ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

GUY FOURT

Lois β sur les cônes homogènes

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 51, série *Mathématiques*, nº 9 (1974), p. 22-30

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1974__51_9_22_0>

LOIS β SUR LES CONES HOMOGENES

Guy FOURT

Généralités

Un cone ouvert V de E_n, espace vectoriel réel de dimension n, est dit homogène si

- V ne contient pas de droites
- il existe un groupe G de transformations linéaires conservant V (i.e. g (V) = V) agissant de façon transitive sur V : c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in V \qquad \exists g \in G : x = g(y)$$

Il est alors possible de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1

Si V est un cone homogène, il existe un groupe G (V) de transformations linéaires conservant V tel que

- G (V) agisse de façon simplement transitive sur V

$$\forall x, y \in V \qquad \exists ! \; g \in G(V) : x = g(y)$$

- tous les éléments de G (V) soient simultanément réductibles à la forme triangulaire supérieure.

Nous transférons alors la structure de groupe de G (V) sur V en choisissant un point e dans V et, si g_x est défini par l'égalité $g_x(e) = x$, en posant $xy = g_x(y)$.

La loi de composition ainsi définie est une loi de groupe d'unité e vérifiant les propriétés suivantes :

1) $x\,(y + z) = xy + xz$ $\qquad (x, y, z \in V)$;

2) $x\,(\lambda\, y) = \lambda\, xy$ $\qquad (x, y \in V, \quad \lambda \in R)$

3) les translations à gauche sont simultanément réductibles à la forme triangulaire

Il est possible de donner une autre définition d'un cone homogène : un cone ouvert est dit homogène s'il est muni d'une loi de groupe satisfaisant aux propriétés 1, 2 et 3 ci-dessus.

Exemples

1) R^n muni de la multiplication composantes à composantes

2) Le cone M^+ des matrices carrées symétriques définies positives. Si o désigne le produit usuel sur l'ensemble des matrices, pour tout X de M^+ il existe une matrice T_X triangulaire supérieure telle que $T_X \circ {}^tT_X = X$. On posera alors $X\,Y = T_X \circ T_Y \circ {}^tT_Y \circ {}^tT_X = T_X \circ Y \circ {}^tT_X$

Théorème 2

Si V est un cone homogène de E_n, il existe une décomposition $E_n = E_{n_\ell} \oplus E_{n-n_\ell-1} \oplus R\, e_\ell$ de E_n tel que

$$V = \{t + y + z\, e_\ell \ : \ z\, y = F\,(t, t) \in V'\ \}$$

où :

- V' est un cone homogène de $E_{n-n_\ell-1}$
- F (t, u) est une fonction bilinéaire symétrique de E_{n_ℓ} dans $E_{n-n_\ell-1}$, à valeurs dans $\overline{V}'$ pour t = u.

En appliquant ℓ fois ce théorème (jusqu'à trouver un cone homogène de dimension 1 qui ne peut être que $R^+ e_1$ on exhibe un système libre $(e_j, \ldots e_\ell)$ qu'on complètera de façon canonique pour obtenir une base de E_n.

Structure euclidienne

Nous munissons E_n d'un produit scalaire < , > pour lequel le système $e_1 \dots e_\ell$ soit orthonormé et nous conviendrons de choisir comme unité du groupe $e = \sum_{i=1}^{\ell} e_i$ (de sorte que e soit élément du cone dual V^*)

Fonctions puissances

Les morphismes du groupe V dans R^+ multiplicatif sont engendrées par ℓ morphismes soit :

$$\chi = \prod_{i=1}^{\ell} \rho_i$$

Pour tout x dans V il existe un $\tilde{x}$ unique dans l'hyperplan engendré par les e_i et tel que la transformation $g : \tilde{x} \to x$ ait 1 comme unique valeur propre. On a alors

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{\ell} \chi_i(x)\, e_i$$

Si $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_\ell)$ on notera $x^\rho = \chi(x)$

