longueurs dans la direction du mouvement.*

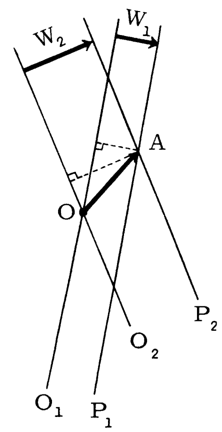
Evidemment, la distance propre de deux particules de $\mathcal{R}_2$ est de même, par rapport à $\mathcal{R}_1$, contractée dans la direction du mouvement.

3/ Un volume fixe dans le référentiel $\mathcal{R}_1$ est donc réduit par rapport à $\mathcal{R}_2$ par le facteur $\sqrt{1-v^2}$, mais en raison de la dilatation inverse des durées, on pourra définir un hypervolume d'univers invariant.

V - CHANGEMENT DE REFERENTIEL GALILEEN -

Le problème est ici de trouver la relation entre les couples (instant, position) d'un évènement quelconque A dans deux référentiels galiléens $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ de caps U_1 et U_2 respectivement.

Fig. 8



Notons P_1, P_2 les positions, et θ_1, θ_2 les instants de A dans $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ (figure 8).

Prenons comme origine un évènement O dont les positions dans $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ seront notées O_1 et O_2 et les instants o_1 et o_2 (si l'on prend dans chaque référentiel des évènements origines distincts, les formules sont modifiées en conséquence).

Nous poserons donc :

$$t_1 = \theta_1 - o_1 = \overline{U_1}(A - O), \quad W_1 = P_1 - O_1 = [I - U_1.\overline{U_1}]\,(A - O)$$

$$t_2 = \theta_2 - o_2 = \overline{U_2}(A - O), \quad W_2 = P_2 - O_2 = [I - U_2.\overline{U_2}]\,(A - O)$$

Alors $A - O = U_1 t_1 + W_1 = U_2 t_2 + W_2$, avec $\overline{U_1}.W_1 = O = \overline{U_2}.W_2$, on en tire d'une part $(\overline{A - O}).(A - O) = t_1^2 - |W_1|^2 = t_2^2 - |W_2|^2$, d'autre part $t_2 = \overline{U_2}(U_1 t_1 + W_1) = \overline{U_2}U_1 t_1 + \overline{U_2}.W_1$ soit :

$$\boxed{t_2 = \frac{t_1 + \overline{V_{21}}.W_1}{\sqrt{1-v^2}}} \tag{21}$$

en appliquant les formules 7, 8 et 9.

Puis $W_2 = [I - U_2.\overline{U_2}](U_1 t_1 + W_1)$, d'où, avec les formules 6 et 8 :

$$W_2 = \frac{V_{12}\, t_1}{\sqrt{1-v^2}} + [I - U_2.\overline{U_2}].W_1 \quad . \tag{22}$$

On transforme cette dernière formule en remarquant d'abord que d'après (9) :

$$\overline{U_2}.W_1 = \frac{\overline{V_{21}}.W_1}{\sqrt{1-v^2}}$$

qui, avec (10) donne :

$$U_2.\overline{U_2}.W_1 = -\left[\frac{V_{12}}{\sqrt{1-v^2}} + V_{21}\right].\frac{\overline{V_{21}}.W_1}{v^2}$$

d'où :

$$W_2 = W_1 + \left[V_{21} + \frac{V_{12}}{\sqrt{1-v^2}}\right].\frac{\overline{V_{21}}.W_1}{v^2} + \frac{V_{12}\, t_1}{\sqrt{1-v^2}} \tag{23}$$

Sur cette expression on voit que les vecteurs W_1, W_2, V_{21}, V_{12} sont dans le même hyperplan (qui n'est pas d'étendue !). En regroupant les termes, on arrive enfin à la formule importante :

$$\boxed{W_2 = \left[I + \frac{V_{21}.\overline{V_{21}}}{v^2}\right].W_1 + \frac{V_{12}}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{\overline{V_{21}}.W_1 + v^2 t_1}{v^2}\right)} \tag{24}$$

