

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

JEAN-CLAUDE LABLANQUIE

Forcing infini et théorème d'omission des types de Chang

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 66, série *Mathématiques*, n° 16 (1978), p. 27-31

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1978__66_16_27_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**FORCING INFINI ET THEOREME D'OMISSION
DES TYPES DE CHANG**

Jean-Claude LABLANQUIE
Université de Clermont II

Nous nous proposons d'étudier une généralisation du forcing infini de A. Robinson (2) qui nous permettra, grâce à l'emploi des modèles génériques, de retrouver un théorème d'omission des types dû à Chang (1) ainsi qu'une des variantes de ce théorème.

I - Préliminaires et rappels.

Soit L un langage du 1er ordre avec égalité, ayant pour connecteurs \neg, \wedge, \vee et pour quantificateur \exists . Nous désignerons par Σ_n (respectivement Π_n) l'ensemble des formules de L en forme normale prénex dont le préfixe se compose de n blocs de quantificateurs, chaque bloc (pouvant être vide) comportant uniquement des \forall ou des \exists , le premier bloc étant composé de \exists (respectivement de \forall). Si $n = 0$, $\Sigma_0 = \Pi_0$ est l'ensemble des formules sans quantificateurs.

De plus, pour tout entier n , on a : $\Sigma_n \cup \Pi_n \subset \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$.

Si M est une L -structure, $L(M)$ est le langage obtenu à partir de L en ajoutant une constante d'individu pour tout élément de M (pratiquement, on confondra l'élément de M et la constante qui le désigne).

Si M_1 et M_2 sont des L -structures, nous dirons que $M_1 <_n M_2$ si $M_1 \subset M_2$ et si pour tout Π_n -énoncé σ de $L(M_1)$, nous avons :

$$M_1 \models \sigma \quad \text{si et seulement si} \quad M_2 \models \sigma .$$

Remarque : $M_1 <_n M_2$ si et seulement si M_2 est un modèle de $D_n(M_1)$ où $D_n(M_1)$ est l'ensemble des Π_n -énoncés de $L(M_1)$ valides dans M_1 .

Soient α un ordinal et $(M_\lambda)_{\lambda \in \alpha}$ une famille de L-structures, on dira que $(M_\lambda)_{\lambda \in \alpha}$ est une *n*-chaîne si pour tout λ_1, λ_2 tels que $\lambda_1 \leq \lambda_2 < \alpha$, on a :

$$M_{\lambda_1} <_n M_{\lambda_2}.$$

Lemme 1.1. Si $(M_\lambda)_{\lambda \in \alpha}$ est une *n*-chaîne, alors pour tout $\lambda \in \alpha$, on a :

$$M_\lambda <_n \bigcup_{\lambda \in \alpha} M_\lambda.$$

Rappelons également le théorème bien connu suivant :

Théorème 1.2. Soit T une théorie de L, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) T est Π_{n+2} -axiomatisable.
- (ii) T est préservée par la réunion des *n*-chaînes.

II - Définition du *n*-forcing.

Soit T une théorie de L, pour tout $n \in \omega$ nous désignerons par $\mathfrak{m}(T, n)$ la classe des modèles de T Π_{n+1} où T Π_{n+1} est l'ensemble des Π_{n+1} -énoncés de L qui sont déductibles de T. En d'autres termes, si M est une L-structure, $M \in \mathfrak{m}(T, n)$ si et seulement si il existe un modèle M' de T tel que $M <_n M'$. Il est clair que $\mathfrak{m}(T, n)$ est clos pour la réunion des *n*-chaînes (théorème 1.2.).