Mesures fondamentales sur un cone homogène

Nous noterons

dx la restriction de la mesure de Lebesgue à V

$d\mu(x)$ la mesure de Haar à gauche

$d\nu(x)$ la mesure de Haar à droite

Comme la fonction modulaire est un morphisme il existe α tel que $d\nu(x) = x^\alpha d\mu(x)$

De plus $d\mu(x)$ est absolument continue par rapport à dx et sa densité est une fonction puissance x^d

Densités Γ

La fonction $\Gamma(\rho)$:

$$\Gamma(\rho) = \int_V \exp(-<e, x>)\, x^\rho \, d\mu(x)$$

est définie sur un ensemble $\rho_i > \frac{m_i}{2}$ (m_i entiers) et vaut

$$\Gamma(\rho) = \pi^{\frac{n-\ell}{2}} \prod_{i=1}^{\ell} \Gamma\left(\rho - \frac{m_i}{2}\right)$$

Soit a dans V^* et $\rho_i > \frac{m_i}{2}$. Posons

$$\Gamma_a(\rho) = \int_V \exp(-<a, x> x^\rho \, d\mu(x)$$

Le groupe $G(V)^*$ agit de façon simplement transitive sur V^*. Il existe donc un g dans $G(V)$ tel que $a = g^* e$ ou

$$< a, x > = < e, gx >$$

Posons $a' = g(e)$. Il vient

$$\Gamma_a(\rho) = \int_V \exp(-< e, a'x > x^\rho \, d\mu(x)$$

$$= \int_V \exp(-< e, y > a'^{-\rho} \, y^\rho \, d\mu(y)$$

$$= a'^{-\rho} \, T(\rho)$$

On montre alors que $a'^{-\rho} = a^{-s(\rho)}$ ou $s(\rho) = (\rho_\ell, \rho_{\ell-1}, \dots \rho_1)$

Définition

Une variable aléatoire à valeurs dans V a une répartition $\Gamma_a(\rho)$ si elle a pour densité par rapport à $d\mu(x)$

$$\frac{a^{s(\rho)}}{\Gamma(\rho)} \exp(-< a, x >) x^\rho$$

Exemples

- dans R^{+n} un produit tensoriel de densité Γ
- dans M^+ les densités de Wishart

Propriétés

Le changement de variables précédent montre immédiatement que X a une répartition Γ_a (ρ) si et seulement si $X_1 = a' X$ a une répartition Γ (ρ) et donc que si X et Y sont deux variables aléatoires de répartition Γ_a (ρ) et Γ_a (ρ'), la répartition de $Y^{-1} X$ est indépendante de a.

Ordre défini par un cone homogène

La relation $x < y \Longleftrightarrow y - x \in V$ est une relation d'ordre vérifiant la propriété

$$\forall x, y, z \in V , x < y \Longleftrightarrow z x < z y$$

puisque $y - x \in V$ est équivalent à $z (y - x) = zy - zx \in V$.

Nous noterons $\int_a^b$ l'intégrale sur l'intervalle $]a, b[$

Nous définirons alors une fonction B par

$$B (\rho, \rho') = \frac{\Gamma (\rho) \Gamma (\rho')}{\Gamma (\rho + \rho')}$$

Il est facile de montrer que

$$B (\rho, \rho') = \int_0^e x^{\rho} (e - x)^{\rho'+d} \, d\mu (x)$$

Théorème 3

Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes de répartition Γ_a (ρ) et Γ_a (ρ') alors

$Y^{-1} X$ et $(X + Y)^{-1} X$ ont pour densités (par rapport à dμ (x))

$$\frac{1}{B (\rho, \rho')} x^{\rho} (e + x)^{-\rho-\rho'+\alpha} \qquad x \in V$$

(répartition B de 2ème espèce)

$$\frac{1}{B (\rho, \rho')} x^{\rho} (e - x)^{\rho'+d} \qquad 0 < x < e)$$

(répartition de 1ère espèce)

Il suffit de montrer le théorème pour a = e.

