

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

PHILIPPE BOUGEROL

**Fonctions de concentration sur les espaces homogènes du
groupe des déplacements de R^d**

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 65, série *Mathématiques*, n° 15 (1977), p. 19-23

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1977__65_15_19_0>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Lemme 1

Si μ est une probabilité sur G_d non étrangère à une mesure de Haar il existe un voisinage V de 0 dans \mathbb{R}^d et une constante a , strictement positive, tels que :

Pour tout entier n , pour tout t de V ,

$$\sup_{g, g' \in G} \left| \int_{\mathbb{R}^d \times SO(d)} e^{i \langle t, x \rangle} (\varepsilon_g * \mu^{*n} * \varepsilon_{g'}) (dx, dk) \right| \leq \exp - an \|t\|^2$$

Démonstration

Si $g = (y, u)$ et $g' = (y', u')$ où $y, y' \in \mathbb{R}^d$ et $u, u' \in SO(d)$ et si $\mu = \int_{SO(d)} \nu_k d\bar{\mu}(k) = \int_{SO(d)} (\nu_k \otimes \varepsilon_k) d\bar{\mu}(k)$ est une désintégration de μ de base $SO(d)$, $\bar{\mu}$ désignant la projection de μ sur $SO(d)$ et $\{\nu_k, k \in SO(d)\}$ des probabilités sur \mathbb{R}^d , on peut écrire

$$\begin{aligned} & \left| \int_{G_d} e^{i \langle t, x \rangle} (\varepsilon_g * \mu^{*n} * \varepsilon_{g'}) (dx, dk) \right| = \\ & = \left| \int \exp i \langle t, y + ux_1 + u k_1 x_2 + \dots + u k_1 \dots k_{n-1} x_n + u k_1 \dots k_n y' \rangle \right. \\ & \quad \left. \mu(dx_1, dk_1) \dots \mu(dx_n, dk_n) \right| \\ & = \left| \int \exp i \langle t, y + \dots \rangle \nu_{k_1}(dx_1) \dots \nu_{k_n}(dx_n) \bar{\mu}(dk_1) \dots \bar{\mu}(dk_n) \right| \\ & = \left| \int e^{i \langle t, y \rangle} \hat{\nu}_{k_1}(u^{-1}t) \dots \hat{\nu}_{k_n}(k_{n-1}^{-1} \dots k_1^{-1} u^{-1}x_n) e^{i \langle t, u_1 k_1 \dots k_n y' \rangle} \bar{\mu}(dk_1) \dots \bar{\mu}(dk_n) \right| \\ & \leq \left\{ \int \sup_{u \in SO(d)} \left| \hat{\nu}_k(ut) \right| d\bar{\mu}(k) \right\}^n \end{aligned}$$

où l'on a noté $\hat{\nu}_k$ la transformée de Fourier de ν_k . Il est alors facile d'obtenir le lemme (par exemple en utilisant la démonstration de la proposition 14 de (2)).

Lemme 2.

Soit μ une probabilité étalée sur G_d et $\mathbb{R}^d = H_1 \oplus H_2$ une décomposition orthogonale de \mathbb{R}^d en deux sous-espaces vectoriels. Si H_1 est de dimension r , pour tout compact K de H_1 il existe une constante c , strictement positive, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{g, g' \in G_d} \mu^{*n}(g \{ (K+H_2) \times SO(d) \} g') \leq c n^{-r/2}$$

Démonstration

Il est facile de vérifier qu'il suffit de montrer ce lemme lorsque μ est non étrangère à une mesure de Haar. Sous cette hypothèse, soit α réel assez petit pour que la boule B_α de centre 0 et de rayon α dans \mathbb{R}^d soit contenue dans le voisinage V obtenu au lemme 1.

Si η désigne la projection de $G_d = (H_1 + H_2) \times SO(d)$ sur H_1 et si f est une fonction de H_1 dans \mathbb{R} , strictement positive, dont la transformée est nulle en dehors de l'ensemble $\{t \in \mathbb{R}^r, \|t\|_{\mathbb{R}^r} < \alpha\}$, on considère la fonction φ définie sur G_d égale à $f \circ \eta$.