Si $M \in \mathfrak{m}(T, n)$ et si φ est un énoncé de L(M), nous définissons la relation *M n-force φ* (et nous écrirons $M \Vdash_n \varphi$) de la manière suivante :

- (i) Si φ est atomique, $M \Vdash_n \varphi$ si et seulement si $M \models \varphi$.
- (ii) Si φ est de la forme $\psi \wedge \chi$, alors $M \Vdash_n \varphi$ si et seulement si $M \Vdash_n \psi$ et $M \Vdash_n \chi$.
- (iii) Si φ est de la forme $\psi \vee \chi$, alors $M \Vdash_n \varphi$ si et seulement si $M \Vdash_n \psi$ ou $M \Vdash_n \chi$.
- (iv) Si φ est de la forme $\exists x \psi(x)$, alors $M \Vdash_n \varphi$ si et seulement si il existe $a \in M$ tel que $M \Vdash_n \psi(a)$.
- (v) Si φ est de la forme $\neg \psi$, alors $M \Vdash_n \varphi$ si et seulement si il n'existe pas de $M' \in \mathfrak{m}(T, n)$ tel que $M <_n M'$ et $M' \Vdash_n \psi$.

Si $n = 0$, on retrouve le forcing infini étudié par A. Robinson en (2). Les propriétés du *n*-forcing sont en tout point semblables à celles du forcing infini de Robinson et elles s'établissent de manière analogue. Nous allons énoncer quelques-unes de ces propriétés :

Lemme 2.1. Si M et M' appartiennent à $\mathfrak{m}(T, n)$, si $M <_n M'$, si σ est un énoncé de L(M) et si $M \Vdash_n \sigma$, alors $M' \Vdash_n \sigma$.

Si $M \in \mathfrak{m}(T, n)$, nous dirons que M est *(T, n)-générique* si pour tout énoncé φ de L(M), nous avons :

$$M \Vdash_n \varphi \quad \text{ou} \quad M \Vdash_n \neg \varphi.$$

Théorème 2.2. Si $M \in \mathfrak{M}(T, n)$, il existe $M^* \in \mathfrak{M}(T, n)$ tel que : $M <_n M^*$ et M^* est (T, n) -générique.

Le résultat suivant regroupe quelques propriétés fondamentales du n -forcing.

Théorème 2.3. Soient M et M' des structures de $\mathfrak{M}(T, n)$ alors :

- (i) M est (T, n) -générique si et seulement si (P) où (P) désigne la condition : «Pour tout énoncé φ de $L(M)$, $M \models \varphi$ si et seulement si $M \Vdash_n \varphi$.»
- (ii) Si M et M' sont (T, n) -génériques et si $M <_n M'$, alors $M < M'$.
- (iii) Si M est (T, n) -générique, si $M <_n M'$, si σ est un Π_{n+2} -énoncé de $L(M)$ et si $M' \models \sigma$, alors $M \models \sigma$.
- (iv) $T_{\Pi_{n+2}} \subset T^{(F, n)}$ où $T^{(F, n)}$ est l'ensemble de tous les énoncés de L valides dans tous les modèles (T, n) -génériques.

Nous allons maintenant établir une propriété des modèles (T, n) -génériques qui nous permettra dans le paragraphe suivant de démontrer le théorème de Chang.

Théorème 2.4. Si M est (T, n) -générique, si φ est un énoncé Σ_{n+2} de $L(M)$ et si $M \models \varphi$, alors il existe un Σ_{n+1} -énoncé ψ de $L(M)$ tel que : $M \models \psi$, $T \models \psi \rightarrow \varphi$ et toutes les constantes de M occurrant dans ψ occurrent déjà dans φ .

Preuve. Soit K l'ensemble des énoncés Σ_{n+1} de $L(M)$ valides dans M . Montrons que si σ est un énoncé Σ_{n+1} de $L(M)$ et si $K \cup T_{\Pi_{n+1}} \cup \{\sigma\}$ est consistant, alors $\sigma \in K$. En effet, soit M' un modèle de $K \cup T_{\Pi_{n+1}} \cup \{\sigma\}$ alors $M <_n M'$ car M' est modèle de K et $K \supset D_n(M)$, de plus $M' \in \mathfrak{M}(T, n)$ car M' est modèle de $T_{\Pi_{n+1}}$, enfin $M' \models \sigma$, en utilisant le théorème 2.3. (iii), nous voyons alors que $M \models \sigma$. Donc $\sigma \in K$.

