

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

R. BERTHUET

Factorisation des distributions de Cantor

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 49, série *Mathématiques*, n° 8 (1972), exp. n° 2, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1972__49_8_A2_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FACTORISATION DES DISTRIBUTIONS DE CANTOR

R. BERTHUET

Introduction et définitions

Si ε_y est la mesure de Dirac au point y , nous posons μ la mesure sur \mathbb{R} égale à $\frac{1}{2} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1)$.

Si H_a est l'application homothétie : $x \rightarrow H_a(x) = ax$, nous notons par $H_a \mu$, la mesure transportée de μ par H_a .

Si r est un nombre réel strictement supérieur à 2, la mesure μ_r , définie par $\mu_r = \prod_{n \geq 1} H_{(r-1)r^{-n}} \mu$ (produit de convolution), est appelée mesure de Cantor d'ordre r .

Nous nous proposons ici de caractériser tous les facteurs de μ_r , au moyen du théorème suivant :

Théorème

Si α et β sont deux mesures positives telles que $\mu_r = \alpha\beta$ avec $r > 1 + \sqrt{2}$ alors il existe un nombre réel y et une partition (A, B) de \mathbb{N}^* tels que

$$\alpha = \varepsilon_y \cdot \prod_{n \in A} H_{(r-1)r^{-n}} \mu$$
$$\beta = \varepsilon_{-y} \cdot \prod_{n \in B} H_{(r-1)r^{-n}} \mu.$$

La démonstration repose sur les propriétés des supports des facteurs les outils utilisés, très élémentaires, ne semblent pas permettre de passer le cap de $1 + \sqrt{2}$, alors qu'on peut conjecturer que le résultat est vrai pour $r > 2$.

Une étude de ces distributions est faite dans [1] ; le problème de la factorisation de la répartition uniforme (cas $r = 2$) est traité dans [2].

Démonstration du théorème

Nous noterons $S(\nu)$ (resp. $I(\nu)$) le support (resp. l'intervalle-support) d'une mesure ν .

La transformée de Fourier de μ_r est donnée par :

$$\hat{\mu}_r(t) = \prod_{n \geq 1} e^{it(r-1)/2 r^n} \cos [t(r-1)/2 r^n].$$

L'ensemble des zéros de $\hat{\mu}_r$ est l'ensemble $\left\{ \frac{\pi}{r-1} (2k+1) r^n, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$, le point $\pi r/(r-1)$ étant un zéro simple.

La relation $\mu_r = \alpha\beta$ se traduit par $\hat{\mu}_r = \hat{\alpha} \cdot \hat{\beta}$ où $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ sont des fonctions entières ([3]) et, par conséquent, sans perte de généralité, nous supposons que

$$\hat{\alpha} [\pi r/(r-1)] \neq 0, \quad \hat{\beta} [\pi r/(r-1)] = 0.$$

La relation $\mu_r = \alpha\beta$ se traduit également sur les intervalles-supports par $I(\mu_r) = I(\alpha) + I(\beta)$; comme $I(\mu_r) = [0, 1]$, il existe donc deux nombres réels y et a ($a \geq 0$) tels que :

$$I(\alpha) = [y, a+y] \quad \text{et} \quad I(\beta) = [-y, 1-a-y]$$

Sans perte de généralité, nous supposons dans la suite que $y = 0$.

Lemme 1

Si $\mu_r = \alpha\beta$ et $I(\alpha) = [0, a]$, $I(\beta) = [0, 1-a]$ alors les mesures de probabilités α et β sont respectivement symétriques par rapport à $\frac{a}{2}$ et $\frac{1-a}{2}$, soit :

$$H_{-1} (\alpha \varepsilon_{-a/2}) = \alpha \varepsilon_{-a/2}$$

$$H_{-1} (\beta \varepsilon_{(a-1)/2}) = \beta \varepsilon_{(a-1)/2} .$$

En effet, il suffit de remarquer que $H_{-1} (\mu_r \varepsilon_{-1/2}) = \mu_r \varepsilon_{-1/2}$ et la preuve standard (voir par exemple [2]) s'appuyant sur le théorème de factorisation d'Hadamard ([3]) permet de conclure.

Lemme 2

Si $I(\alpha) = [0, a]$ alors nous avons l'inégalité suivante $a \leq \frac{1}{r}$; l'égalité étant réalisée si et seulement si $\beta = H_{(r-1)/r} \mu$.

En effet $\hat{\beta} [\pi r / (r-1)] = 0$ implique

$$(1) \quad \int_0^{1-a} \sin [(\pi r / (r-1)) x] \beta (dx) = 0.$$

Ceci implique l'existence d'un point x_0 de $S(\beta)$ tel que

$$\pi \leq \frac{\pi r}{r-1} x_0 \leq \frac{\pi r}{r-1} (1-a)$$

soit $a \leq \frac{1}{r}$.

D'autre part, si $a = 1/r$, il est clair que (1) implique

$\beta = p \varepsilon_0 + q \varepsilon_{(r-1)/r}$ et, compte-tenu de $\hat{\beta} [\pi r / (r-1)] = 0$, que $p = q = 1/2$.

