ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

A. RAFTERY

Un processus autorégressif à loi marginale exponentielle. Propriétés asymptotiques et estimation de maximum de vraisemblance

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 69, série *Mathématiques*, nº 19 (1981), p. 149-159

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_149_0>

UN PROCESSUS AUTOREGRESSIF A LOI MARGINALE EXPONENTIELLE PROPRIETES ASYMPTOTIQUES ET ESTIMATION DE MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

A. RAFTERY

Université de PARIS VI

Résumé :

On considère un processus stationnaire à loi marginale exponentielle ayant la structure de corrélation AR(1) et densité de probabilité discontinue. On démontre qu'il est fortement mélangeant et asymptotiquement non-corrélé et on donne plusieurs théorèmes limites. Ensuite on démontre que l'estimateur de maximum de vraisemblance est consistant, sous une condition donnée.

1. INTRODUCTION

On considère le processus suivant proposé par Lawrance [8] :

$$X_n = \varepsilon_n + \begin{cases} 0 & \text{avec proba. } 1-p \\ pX_{n-1} & \text{" } \quad p \end{cases} \tag{1.1}$$

$$0 \leqslant p < 1, \quad 0 \leqslant \lambda < \infty, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

où $\varepsilon_n = \begin{cases} E_n & \text{avec proba. } (1-p)(1-p+p^2)^{-1} \\ p(1-p)E_n & \text{" } \quad p^2(1-p+p^2)^{-1} \end{cases}$

où les E_n sont indépendants de même loi exponentielle avec paramètre λ et E_n est indépendant de $\{X_i = i \leqslant n-1\}$ $\forall n$. Ce processus est stationnaire, a loi marginale exponentielle (λ), est markovien d'ordre 1, et a la même structure d'autocorrélation que le modèle AR(1) gaussien standard avec $\rho_r = \text{Corr}\,(X_n, X_{n+r}) = p^{2r}$ (voir [8]).

Il fait partie d'une classe de modèles développés par le Professeur P.A.W. Lewis et ses collaborateurs ([4] , [6] , [8] , [9]) pour généraliser la théorie gaussienne des processus ARMA à d'autres lois marginales et pour fournir une classe d'alternatifs simples, analytiquement traitables et faciles à simuler au processus de Poisson. Ce besoin est ressenti dans des champs d'application physiques tels que l'hydrologie où les processus à analyser sont souvent composés de variables aléatoires à valeurs positives avec une loi marginale qui n'est souvent pas gaussienne. Ces modèles trouvent également des applications comme représentations de processus ponctuels, par exemple pour des files d'attente où les temps d'arrivées et de service sont corrélés (voir [5]) ou pour les pannes, les demandes et les exceptions dans un système informatique (voir [10]).

Dans la section 2 nous étudions le comportement asymptotique du processus (1.1), en particulier ses propriétés mélangeantes. Dans la section 3 nous considérons l'estimateur de maximum de vraisemblance (MV) et nous démontrons qu'il est consistant.

2. PROPRIETES ASYMPTOTIQUES ET THEOREMES LIMITES

Soit $F_m = \sigma(\ldots, X_{m-1}, X_m)$ et $G_m = \sigma(X_m, X_{m+1}, \ldots)$ et considérons $f \in L^2(F_m)$ et $g \in L^2(G_{m+k})$ au sens que $E\,|f^2| < \infty$ et que $E\,|g^2| < \infty$.

Nous voyons de (1.1) que :

$$X_{m+k} = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{j} p^j\, \varepsilon_{m+k-j} & \text{avec proba. } (1-p)p^j \quad j = 0,1,\ldots,k-1 \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1} p^j\, \varepsilon_{m+k-j} + p^k X_m & \text{avec proba. } p^k \end{cases} \tag{2.1}$$

Par [8] on a :

$$E(\exp(-s\varepsilon_i)) = \lambda(\lambda+s)^{-1} \;/\; ((1-p) + p\lambda(\lambda+ps)^{-1})$$
$$= \lambda(\lambda+ps) \;/\; (\lambda+s)\,(\lambda+(1-p)ps) \quad \forall i$$

.../...