Ici encore on remarque que W_2 est la somme de deux vecteurs orthogonaux et que si l'on décompose W_1 en $W_1' = \Pi_{21}.W_2$, parallèle à V_{21}, et $W_1'' = [I - \Pi_{21}].W_1$, orthogonal ; W_2 en $W_2' = \Pi_{12}.W_2$, parallèle à V_{12}, et $W_2'' = [I - \Pi_{12}]W_2$ orthogonal, on obtient les relations :

$$W_2' = \frac{V_{12}}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{\overline{V_{21}}.W_1' + v^2 t_1}{v^2}\right) \quad \text{et} \quad W_2'' = W_1'' \tag{25}$$

qui conduisent naturellement à la transformation spéciale de Lorentz quand on prend des repères d'étendue orthonormés spécialement adaptés au mouvement relatif considéré, à savoir dans le plan commun à $\Delta\mathcal{R}_1$ et $\Delta\mathcal{R}_2$ deux vecteurs de base j, k unitaires et orthogonaux et pour compléter, dans $\Delta\mathcal{R}_1$ un vecteur unitaire i_1 orthogonal à j et k et dans $\Delta\mathcal{R}_2$ un vecteur unitaire i_2 orthogonal à j et k, et tels que les repères (i_1, j, k) et (i_2, j, k) soient d'orientations cinématiquement semblables, c'est-à-dire que les repères d'Univers (U_1, i_1, j, k) et (U_2, i_2, j, k) soient de même orientation. Ceci entraîne d'une part que i_1 et i_2 doivent être dans le plan de U_1 et U_2, sous-espace orthogonal au plan j et k, et que $i_1 \in \Delta\mathcal{R}_1$ est parallèle à V_{21} tandis que $i_2 \in \Delta\mathcal{R}_2$ est parallèle à V_{12} ; comme i_1 et i_2 sont unitaires cela donne $i_1 = \pm \frac{V_{21}}{v}$ et $i_2 = \pm \frac{V_{12}}{v}$. D'autre part la similitude d'orientation exige que le déterminant $-\overline{U_1}.U_2.\overline{i_1}.i_2$ de la matrice de passage de (U_1, i_1, j, k) à (U_2, i_2, j, k) soit positif c'est-à-dire que $\overline{i_1}.i_2 < 0$;

$$\text{donc si l'on pose } V_{21} = i_1 v, \text{ alors } V_{12} = -i_2 v. \tag{26}$$

C'est ceci qui incite à dire que les vitesses de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_2$ et de $\mathcal{R}_2$ par rapport à R_1 sont opposées, mais cela ne peut s'entendre que des mesures des vitesses dans deux repères spéciaux ; ceux-ci sont d'ailleurs le plus souvent considérés ou dessinés comme "parallèles" ce qui peut être dangereux, car mathématiquement il n'en est rien si $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont distincts. Si l'on pose donc :

$$A - O = t_1U_1 + x_1i_1 + y_1j + z_1k = t_2U_2 + x_2i_2 + y_2j + z_2k$$

les formules (21) et (25) donnent les formules classiques :

$$t_2 = \frac{t_1 - vx_1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad x_2 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad y_2 = y_1 \quad z_2 = z_1. \tag{27}$$

Evidemment, s'il y a plus d'un mouvement relatif à considérer en même temps, l'adaptation précédente des repères ne peut plus être assurée en général pour des mouvements quelconques. Mais les formules (21) et (25) permettent, elles, d'obtenir directement les formules de la transformation de Lorentz la plus générale avec des repères d'étendue quelconques, orthonormés ou non.

Remarquons que les résultats sur la dilatation des durées et la contraction des longueurs auraient pu aussi être obtenus à partir de ces formules (21) et (25).

Signalons enfin que les deux relations fondamentales précédentes peuvent se mettre sous forme d'une seule relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} t_2 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \dfrac{\overline{V_{21}}}{\sqrt{1-v^2}} \\ \dfrac{V_{12}}{\sqrt{1-v^2}} & \left[\dfrac{I + V_{21}.\overline{V_{21}}}{v^2}\right] + \dfrac{V_{12}.\overline{V_{21}}}{v^2\sqrt{1-v^2}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ W_1 \end{pmatrix} \tag{28}$$

ou encore, avec les caps, une forme plus simple, mais moins directement utilisable :

$$\begin{pmatrix} t_2 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{U_2}.U_1 & \overline{U_2} \\ [I - U_2.\overline{U_2}].U_1 & I - U_2.\overline{U_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ W_1 \end{pmatrix} \tag{29}$$

Il faut prendre garde que les deux matrices carrés ne sont cependant pas égales.

N.B. Les expressions inverses de t_1 et W_1 en fonction de t_2 et W_2 s'obtiennent en échangeant les indices 1 et 2 dans toutes les formules précédentes, puisque l'on a conservé partout des notations symétriques.