Il est clair qu'il suffit de majorer $\sup_{g, g' \in G} \int_{G_d} \varphi(h) (\varepsilon_g * \mu^{*n} * \varepsilon_{g'}) (dh)$ pour obtenir le lemme. Si P est une probabilité sur G_d notons $\eta(P)$ l'image de P par η et $\hat{\eta}(P)$ la transformée de Fourier de $\eta(P)$. Pour tout t de \mathbb{R}^r on a :

$$\begin{aligned} \hat{\eta}(\varepsilon_g * \mu^{*n} * \varepsilon_{g'})(t) &= \int_{\mathbb{R}^r} \exp i \langle t, x_1 \rangle \eta(\varepsilon_g * \mu^{*n} * \varepsilon_{g'})(dx_1) \\ &= \int_{G_d} \exp i \langle t, \eta(h) \rangle (\varepsilon_g * \mu^{*n} * \varepsilon_{g'})(dh) \\ &= \int_{G_d} \exp i \langle (t, 0), (x_1, x_2) \rangle (\varepsilon_g * \mu^{*n} * \varepsilon_{g'})(dx_1, dx_2, dk) \end{aligned}$$

si on identifie G_d et $H_1 \times H_2 \times SO(d)$. Si $\|t\|_{\mathbb{R}^r}$ est inférieur à α on peut appliquer le lemme 1 pour obtenir :

$$\sup_{g, g' \in G_d} \left| \hat{\eta}(\varepsilon_g * \mu^{*n} * \varepsilon_{g'})(t) \right| \leq e^{-n\alpha} \exp - n\alpha \frac{\|(t, 0)\|_{\mathbb{R}^d}^2}{\mathbb{R}^d} = \exp - n\alpha \|t\|_{\mathbb{R}^r}^2$$

D'après la formule de Plancherel on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_{G_d} \varphi(h) (\varepsilon_g * \mu^{*n} * \varepsilon_{g'}) (dh) &= \int_{H_1} f(x) \eta(\varepsilon_g * \mu^{*n} * \varepsilon_{g'}) (dx) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{\mathbb{R}^r} \hat{f}(-x) \hat{\eta}(\varepsilon_g * \mu^{*n} * \varepsilon_{g'})(x) dx \end{aligned}$$

Puisque $\text{Supp } \hat{f} \subset B_\alpha$ l'inégalité précédente appliquée ici donne immédiatement le lemme.

3.

Nous pouvons maintenant montrer et énoncer notre résultat principal:

Théorème

Soit H un sous groupe fermé connexe du groupe G_d des déplacements de \mathbb{R}^d . Soit r la dimension du sous espace de \mathbb{R}^d engendré par les directions asymptotiques de la projection de H sur \mathbb{R}^d . Si μ est une probabilité étalée sur G_d si π désigne la projection canonique de G sur $\frac{G}{H}$, pour tout compact \tilde{K} de $\frac{G}{H}$ il existe une constante \tilde{c} , strictement positive, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{g, g' \in G_d} P_{\mu}^n(\pi(g), \tilde{K}.g') = \sup_{g, g' \in G_d} \mu^{*n}(g \pi^{-1}(\tilde{K})g') \leq c n^{-d-r/2}$$

En particulier, si $d-r$ est supérieur ou égal à trois, la marche de loi μ sur $\frac{G}{H}$ est transiente et son potentiel tend vers zéro à l'infini.

On retrouve donc en particulier le résultat de (3), (4).

Démonstration :

Rappelons d'abord les résultats de structure obtenus dans (4) ch. II. Si $H = RS$ est une décomposition de Lévy de H , R étant le radical de H et S un sous groupe semi simple, S est compact. De plus, il existe une décomposition orthogonale $\mathbb{R}^d = H_1 \oplus H_2$ telle que la dimension de H_2 est r et qu'il existe un compact C de H_1 tel que R est contenu dans $(C + H_1) \times SO(d)$.

Soit alors K un compact de G tel que $\pi(K)$ soit égal à \tilde{K} . Puisque $\pi^{-1}(\tilde{K}) = RSK \subset \{(C+H_2) \times SO(d)\} SK$ il est clair qu'il existe un compact de H_1 tel que

$$\pi^{-1}(K) \subset (C'+H_2) \times SO(d)$$

Le théorème est donc une conséquence immédiate du lemme 2. (La deuxième partie découlant de la première et de (5) puisque si $d-r \geq 3$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} P_{\mu}^n(\pi(g))$, converge uniformément en $g \in G$).

(1) P. Bougerol "Fonctions de concentration sur les extensions compactes de groupes abéliens" C.R.A.S. tome 283 Serie A p. 527.529 (1)

(2) P. Bougerol "Fonctions de concentration sur certains groupes localement compacts" A paraître.

(3) L. Gallardo, V. Ries A paraître.

- (4) L. Gallardo. Thèse de doctorat de Spécialité Université de Nancy 1 (1977)
- (5) H. Hennion, B. Roynette. "Un théorème de dichotomie pour une marche aléatoire sur un espace homogène" A paraître.
-