Donc

$$(2.2) \qquad E\,[\exp(-s(\varepsilon_{m+k}+p\varepsilon_{m+k-1}+\dots+p^{k-1}\varepsilon_{m+1}))]$$

$$= \prod_{j=0}^{k-1} E(\exp(-sp^j\varepsilon_{m+k-j}))\ , \text{ puisque les } \varepsilon_i \text{ sont indépendants}$$

$$= \prod_{j=0}^{k-1} \lambda(\lambda+p^{j+1}s)\ /\ (\lambda+p^js)\ (\lambda+(1-p)p^{j+1}s)$$

$$= (\lambda+p^ks)\ (\lambda+s)^{-1} \prod_{j=1}^{k} \lambda(\lambda+(1-p)p^js)^{-1}$$

Mais $(\lambda+sp^k)\ (\lambda+s)^{-1} = p^k + (1-p^k)\lambda\ /\ (\lambda+s)$

et est donc la transformée de Laplace d'une variable aléatoire qui est zéro avec probabilité p^k et qui a loi exponentielle (λ) avec probabilité $1-p^k$. (2.2) est donc la transformée de Laplace de

$$Y = \sum_{j=1}^{k} (1-p)p^jW_j + \begin{cases} 0 & \text{avec proba. } p^k \\ W_o & \text{"} \quad 1-p^k \end{cases}$$

où les $\{W_j : j = 0,1,\dots,k\}$ sont indépendants de même loi exponentielle (λ).

Par [7] , Y a densité de probabilité

$$dF_Y(y)/dy = (1-p^k)\left\{ \prod_{i=1}^{k} (1-(1-p)\,p^i)^{-1}\ \lambda e^{-\lambda y}\right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} ((1-p)p^j-1)^{-1} \left(\prod_{i=1}^{k} (1-p)^{-1}(p^j-p^i)^{-1}\right)((1-p)p^j)^{k-2}$$

$$\left.\lambda \exp(-\lambda y/(1-p)p^j)\right\} + \sum_{j=1}^{k} \left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} (1-p)^{-1}(p^j-p^i)^{-1}\right)$$

$$((1-p)p^j)^{k-2}\ \lambda \exp(-\lambda y/(1-p)p^j)$$

$$= (1-p^k)\ \left(\prod_{i=1}^{k} (1-(1-p)p^i)^{-1}\right)\ \lambda e^{-\lambda y}$$

$$+ (1-p)^{-1} \sum_{j=1}^{k} p^j \left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} p^j/(p^j-p^i)\right)\ ((1-p^k)/((1-p)p^j-1)+p^k)$$

$$\lambda \exp(-\lambda y/(1-p)p^j)$$

$$= \lambda e^{-\lambda y}(U_k + \sum_{j=1}^{k} V_j(y))$$

où $U_k = (1-p^k) \prod_{i=1}^{k} (1 - (1-p)p^i)^{-1}$

$$\leq (1-p^k) \prod_{i=1}^{\infty} (1 - (1-p)p^i)^{-1}$$

$$\leq (1-p^k) \prod_{i=1}^{\infty} (1-p^i)^{-1}$$

$$\leq \quad (1 + \sum_{i=1}^{\infty} p^i(1-p)^{-1} (1-p^2)^{-1} \ldots (1-p^i)^{-1}) \qquad \text{par [3]}$$

$= K_1$ une constante

et $V_j(y) = p^j(1-p)^{-1} (p^k - (1-p^k)(1-(1-p)p^j)) (\prod_{i=1}^{k} p^j / (p^j-p^i))$
$\lambda \exp(-\lambda y (1/(1-p)p^j-1))$

On a $\sum_{j=1}^{k} V_j(y) \leq \sum_{j=1}^{k} |V_j(y)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |V_j(y)|$

En outre, $\lim_{j\to\infty} |V_{j+1}(y)/V_j(y)|$

$$= \lim_{j\to\infty} |p(1+p^{k+j}(1-p)^2 (2p^k-1-p^{k+j}(1-p))^{-1}) ((p^k-p^j) / (1-p^j)) \exp(-\lambda y/p^{j+1})|$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } y > 0 \\ p^{k+1} & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Donc par la règle de d'Alembert, $\sum_{j=1}^{\infty} |V_j(y)| < \infty \quad \forall y$. Donc on a

(2.3) $\qquad dF_Y(y) \leq \lambda e^{-\lambda y}(K_1+K_2)dy$

où $K_2 = \sum_{j=1}^{\infty} |V_j(0)| < \infty$.