VI - COMPOSITION DES MOUVEMENTS -

Le problème est le suivant : connaissant le mouvement d'une particule P par rapport à un référentiel $\mathcal{R}_1$ et le mouvement de $\mathcal{R}_1$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}_2$, calculer le mouvement de P par rapport à $\mathcal{R}_2$.

1/ Comme nous ne nous occupons que des référentiels galiléens, le mouvement de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_2$ sera défini par les vitesses V_{12} et V_{21} ; nous allons donc chercher, en fonction de ces dernières, la relation entre les vitesses de P par rapport à $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$.

Nous pouvons utiliser pour cela les formules de (V), dont nous adopterons les notations. Soient donc O et A deux points de P, U_o le cap de P en O, et soient :

$$V_{o1} = \frac{d_P W_1}{d_P t_1} \qquad \text{et} \qquad V_{o2} = \frac{d_P W_2}{d_P t_2}$$

les vitesses de P en O par rapport à $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ respectivement.

De la formule (24) nous tirons :

$$V_{o2} = \left[\left[I + \frac{V_{21}.\overline{V_{21}}}{v^2}\right].V_{o1} + \frac{V_{12}}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{\overline{V_{21}}.V_{o1} + v^2}{v^2}\right)\right] \frac{d_P t_1}{d_P t_2} ;$$

Mais la formule (21) nous donne :

$$\frac{d_P t_2}{d_P t_1} = \frac{1 + \overline{V_{21}}.V_{o1}}{\sqrt{1-v^2}},$$

d'où :

$$\boxed{V_{o2} = \frac{1}{1 + \overline{V_{21}}.V_{o1}} \left[\sqrt{1-v^2}\left[I + \frac{V_{21}.\overline{V_{21}}}{v^2}\right] V_{o1} + V_{12}\left(1 + \frac{\overline{V_{21}}.V_{o1}}{v^2}\right)\right]} \tag{30}$$

C'est la *formule générale de composition des vitesses*, formule géométrique évidemment indépendante de tout repère de coordonnées.

Elle montre que V_{o2} est dans le sous-espace engendré par V_{12}, V_{21}, et V_{o1} (qui contient aussi U_1, U_2 et U_o) et qui est en général un hyperplan ; de plus elle exprime V_{o2} comme somme de deux vecteurs de $\Delta\mathcal{R}_2$, l'un colinéaire à V_{12} et l'autre orthogonal au précédent et aussi à V_{21}.

Du carré scalaire de V_{o2} on tire, d'une part le carré de la longueur de V_{o2}, soit :

$$|V_{o2}|^2 = \frac{1}{[1 + \overline{V_{21}}.V_{o1}]^2}\left[|V_{o1}|^2 + v^2 - v^2|V_{o1}|^2 + 2\,\overline{V_{21}}.V_{o1} + |\overline{V_{21}}.V_{o1}|^2\right] \tag{31}$$

et d'autre part :

$$1 + \overline{V_{o2}}.V_{o2} = \frac{[1 + \overline{V_{o1}}.V_{o1}]\,(1 - v^2)}{[1 + \overline{V_{21}}.V_{o1}]^2} \tag{32}$$

En calculant $\overline{V_{12}}.V_{o2}$ et $\overline{V_{12}}.V_{o1}$ et en éliminant ce dernier terme entre les deux relations on obtient :

$$\boxed{[1 + \overline{V_{21}}.V_{o1}].[1 + \overline{V_{12}}.V_{o2}] = 1 - v^2} \tag{33}$$

qui peut s'écrire encore :

$$\boxed{\overline{V_{21}}.V_{o1} + \overline{V_{12}}.V_{o2} + \overline{V_{21}}.V_{o1}.\overline{V_{12}}.V_{o2} + v^2 = 0} \tag{34}$$

De (32) et (33) on tire :

$$\boxed{\frac{1 + \overline{V_{o2}}.V_{o2}}{1 + \overline{V_{12}}.V_{o2}} = \frac{1 + \overline{V_{o1}}.V_{o1}}{1 + \overline{V_{21}}.V_{o1}}} \tag{35}$$

2/ Dans le cas particulier où V_{o1} est colinéaire à V_{21} (c'est-à-dire quand U_o, U_1 et U_2 sont dans un même plan) la formule générale de composition se réduit évidemment à :

$$V_{o2} = V_{12}\frac{1 + \dfrac{\overline{V_{21}}.V_{o1}}{v^2}}{1 + \overline{V_{21}}.V_{o1}} \tag{36}$$

qui montre que de son côté V_{o2} est colinéaire à V_{12}. Suivant les signes des produits scalaires $\overline{V_{21}}.V_{o1}$ et $\overline{V_{12}}.V_{o2}$, qui ne peuvent être tous deux positifs d'après (34), il y a trois cas de figures.