Nous supposons donc dans la suite que $a < 1/r$.

Lemme 3

Le support $S(\beta)$ de β est tel que $S(\beta) \cap] \frac{1}{r}, \frac{r-1}{r} [= \emptyset$

En effet si $x_0 \in S(\beta) \cap]\frac{1}{r}, \frac{r-1}{r}[$, comme $0 \in S(\alpha)$, alors $x_0 \in S(\mu_r)$, or $S(\mu_r) \cap]\frac{1}{r}, \frac{r-1}{r}[= \emptyset$, d'où la contradiction.

Lemme 4

Si $\mu_r = \alpha\beta$, $I(\alpha) = [0, a]$ avec $a < 1/r$ alors si $r > 1 + \sqrt{2}$ nous avons $S(\beta) \cap]\frac{1-a}{2} \wedge \frac{1}{r}, \frac{r-1}{r}[= \emptyset$

Le lemme 4 est le coeur du problème. C'est une conséquence triviale des lemmes 2 et 3 lorsque $r \geq 3$.

Tout d'abord, montrons que, si le lemme 4 était vrai pour $r > 2$, la conclusion du théorème serait vraie pour $r > 2$.

En effet, compte-tenu du lemme 1, le lemme 4 implique :

$$(2) \quad S(\beta) \cap]\frac{1}{r} - a, \frac{r-1}{r}[= \emptyset .$$

La relation $\mu_r = \alpha\beta$ devient, par la transformation $H_{r/(r-1)}$

$$\mu \cdot \prod_{n \geq 1} H_r^{-n} \mu = (H_{r/(r-1)} \alpha) (H_{r/(r-1)} \beta)$$

notée (3) $\mu \mu_1 = \alpha_1 \beta_1 .$

Nous avons alors $S(\alpha_1) \subset [0, \frac{ar}{r-1}] \subset [0, 1 [$

$$S(\beta_1) \subset [0, \frac{1-ar}{r-1}] \cup [1, \frac{r}{r-1}]$$

$$S(\mu_1) \subset [0, \frac{1}{r-1}]$$

Or (4) $\frac{ar}{r-1} + \frac{1-ar}{r-1} < 1.$

Montrons que ceci implique que μ est un facteur de β_1 . Pour cela, considérons les opérateurs restriction R^- et R^+ sur les mesures positives sur \mathbb{R} définis par :

$$R^- \nu = \nu \cdot 1]_{-\infty, 1[$$

$$R^+ \nu = \nu \cdot 1[1, +\infty[$$

Nous avons $R^- \nu + R^+ \nu = \nu$ et la relation (3) devient, compte-tenu de (4) :

$$R^- \mu \mu_1 = \alpha_1 (R^- \beta_1)$$

$$R^+ \mu \mu_1 = \alpha_1 (R^+ \beta_1)$$

$$\text{soit } \frac{1}{2} \mu_1 = \alpha_1 (R^- \beta_1)$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon_1 \mu_1 = \alpha_1 (R^+ \beta_1)$$

$$\text{Ceci implique } \alpha_1 \varepsilon_1 (R^- \beta_1) = \alpha_1 (R^+ \beta_1)$$

$$\text{d'où } \beta_1 = \mu(2 R^- \beta_1).$$

Nous avons donc montré qu'il existe $\beta_2 = 2 R^- \beta_1$ telle que

$$\text{i) } \beta_1 = \mu \beta_2 \text{ soit } \beta = (H_{(r-1)/r} \mu) (H_{(r-1)/r} \beta_2)$$

$$\text{ii) } \mu_1 = \alpha_1 \beta_2 \text{ soit } \mu_r^{(1)} = (H_r \alpha) (H_{r-1} \beta_2)$$

où $\mu_r^{(1)}$ est une mesure de Cantor d'ordre r .

Nous sommes ramenés au problème initial "décomposition de $\mu_r^{(1)}$,"

avec :

$$\mu_r^{(1)} = (H_r \alpha) (H_{r-1} \beta_2) \text{ notée } \mu_r^{(1)} = \alpha^{(1)} \beta^{(1)}$$

et

$$\mu_r = (H_{(r-1)/r} \mu) (H_{1/r} \mu_r^{(1)})$$

$$\beta = (H_{(r-1)/r} \mu) (H_{(r-1)/r} \beta_2).$$

Par récurrence il est facile d'obtenir le résultat suivant :

pour tout $n \geq 1$, il existe une partition (A_n, B_n) de $\{1, 2, \dots, n\}$, noté \mathbb{N}_n^* , telle que :

$$\mu_r = \left(\prod_{k=1}^n H_{(r-1)r^{-k}} \mu \right) (H_{1/r^n} \mu_r^{(n)})$$

$$\alpha = \left(\prod_{k \in A_n} H_{(r-1)r^{-k}} \mu \right) (H_{1/r^n} \alpha^{(n)})$$

$$\beta = \left(\prod_{k \in B_n} H_{(r-1)r^{-k}} \mu \right) (H_{1/r^n} \beta^{(n)})$$