Maintenant soit φ un énoncé Σ_{n+2} de $L(M)$ tel que $M \models \varphi$, φ est de la forme $\exists x_1 \dots x_p \tau$ où $\tau \in \Pi_{n+1}$, donc il existe $a_1, \dots, a_p \in M$ et $M \models \tau(a_1, \dots, a_p)$. Or $\neg \tau(a_1, \dots, a_p)$ est équivalent à un énoncé de Σ_{n+1} et $M \not\models \neg \tau(a_1, \dots, a_p)$, donc $K \cup T_{\Pi_{n+1}} \cup \{\neg \tau(a_1, \dots, a_p)\}$ est contradictoire d'après ce qui précède. Par suite, il existe un énoncé χ de K tel que : (1) $T_{\Pi_{n+1}} \models \chi \rightarrow \tau(a_1, \dots, a_p)$

où $\chi = \chi(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q)$, b_1, \dots, b_q étant toutes les constantes de M occurrant dans χ et n'occurrant pas dans $\tau(a_1, \dots, a_p)$. De (1) il vient :

$$T_{\Pi_{n+1}} \models \exists y_1 \dots y_q \chi(a_1, \dots, a_p, y_1, \dots, y_q) \rightarrow \tau(a_1, \dots, a_p).$$

$$\text{Donc } T_{\Pi_{n+1}} \models \exists x_1 \dots x_p \exists y_1 \dots y_q \chi(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) \rightarrow \varphi.$$

Posons $\psi = \exists x_1 \dots x_p \exists y_1 \dots y_q \chi(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$, nous avons $T \models \psi \rightarrow \varphi$. De plus, $M \models \psi$ car $\chi \in K$ et les constantes de M occurrant dans ψ occurrent dans φ .

III - Omission des types et n-forcing.

Dans tout ce qui suit, T désigne une théorie de L .

Un ensemble Γ de formules de L sera appelé un *pré-type* s'il satisfait aux deux conditions suivantes :

- (i) toutes les formules de Γ sont consistantes avec T .
- (ii) si γ_1 et γ_2 appartiennent à Γ , alors $\gamma_1 \wedge \gamma_2$ appartient aussi à Γ .

Un pré-type Γ sera un Σ_n -type si toute formule γ de Γ est T -équivalente à une formule de Σ_n (i.e. il existe $\delta \in \Sigma_n$ telle que $T \models \gamma \leftrightarrow \delta$).

Si Δ et Γ sont deux pré-types, on dit que $\Delta \leq \Gamma$ si pour tout $\gamma \in \Gamma$ il existe $\delta \in \Delta$ tel que $T \models \delta \rightarrow \gamma$.

Soit Γ un pré-type, on dit que Γ est un *type* $(n+1)$ -*existential* si et seulement si Γ est un Σ_{n+1} -type et s'il n'existe pas de Σ_n -type Δ tel que $\Delta \leq \Gamma$.

Le théorème suivant apparaît alors comme un corollaire immédiat du théorème 2.4.

Théorème 3.1. Si M^* est (T, n) -générique et si M^* est modèle de T , alors M^* omet tous les types $(n+2)$ -existentials.

Nous pouvons alors démontrer le théorème d'omission des types de Chang (1).

Théorème 3.2. Soit T une théorie de L telle que $T \subset \Pi_{n+2}$, alors tout modèle M de T a une extension M^* satisfaisant aux conditions suivantes :

- (i) M^* est un modèle de T .
- (ii) M^* réalise tout Σ_{n+1} -type réalisé par M .
- (iii) M^* omet tout type $(n+2)$ -existential.

Preuve. Si M est un modèle de T , M appartient à $\mathfrak{m}(T, n)$, donc il existe $M^* \in \mathfrak{m}(T, n)$, $M^*(T, n)$ -générique et $M \prec_n M^*$ (théorème 2.2). En outre $T \subset T^{(F, n)}$ (théorème 2.3.(iv)), donc M^* est un modèle de T . La condition (ii) est satisfaite car $M \prec_n M^*$ et la condition (iii) résulte du théorème 3.1.

Remarque : On peut remplacer la condition $T \subset \Pi_{n+2}$ par la condition plus générale $T \subset T^{(F, n)}$.