Si l'on pose $V_{o1} = \frac{v_1}{v} V_{21}$ et $V_{o2} = \frac{v_2}{v} V_{12}$, où v_1 et v_2 sont des nombres relatifs, les formules 32 ou 34 donnent alors $v_2 = \frac{v - v_1}{1 - vv_1}$ ou encore $v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}$ qui montre que les vitesses v_1 et v_2 jouent des rôle symétriques.

Habituellement la relation ne se présente pas sous cette forme car on prend, comme pour la transformation spéciale de Lorentz des repères orthonormés tels que $j_1 = j_2$, $k_1 = k_2$ et que les orientations soient cinématiquement semblables, ce qui entraîne $\overline{i_1}.i_2 < 0$. Cette fois par contre on pose ensuite $V_{12} = i_2\, v_{12}$ d'où $V_{21} = -\, i_1\, v_{12}$ et seulement $|v_{12}| = v$; dans ces conditions, en posant :

$$V_{o1} = i_1 v_{o1} \qquad \text{et} \qquad V_{o2} = i_2 v_{o2},$$

on obtient la relation :

$$v_{o2} = \frac{v_{o1} + v_{12}}{1 + v_{o1}\, v_{12}},$$

dite formule de composition des vitesses parallèles.

On peut d'autre part, en suivant les mêmes méthodes, relier les accélérations de P par rapport à $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$.

ANNEXE

PRECISIONS SUR LES TERMES MATHEMATIQUES ET NOTATIONS UTILISES -

(Pour la plupart, ce sont ceux de J. M. Souriau, référence [8]).

Nous appelons *opérateur* un graphe fonctionnel ; un opérateur A vérifie donc :

$$A = \{(x, A(x)) \; ; \; x \in E\}$$

l'ensemble E est noté déf(A), l'image de E par A est notée val(A). En somme on retombe sur cette notion si l'on convient d'identifier une application de E sur F et l'application correspondante de E dans $F' \supset F$. Nous réservons en principe la parenthèse ronde pour la notation fonctionnelle et celle des couples et n-uplets. L'opérateur identique sur l'ensemble E est noté I_E.

Nous disons que l'opérateur A est *double*, ou multiple d'ordre 2, si A(x) est un opérateur ; il sera de plus *multiple d'ordre* n si A(x) est un opérateur multiple d'ordre n - 1 ; [A(x)](y) est noté A(x)(y).

L'opérateur composé ou *produit* de A et B, noté A.B, est tel que $[A.B](x) = A(B(x))$ pour tout x pour lequel le second membre existe ; s'il n'existe jamais on a : $A.B = \emptyset$, graphe vide ou opérateur impuissant (déf(A) $\cap$ val(B) = $\emptyset$).

L'opérateur A est *régulier* si $[A(x) = A(y)] \Longrightarrow [x = y]$, A^{-1} désigne alors l'opérateur inverse; on a : $A^{-1}.A = I_{\text{déf}(A)}$ et $A.A^{-1} = I_{\text{val}(A)}$

L'espace *vectoriel associé* à un espace affine E est noté ΔE et appelé *direction* de E.

Le vecteur (libre) associé au couple (P, Q) est noté Q - P.

L'opérateur *linéaire* sur ΔE *associé* à l'opérateur (linéaire) affine A sur E est noté $\hat{A}$; il est tel que $\hat{A}(Q-P) = A(Q) - A(P)$, quel que soit $(P, Q) \in E^2$.

Le produit d'un vecteur V par un scalaire $s \in K$ est noté sV.

Le *contravecteur* $\underset{\sim}{V}$ associé au vecteur V est l'opérateur linéaire sur K tel que $\underset{\sim}{V}(s) = sV$ quel que soit s ; il est identifié à V quand ce dernier n'est pas déjà un opérateur, ce qui sera le cas ici.

Un *covecteur* C d'un espace vectoriel F est une forme linéaire sur F ; alors $C.V = C(V)$ est un scalaire mais V.C est un opérateur, endomorphisme de F appelé parfois dyade.