Par la propriété markovienne de (1.1) on a que :

$$E(fg) - E(f)\,E(g) = E\left[f(E(g|X_m) - E(g))\right]$$

Si nous notons A l'évènement

$$X_{m+k} = \sum_{i=0}^{k-1} p^i \varepsilon_{m+k-i} + p^k X_m$$

et A_j l'évènement

$$X_{m+k} = \sum_{i=0}^{j} p^i \varepsilon_{m+k-i}, \quad \text{pour } j = 0,1,\ldots,k-1$$

on voit de (2.1) que

$$E(g|X_m) = \sum_{j=0}^{k-1} (1-p)p^j \, E((g|X_m)|A_j) + p^k \, E((g|X_m)|A)$$

et $$E(g) = \sum_{j=0}^{k-1} (1-p)p^j \, E(g|A_j) + p^k \, E(g|A)$$

Il est clair que pour $j = 0,1,\dots,k-1$

$$E((g|X_m)|A_j) = E(g|A_j) \qquad \forall X_m$$

et donc

$$E(g|X_m) - E(g) = p^k \, [E((g|X_m)|A) - E(g|A)]$$

Mais

(2.4) $$|E((g|X_m)|A)| = \left| \int_{p^kX_m}^{\infty} E(g|X_{m+k}=y) \, dF_Y(y-p^kX_m) \right|$$

$$\leqslant \exp(\lambda p^kX_m) \int_{p^kX_m}^{\infty} E(|g| \, | X_{m+k}=y) \, (K_1+K_2) \, \lambda e^{-\lambda y} dy \quad \text{par (2.3)}$$

$$\leqslant \exp(\lambda p^kX_m) \int_0^{\infty} E(|g| \, | X_{m+k}=y) \, (K_1+K_2) \lambda e^{-\lambda y} \, dy$$

$$= \exp(\lambda p^kX_m) \, (K_1+K_2) \, E(|g|)$$

Aussi

(2.5) $$|E(g|A)| = \left| \int_0^{\infty} E((g|X_m)|A) \, \lambda \exp(-\lambda X_m) \, dX_m \right|$$

$$\leqslant \int_0^{\infty} \exp(\lambda p^kX_m) \, (K_1+K_2) \, E(|g|) \, \lambda \exp(-\lambda X_m) dX_m \quad \text{par (2.4)}$$

$$= (K_1 + K_2) \, E(|g|) \,/\, (1-p^k)$$

Donc

(2.6) $$|E(fg) - E(f)\,E(g)| = |E(f(E(g|X_m) - E(g)))|$$

$$= |p^k \, E[f(E((g|X_m)|A) - E(g|A))]|$$

$$\leqslant p^k E[\,|f|\,(\exp(\lambda p^kX_m) + 1/(1-p^k))(K_1+K_2) \, E(|g|)] \quad \text{par (2.4) et (2.5)}$$

$$\leqslant p^k(K_1+K_2)E(f^2)^{1/2} \, E[(\exp(\lambda p^kX_m)+1/(1-p^k))^2]^{1/2} E(|g|) \text{ par l'inégalité de}$$

Hölder

$$\leqslant 5^{1/2} p^k(K_1+K_2) \, E(f^2)^{1/2} E(g^2)^{1/2} \qquad \text{pour } k \geqslant -\log 15 \,/\, \log p$$

Il s'ensuit qu'il existe une constante C indépendante de k telle que

(2.7) $$|\mathrm{Corr}\,(f,g)| = |(E(fg) - E(f)\,E(g)) \,/\, (E(f-Ef)^2 E(g-Eg)^2)^{1/2}|$$

$$\leqslant Cp^k \qquad \text{pour } k \geqslant -\log 15 \,/\, \log p$$

Si $B \in F_m$ et $C \in G_{m+k}$ et $f = 1_B(\ldots,X_m)$, $g = 1_C(X_{m+k},\ldots)$ alors $f \in L^2(F_m)$ et $g \in L^2(G_{m+k})$. Donc par (2.6) pour $k \geq -\log 15 / \log p$