Preuve : la transformation $y \to y^{-1}$ transforme la mesure $d\mu\,(y)$ invariante par les produits à gauche en une mesure invariante par les produits à droite donc en une mesure $C d\nu\,(y)$. La répartition de Y^{-1} est donc

$$\frac{C}{\Gamma\,(\rho')} \exp\,(-<e,\,y^{-1}>)\; y^{-\rho'}\, d\,\nu(y)$$

$$= \frac{C}{\Gamma\,(\rho')} \exp\,(-<e,\,y^{-1}>)\; y^{-\rho'+\alpha}\, d\mu\,(y)$$

Y^{-1} X admet comme densité par rapport à $d\mu\,(x)$

$$g\,(x) = \frac{C}{\Gamma(\rho)\,\Gamma\,(\rho')} \int_V \exp\,(-<e,\,y^{-1}\,x^{-1}>)\, y^{-\rho'+\alpha}\, x^{-\rho'+\alpha} \exp\,(-<e,\,y^{-1}>)\; y^{-\rho}\; d\mu\,(y)$$

Nous effectuons les changements de variables

$$y^{-1} = u \qquad\qquad v = u\,(x^{-1}+e)$$

D'où

$$g\,(x) = \frac{C^2\, x^{-\rho'+\alpha}}{\Gamma\,(\rho)\,\Gamma\,(\rho')} \int_V \exp\,(-<e,\,u\,(x^{-1}+e)>)\; u^{\rho+\rho'-\alpha}\, d\,\nu\,(u)$$

$$= \frac{C^2\, x^{-\rho'+\alpha}}{\Gamma(\rho)\;\;\Gamma(\rho')} \int_V \exp\,(-<e,\,v>)\; v^{\rho+\rho'-\alpha}\, (x^{-1}+e)^{-\rho-\rho'+\alpha}\, d\,\nu(v)$$

$$= \frac{C^2\, x^{-\rho'+\alpha}\,(x^{-1}+e)^{-\rho-\rho'+\alpha}}{\Gamma\,(\rho)\,\Gamma\,(\rho')} \int_V \exp\,(-<e,\,v>)\; v^{\rho+\rho'}\; d\,\mu(v)$$

$$= \frac{C^2\,\Gamma\,(\rho+\rho')}{\Gamma\,(\rho)\,\Gamma\,(\rho')}\; x^{-\rho'+\alpha}\,(x^{-1}+e)^{-\rho-\rho'+\alpha}$$

$$= \frac{C^2}{B\,(\rho,\,\rho')}\; x^{\rho}\,(e+x)^{-\rho-\rho'+\alpha}$$

De même X^{-1} Y a la répartition

$$\frac{C^2}{B\,(\rho,\,\rho')}\; x^{\rho'}\;(e+x)^{-\rho-\rho'+\alpha}\; d\mu\,(x) \qquad\qquad (x \in V)$$

$$= \frac{C^2}{B(\rho\,,\,\rho')}\; x^{\rho'+d}\;(e+x)^{-\rho-\rho'+\alpha}\, dx \qquad\qquad (x \in V)$$

La variable $\left[(X + Y)^{-1} X\right]^{-1} = X^{-1} (X + Y) = e + X^{-1} Y$ a donc la répartition

$$\frac{C^2}{B(\rho, \rho')} (x-e)^{\rho'+d} \quad x^{-\rho-\rho'+\alpha} \, dx \qquad (x > e)$$

$$= \frac{C^2}{B(\rho, \rho')} (x - e)^{\rho'+d} \quad x^{-\rho-\rho'-d} \, d\nu(x) \qquad (x > e)$$

et $(X + Y)^{-1} X$ a la répartition

$$\frac{C}{B(\rho, \rho')} (x^{-1} - e)^{\rho'+\alpha} \quad x^{\rho+\rho'+d} \, d\mu(x) \qquad (0 < x < e)$$

$$= \frac{C}{B(\rho, \rho')} (e-x)^{\rho'+d} \quad x^{\rho} \, d\mu(x)$$

L'expression intégrale de $B(\rho, \rho')$ montre alors que $C = 1$.