Si C.V = 0 ; l'opérateur $\Pi = V \cdot \frac{1}{C.V} \cdot C$, noté aussi $\frac{V.C}{C.V}$, est un endomorphisme idempotent ($\Pi^2 = \Pi$) que nous appelons *projecteur* sur la direction de V parallèlement au noyau de C (hyperplan de F). L'opérateur $I_F - \Pi$ est le *projecteur supplémentaire*, sur le noyau de C parallèlement à V.

Un *repéreur* S d'un espace vectoriel F de dimension finie n est un opérateur linéaire régulier qui applique K^n sur F. On utilise la notation matricielle $S = [V_1 \; V_2 \ldots V_n]$ où $V_1, \ldots, V_n$ sont les vecteurs (ou plutôt, contravecteurs) de base, images de $(1, 0, \ldots 0), \ldots, (0, \ldots 0, 1)$ par S. L'inverse d'un repéreur S est un *corepéreur* :

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} {}^1C \\ {}^2C \\ \vdots \\ {}^nC \end{bmatrix}$$

où ${}^1C, \ldots, {}^nC$ sont les covecteurs de base (formes linéaires coordonnées de la base).

Un espace vectoriel F de dimension finie n est dit *jaugé* si on a choisi une unité, notée vol_F, parmi tous les opérateurs n-linéaires et alternés définis sur F à n-valeur scalaire (qui forment un espace de dimension 1). L'opérateur A qui applique F jaugé dans F' de même dimension, jaugé, étant linéaire on a :

$$vol_{F'}(A(V_1))(A(V_2))\dots(A(V_n)) = dét(A)\ vol_F(V_1)(V_2)\dots(V_n)$$

quel que soient les vecteurs $V_1, \dots V_n$.

Dans un espace euclidien (proprement ou non) réél, le *tenseur de produit scalaire*, sera l'opérateur double g bilinéaire, symétrique et régulier tel que $g(V)(W)$ soit le produit scalaire de V et W.

Nous appelons *transposé* d'un opérateur linéaire A qui applique F dans F', et nous notons $\bar{A}$ l'opérateur linéaire qui applique F' dans F et tel que $g_{F'}(A(V))(W) = g_F(V)(\bar{A}(W))$ quels que soient $V \in F$ et $W \in F'$.

Si V est un vecteur, assimilé au contravecteur associé, $\bar{V}$ est un covecteur, si S est un repéreur, $\bar{S}$ est un corepéreur et $\bar{S}^{-1}$ un repéreur dit *supplémentaire* de S.

On a encore $g(V)(W) = \bar{V}.W = \bar{W}.V$ et ces dernières formes sont plus commodes, parce que produits d'opérateurs donc associatives.

Nous appelons *module* du vecteur V et nous notons $|V|$ le nombre positif ou nul $\sqrt{|\bar{V}.V|}$.

Si un vecteur V n'est pas isotrope, $\Pi = \dfrac{V.\bar{V}}{\bar{V}.V}$ est le projecteur orthogonal sur la direction de V, et $I_F - \Pi$ est le projecteur orthogonal sur l'hyperplan orthogonal à V.

Nous appelons *unitaire* (on dit aussi orthogonal) tout opérateur A tel que $\bar{A}.A = I_{déf(A)}$.

Nota : On pourra lire une "Introduction (élémentaire) à la géométrie Pseudo-Euclidienne de la Relativité Restreinte" par J. CHASTENET de GERY, dans le n° 238 du Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques. (Février 1964).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] H. ARZELIES - La cinématique relativiste (Gauthier-Villars, 1955).

[2] G. CASANOVA - Relativité Restreinte (Eugène Belin, 1961).

[3] O. COSTA de BEAUREGARD - La théorie de la Relativité Restreinte (Masson, 1949).

[4] M. von LAUE - La théorie de la Relativité, Tome I (Gauthier-Villars, 1924).

[5] A. LICHNEROWICZ - Eléments de Calcul Tensoriel (Armand Colin, 1950).

[6] H.A. LORENTZ, A. EINSTEIN et MINKOWSKI - Le principe de Relativité (1922).

[7] C. MØLLER - The Theory of Relativity (Oxford, Clarendon Press, 1952).

[8] J.M. SOURIAU - Calcul linéaire, tome I (P.U.F. 1959).

[9] J.L. SYNGE - Relativity, the special theory (North-Holland Pub. Co., 1956).

[10] M.A. TONNELAT - Les principes de la théorie électromagnétique et de la Relativité (Masson, 1959).

[11] H. WEYL - Temps, Espace, Matière (Albert Blanchard, 1922).

J.C.G.

Conservatoire National des Arts et Métiers - Paris.