Définition 3.3. Soit Γ un ensemble de formules de L où toutes les variables libres occurrant dans les formules de Γ sont parmi x_0, \dots, x_n . Nous dirons que Γ est un *type* ∞ -*universal* si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) toutes les formules de Γ sont consistantes avec la théorie T .
- (ii) il existe une énumération $(\gamma_k)_{k \in \omega}$ de Γ telle que :
 $T \models \gamma_{k+1} \rightarrow \gamma_k$ pour tout $k \in \omega$.
- (iii) il existe une application strictement croissante f de ω dans ω telle que :
 $\gamma_k \in \Pi_{f(k)} \cdot \Sigma_{f(k)}$ pour tout $k \in \omega$.
- (iv) il n'existe pas de pré-type Δ et d'entier k_0 tels que : pour tout $k \geq k_0$ il existe $\delta \in \Delta$.
 δ est T -équivalente à une formule de $\Sigma_{f(k)}$ et $T \models \delta \rightarrow \gamma_k$.

Nous pouvons alors établir le théorème suivant (Chang (1)).

Théorème 3.4. Soit T une théorie de L , alors pour tout modèle M de T , il existe une extension M^* de M telle que :

- (i) M^* est modèle de T .
- (ii) M^* omet tous les types ∞ -universels.

Preuve. Nous allons construire une chaîne $(M_n)_{n \in \omega}$ de L -structures telle que ; pour tout $n \in \omega$, M_n est (T, n) -générique et $M_n \prec_{n+1} M_{n+1}$. Nous raisonnons par récurrence. Pour M_0 nous prendrons une extension $(T, 0)$ -générique de M (une telle extension existe par 2.2). Supposons que nous ayons construit $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$ satisfaisant aux conditions voulues. Alors $M_n \in \mathfrak{M}(T, n+1)$ car M_n étant (T, n) -générique est modèle de $T_{\Pi_{n+2}}$ (2.3. (iv)), donc en utilisant le théorème 2.2, on peut choisir M_{n+1} telle que M_{n+1} soit $(T, n+1)$ -générique et $M_n \prec_{n+1} M_{n+1}$. Ceci achève la construction. Posons alors : $M^* = \cup M_n$.

Il est clair que M^* est modèle de T . Soit $\Gamma(x_0, \dots, x_n)$ un type ∞ -universel, montrons que M^* omet Γ . En effet, si M^* réalisait Γ , il existerait $a_0, \dots, a_n \in M^*$ tels que $M^* \models \gamma(a_0, \dots, a_n)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Il existe $k_0 \in \omega$ tel que $\{a_0, \dots, a_n\} \subset M_{k_0}$, alors si $k \geq k_0 + 1$, on a $\gamma_k \in \Pi_{f(k)} - \Sigma_{f(k)}$ (cf. définition 3.3) ; le modèle $M_{f(k)-1}$ est $(T, f(k)-1)$ -générique et $M_{f(k)-1} \models \gamma_k(a_0, \dots, a_n)$ car $a_0, \dots, a_n \in M_{f(k)-1}$ et $M_{f(k)-1} \prec_{f(k)} M^*$. En appliquant le théorème 2.4, on voit qu'il existe une $\Sigma_{f(k)}$ -formule $\delta_k(x_0, \dots, x_n)$ telle que $M_{f(k)-1} \models \delta_k(a_0, \dots, a_n)$ ce qui implique $M^* \models \delta_k(a_0, \dots, a_n)$ et telle que $T \models \delta_k \rightarrow \gamma_k$. Considérons alors le type Δ réalisé dans M^* par a_0, \dots, a_n . Il est clair que $\delta_k \in \Delta$ pour tout $k \geq k_0 + 1$, et donc ce type contredit la définition 3.3. Donc M^* omet Γ .

BIBLIOGRAPHIE

- (1) C.C. CHANG - Omitting types of prenex formulas - *J.S.L.* - Vol. 32 (1967) - pp. 61-74.
- (2) A. ROBINSON - Infinite forcing in Model Theory - Proc. of the 2nd Scandinavian Logic Symposium - *North Holland* (1971) - pp. 317-340.