Ce résultat se généralise de la façon suivante.

Théorème 4

Si $X_1 \ldots X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de répartition $\Gamma_a(\rho^{(i)})$ le système de variables aléatoires $S_n^{-1} X_1$, $S_n^{-1} X_r$, ... $S_n^{-1} X_n$ ($S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$) a la répartition de Dirichlet généralisée de densité

$$\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \rho^{(i)}\right)}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(\rho^{(i)})} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\rho^{(i)}+d} \bigotimes_{i=1}^{n} dx_i$$

sur la variété $\sum_{i=1}^{n} x_i = e$

Démontrons maintenant une propriété des répartitions B.

Théorème 5

Si $X_1 \ldots X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de répartition $B(a_i, b_i)$ avec $a_i = a_{i+1} + b_{i+1}$ $\qquad X_1 X_2 \ldots X_n$ a pour répartition $B(a_n, \sum_{i=1}^{n} b_i)$.

Il suffit de démontrer le théorème pour n = 2. La variable aléatoire $X_1 X_2$ a pour densité par rapport à $d\mu(x)$

$$h(x) = \frac{1}{B(a_1,b_1)B(a_2,b_2)} \int_e^{x^{-1}} (xy)^{a_1} (e-xy)^{b_1+d} y^{-a_2} (e-y^{-1})^{b_2+d} \, d\mu(y)$$

$$= \frac{x^{a_1}}{B(a_1b_1)\, B(a_2b_2)} \int_e^{x^{-1}} (e-xy)^{b_1+d} (e-y^{-1})^{b_2+d} y^{a_1-a_2+d} \, dy$$

Effectuons les changements de variables

$u = y - e \qquad\qquad v = (e-x)^{-1} xu$

$$h(x) = \frac{x^{a_1}}{B(a_1b_1)\, B(a_2b_2)} \int_0^{x^{-1}-e} (e-x-xu)^{b_1+d} u^{b_2+d} \, du$$

$$= \frac{x^{a_1}}{B(a_1b_1)\, B(a_2b_2)} \int_0^{x^{-1}-e} (e-x-xu)^{b_1+d} u^{b_2} \, d\mu(u)$$

$$= \frac{x^{a_1-b_2} (e-x)^{b_2}}{B(a_1b_1)\, B(a_2b_2)} \int_0^{e} (e-x)^{b_1+d} (e-v)^{b_1+d} v^{b_2} \, d\mu(v)$$

$$= \frac{B(b_2,b_1)}{B(a_1b_1)\, B(a_2b_2)} x^{a_1-b_2} (e-x)^{b_1+b_2+d}$$

$$= \frac{1}{B(a_2,b_1+b_2)} x^{a_2} (e-x)^{b_1+b_2+d}$$

BIBLIOGRAPHIE

La structure des cones homogènes est explicitée dans VINDBERG [5] et l'étude analytique dans GINDIKIN [3]. L'importance des répartitions Γ a été mis en évidence par ARTZNER [1], qui vient d'obtenir également le théorème 3. [2] Ce même théorème avait auparavant été établi pour les densités de WISHART par MITRA [4].

[1] ARTZNER Ph.
Sur les formes quadratiques positives aléatoires et les variables du χ^2 généralisé
Thèse Sciences Strasbourg 1972

[2] ARTZNER Ph.
Lois gamma et beta sur un cone convexe homogène. Applications en Analyse multivariée. C.R. Acad. Sc. Paris, n° 4 (1974)

[3] GINDIKIN S.G.
Analysis in homogenous domains
Russian Math. Surveys 19 (1964)

[4] MITRA S.K.
A density free approach to the matrix variate beta distribution
Sankhya A 32 (1970) p. 81-88

[5] VINDBERG E.B.
Theory of convex homogenous cones
Trans. Moscow math. Society 12 (1963)