$$\mu_r^{(n)} = \alpha^{(n)} \beta^{(n)}$$

avec $\mu_r^{(n)}$ une mesure de Cantor d'ordre r et, la convention, si $A_n = \emptyset$

$$\alpha = H_{1/r^n} \alpha^{(n)}$$

pour tout $n \geq 1$, $A_{n+1} \cap \mathbb{N}_n^* = A_n$

$$B_{n+1} \cap \mathbb{N}_n^* = B_n.$$

De plus il est clair, les mesures $\alpha^{(n)}$ et $\beta^{(n)}$ ayant leur support dans $[0, 1]$, que les suites $(H_{1/r^n} \alpha^{(n)}, n \geq 1)$ et $(H_{1/r^n} \beta^{(n)}, n \geq 1)$ convergent faiblement vers ε_0 , ce qui assure la convergence des produits

infinis $\prod_{k \in A} H_{(r-1)/r^k} \mu$ et $\prod_{k \in B} H_{(r-1)/r^k} \mu$ où $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ et

$B = \bigcup_{n \geq 1} B_n$. Ceci achève la preuve du théorème.

Preuve du lemme 4

Nous supposons $1 + \sqrt{2} < r < 3$, $\frac{1-a}{2} < \frac{1}{r}$ (a étant la borne supérieure de l'intervalle-support de α) et $\beta \left(\left] \frac{1-a}{2}, \frac{1}{r} \right[\right) > 0$.

Ceci implique, compte-tenu du lemme 1, qu'il existe cinq nombres réels b_1, b'_1, b_2, b'_2, b appartenant à $S(\beta)$ tels que :

i) $S(\beta) \subset [0, b_2] \cup [b'_2, b'_1] \cup [b_1, b]$

ii) $b = 1 - a, b'_1 \leq 1/r, b_1 \geq (r-1)/r$

iii) $b'_2 = b - b'_1, b_2 = b - b_1$

Les relations $\mu_r \left(\left] \frac{1}{r}, \frac{r-1}{r} \right[\right) = 0$ et $b'_1 \in S(\beta)$ impliquent l'existence de deux nombres réels a_1, a'_1 de $S(\alpha)$ tels que :

iv) $S(\alpha) \subset [0, a'_1] \cup [a_1, a]$

v) $a'_1 + b'_1 \leq \frac{1}{r}, a_1 + b'_1 \geq \frac{r-1}{r}$.

Si $a_1 > \frac{1}{r^2}$, comme $0 \in S(\beta)$, alors $S(\alpha) \cap \left] \frac{1}{r^2}, \frac{r-1}{r^2} \right[= \emptyset$

et par conséquent $a_1 \geq \frac{r-1}{r^2}$ d'où $\frac{a}{2} < a_1$.

De plus, v) implique $a'_1 < \frac{a}{2}$; en effet, si $a'_1 \geq \frac{a}{2}$ alors $a'_1 + b'_1 \geq \frac{a}{2} + \frac{1-a}{2}$ d'où une contradiction. Ceci implique, compte-tenu du lemme 1, que $a = a_1 + a'_1$ et $\alpha([0, a'_1]) = 1/2$.

Nous avons l'alternative suivante :

. ou bien $b'_2 > \frac{1}{r^2}$, soit, compte-tenu de $0 \in S(\alpha)$, b'_2 est supérieur

ou égal à $\frac{r-1}{r^2}$, ce qui implique

$$\mu_r \left(\left[0, \frac{1}{r^2} \right] \right) = \alpha \left(\left[0, a_1' \right] \right) \beta \left(\left[0, b_2 \right] \right) = \frac{1}{2} \beta \left(\left[0, b_2 \right] \right).$$

Compte-tenu des propriétés de μ_r et du lemme 1, nous avons $\beta \left(\left[b_2', b_1' \right] \right) = 0$ d'où une contradiction.

. ou bien $b_2' \leq \frac{1}{r^2}$; or $b_2' - (a_1' + b_2) = b_1 - (a_1' + b_1') \geq \frac{r-2}{r}$ et nous

avons $\mu_r \left(\left[a_1' + b_2, b_2' \right] \right) = 0$, d'où une contradiction.

Nous avons donc établi que si $\beta \left(\left[\frac{1-a}{2}, \frac{1}{r} \right] \right) > 0$, nécessairement $a_1 \leq \frac{1}{r^2}$, soit, compte-tenu de v)

$$\frac{r-1}{r} \leq a_1 + b_1' \leq \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \quad \text{d'où} \quad r \leq 1 + \sqrt{2}.$$

Ceci achève la preuve du lemme 4 et, par conséquent, du théorème.

Références

- [1] A. GARSIA - Arithmetic properties of Bernoulli Convolutions
Transactions of A.M.S., Vol. 102, p. 409-432, 1962

- [2] T. LEWIS - The factorisation of the rectangular distribution
J. Appl. Prob. 4, p. 529-540, 1967

- [3] Y.V. LINNIK - Décompositions des lois de probabilités
GAUTHIER-VILLARS, 1962.