$$|P(B \cap C) - P(B)\, P(C)| \leq 5^{1/2}(K_1 + K_2) \quad p^k\, P(B)^{1/2}\, P(C)^{1/2}$$

et puisque $P(B) \leq 1$ et $P(C) \leq 1$

$$\text{(2.8)} \qquad \sup_{\substack{B \in F_m \\ C \in G_{m+k}}} |P(B \cap C) - P(B)\, P(C)| \leq 5^{1/2}(K_1 + K_2) \quad p^k \to 0 \quad (k \to \infty)$$

c'est-à-dire que le processus (1.1) est fortement mélangeant et asymptotiquement non-corrélé au sens de Rosenblatt [12] .

(2.6) nous donne aussi plusieurs résultats qui sont utiles quand les X_i sont les intervalles entre les événements dans un processus ponctuel. Ainsi pour un processus où seulement $\{X_i\ ,\ i \geq 1\}$ sont observés

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = \lambda^{-1} \quad \text{p.s.}$$

par la loi forte des grands nombres pour un processus stationnaire [2].
En plus, si $N_t = \max \{n : \sum_{k=1}^{n} X_k \leq t\}$, intuitivement le nombre d'événements qui se produisent avant l'instant t, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{N_t} X_k\right) / N_t \leq t/N_t \leq \left(\sum_{k=1}^{N_t+1} X_k\right)/N_t$$

et donc

$$\lim_{t\to\infty} (N_t/t) = \lambda \quad \text{p.s.}$$

Nous notons également que l'hypothèse de théorème (20.1) de Billingsley [1] est satisfaite par (2.8) avec

$$\sigma^2 = \text{Var } X_1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \text{Cov } (X_1, X_{1+j})$$

$$= \lambda^{-2} (1 + 2\, p^2\, (1-p^2)^{-1})$$

Donc nous avons le théorème centrale limite suivant :

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[\left(\sum_{j=1}^{n} X_j - n\lambda^{-1}\right) / \sigma\sqrt{n} \leqslant x\right] = \Phi(x)$$

où $\Phi(x) = (2\Pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} \exp(-y^2/2)dy$

3 . ESTIMATION DE MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

La densité de probabilité d'une réalisation $X = (X_1,\ldots,X_n)$ du processus (1.1) est

$$L_n(X|\theta) = m^{-1} \exp(-X_1/m) \prod_{k=2}^{n} p_{k,\theta} \tag{3.1}$$

où $m = \lambda^{-1}$, la moyenne du processus, $\theta = (m,p)$ et $p_{k,\theta}$ est la densité conditionnelle de X_k étant donné X_{k-1}. (3.1) résulte donc de la propriété markovienne de (1.1). On a

$$\begin{aligned} p_{k,\theta} = {} & (1-p)^2 (1-p+p^2)^{-1} m^{-1} \exp(-X_k/m) + p(1-p+p^2)^{-1} m^{-1} \\ & \exp(-X_k/mp(1-p)) + \delta_k \{p(1-p)(1-p+p^2)^{-1} m^{-1} \\ & \exp(-(X_k-pX_{k-1})/m) + p^2(1-p)^{-1}(1-p+p^2)^{-1} m^{-1} \\ & \exp(-(X_k-pX_{k-1})/mp(1-p))\} \end{aligned} \tag{3.2}$$

où $\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{si } X_k \geqslant pX_{k-1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

La fonction de vraisemblance (FV) (3.1) est discontinue en p et la théorie classique pour l'estimation de MV ne s'applique donc pas, puisque les conditions de régularité qu'elle impose sont violées, et que les observations ne sont pas indépendantes. Un estimateur de MV de θ est une valeur $\hat{\theta}$ de θ telle que $L_n(X|\hat{\theta}) \geqslant L_n(X|\theta)\ \forall\theta \neq \hat{\theta}$.

Supposons maintenant que nous sachions a priori que $m_o < M$ pour un M fixe. Nous allons démontrer que sous cette condition l'estimateur de MV est consistant. Soit $\theta_o = (m_o, p_o)$ la vraie valeur du paramètre et soient $\delta = (\delta_1, \delta_2)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ où $\delta_1, \delta_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ sont des réels avec $0 \leq \delta_1 < m_o$, $0 \leq \delta_2 < M - m_o$, $0 \leq p_o - \varepsilon_1 \leq p_o + \varepsilon_2 < 1$ et notons

$$D_o(\delta, \varepsilon) = \overline{B(\theta_o, \delta, \varepsilon)} - B(\theta_o, \delta, \varepsilon)$$

où $B(\theta_o, \delta, \varepsilon) = \{(m,p) : m_o - \delta_1 < m < m_o + \delta_2 \text{ et } p_o - \varepsilon_1 < p < p_o + \varepsilon_2\}$

et $\overline{B(\theta_o, \delta, \varepsilon)}$ est son adhérence dans la distance euclidéenne sur $[0,M) \times [0,1)$.

Soient E_{k-1,θ_o} et σ^2_{k-1,θ_o} respectivement l'espérence et la variance conditionnelle sous p_{k,θ_o} étant donné X_{k-1}.

Nous vérifions d'abord que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E_{k-1,\theta_o} \log p_{k,\theta} < \infty \quad \forall \theta \in D_o(\delta, \varepsilon) \tag{3.3}$$

En effet, par la stationarité de (1.1) $E_{k-1,\theta_o} \log p_{k,\theta}$ est une fonction de X_{k-1} qui est la même pour tout k et qui appartient à $L^2(X_{k-1})$ puisque par (3.2)

$$K_3\, m^{-1} (1-p+p^2)^{-1} \exp(-X_k/mp(1-p)) \leq p_{k,\theta}$$

$$\leq 4K_4 m^{-1} (1-p+p^2)^{-1} + \delta_k \exp(-(X_k - pX_{k-1})/m) + (1-\delta_k)\exp(-X_k/m)$$

où $K_3 = \min\{(1-p)^2, p(1-p); p^2(1-p)\}$

et $K_4 = \max\{1, p^2(1-p)^{-1}\}$

Donc $\log K_3 - \log m(1-p+p^2) - X_k/mp(1-p) \leq \log p_{k,\theta}$

$$\leq \log 4K_4 - \log m(1-p+p^2) - \delta_k(X_k - pX_{k-1})/m - (1-\delta_k)X_k/m$$

Donc $\log K_3 - \log m(1-p+p^2) - m_o/mp(1-p) \leq E_{k-1,\theta_o} \log p_{k,\theta}$

$\leq \log 4K_4 - \log m(1-p+p^2)$

$- m_o(1-pX_{k-1} \exp(-pX_{k-1}/m))/m$

Donc

$$(3.4) \qquad E_{k-1,\theta_o} |\log p_{k,\theta}|^2 \leq \max \{(\log K_3 - \log m\,(1-p+p^2) - m_o/mp(1-p))^2,$$

$$(\log 4K_4 + |\log m(1-p+p^2)| + |m_o(1-pX_{k-1} \exp(-pX_{k-1}/m)/m|)^2\}$$

Donc par (2.7) on a

$$(3.5) \qquad \mathrm{Corr}\,(E_{k-1,\theta_o} \log p_{k,\theta}\,,\; E_{k+j-1,\theta_o} \log p_{k,\theta}) \leq Cp^j \text{ pour } k \geq -\log 15/\log p$$

et (3.3) est vérifié par la loi forte des grands nombres pour les processus stationnaires [2]. En outre, quand $\delta_1 = \delta_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$

$$(3.6) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E_{k-1,\theta_o} \log p_{k,\theta_o} < \infty$$

Aussi, par un raisonnement analogue à celui qui mène à (3.4) on a que

$\sigma^2_{k-1,\theta_o} \log p_{k,\theta} \in L^2(X_{k-1})$.

En outre par (3.4) il existe une constante $K_5(\theta)$ telle que

$\sigma^2_{k-1,\theta_o} \log p_{k,\theta} \leq E(\log p_{k,\theta})^2) \leq K_5(\theta)$

Donc

$$(3.7) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^2_{k-1,\theta_o} (\log p_{k,\theta}/k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \sigma^2_{k-1,\theta_o} \log p_{k,\theta}$$

$$\leq K_5(\theta) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} < \infty \qquad \forall \theta \in D_o\,(\delta,\varepsilon)$$

En mettant $\delta_1 = \delta_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ on obtient également

$$(3.8) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^2_{k-1,\theta_o} (\log p_{k,\theta_o}/k) < \infty$$

Pour tout $\theta \in D_o(\delta,\varepsilon)$, $p_{k,\theta}$ est une fonction positive et Lebesgue-mesurable en X_k, ainsi que p_{k,θ_o} . Donc par l'inégalité de Jensen pour les espérances conditionnelle

$$(3.9) \qquad \int_o^\infty \log(p_{k,\theta}/p_{k,\theta_o})\, p_{k,\theta_o}\, dX_k < 0 \qquad \forall\theta \in D_o(\delta,\varepsilon)$$

Par (3.7) il s'ensuit de [11] que $\forall\, \theta \in D_o(\delta,\varepsilon)$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\log p_{k,\theta} - E_{k-1,\theta_o} \log p_{k,\theta}) \longrightarrow 0 \quad \text{p.s.} \quad (n \to \infty)$$

et par (3.8)

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\log p_{k,\theta_o} - E_{k-1,\theta_o} \log p_{k,\theta_o}) \longrightarrow 0 \quad \text{p.s.} \quad (n \to \infty)$$

Donc par (3.5) et (3.6)

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\log p_{k,\theta} - \log p_{k,\theta_o}) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (E_{k-1,\theta_o} \log p_{k,\theta}$$

$$- E_{k-1,\theta_o} \log p_{k,\theta_o}) \longrightarrow 0 \quad \text{p.s.} \quad (n \to \infty)$$

Puisque par (3.9)

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (E_{k-1,\theta_o} \log p_{k,\theta} - E_{k-1,\theta_o} \log p_{k,\theta_o}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E_{k-1,\theta_o} \log(p_{k,\theta}/p_{k,\theta_o}) < 0$$

il s'ensuit que

$$\Pr\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\log p_{k,\theta} - \log p_{k,\theta_o}) < 0\right] \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty) \quad \forall\theta \in D_o(\delta,\varepsilon)$$

c'est-à-dire que

$$\Pr\,[L_n(X|\theta) < L_n(X|\theta_o)] \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty) \qquad \forall\theta \in D_o(\delta,\varepsilon)$$

La FV(3.1) est continue par morceaux en p et l'ensemble de définition de p est compact, donc l'estimateur de MV est consistant en p puisque ε_1 et ε_2 sont arbitraires. En plus, la FV(3.1) est continue en m et puisque ε_1 et δ_2 sont arbitraires et l'ensemble [0,M) des valeurs admises pour m est compact, l'estimateur de MV est également consistant en m.

BIBLIOGRAPHIE

1. Billingsley, P. (1968). Convergence of probability measures, Wiley, New York.
2. Doob, J.L. (1953). Stochastic processes, Wiley, New York, p. 489.
3. Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., Tricani, F.G. (1955). Higher transcendental functions, vol. 3, McGraw-Hill, New York, p. 176.
4. Gaver, D.P., Lewis, P.A.W. (1975-80). "First order autoregressive gamma sequences", J. Appl. Prob. A paraître.
5. Jacobs, P.A. (1978). "A closed cyclic queueing network with dependent exponential service times", J. Appl. Prob. 15, 573-589.
6. Jacobs, P.A., Lewis, P.A.W. (1977). "A mixed autoregressive-moving average exponential sequence and point process (EARMA 1,1)", Adv. Appl. Prob. 9, 87-104.
7. Johnson, N.L., Kotz, S. (1970). Continuous univariate distributions-1, Houghton Mifflin, Boston, p. 222.
8. Lawrance, A.J. (1979). "Some autoregressive models for point processes", Proc. Bolyai Janos Math. Soc. Colloq. on Point Processes and Queueing theory, North-Holland. A paraître.
9. Lawrance, A.J., Lewis, P.A.W. (1977). "A moving average exponential point process (EMA 1)", J. Appl. Prob. 14, 98-113.
10. Lewis, P.A.W., Shedler, G.S. (1977). "Analysis and modelling of point processes in computer systems", Proc. 41st Session Int. Statist. Inst.
11. Loève, M. (1963). Probability theory, 3rd ed., Van Nostrand, Princeton, p. 387.
12. Rosenblatt, M. (1971). Markov processes. Structure and asymptotic behaviour, Springer-Verlag, Berlin, ch. 7.