

ANNALES SCIENTIFIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2  
*Série Mathématiques*

M. LEDOUX

**Loi du logarithme itéré et types  $\phi$  d'espaces de Banach**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 69, série *Mathématiques*, n° 19 (1981), p. 207-220

[http://www.numdam.org/item?id=ASCFM\\_1981\\_\\_69\\_19\\_207\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_207_0)

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

LOI DU LOGARITHME ITERÉ ET  
TYPES  $\phi$  D'ESPACES DE BANACH

M. LEDOUX

Université de STRASBOURG

RESUME

Sous les conditions classiques de moments pour une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans un espace de Banach :  $E\{X\} = 0$ ,  $E\{\|X\|^2\} < \infty$ , nous examinons les liens entre loi du logarithme itéré et types  $\phi$  d'espaces de Banach.

ABSTRACT

Under the classical moments conditions for a Banach space valued random variable  $X$  :  $E\{X\} = 0$ ,  $E\{\|X\|^2\} < \infty$ , we examine the relationships between law of the iterated logarithm and types  $\phi$  of Banach spaces.

I - INTRODUCTION

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach réel séparable muni de sa tribu borélienne  $B$  et soit  $X$  une variable aléatoire (v.a.) centrée à valeurs dans  $E$  ; si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  désigne une suite de copies indépendantes de  $X$ , on note pour tout entier  $n$  :

$$S_n(X) = \sum_{i=1}^n X_i,$$

et  $a_n = \sqrt{2n L_2 n}$  où  $L_2$  désigne la fonction sur  $\mathbb{R}^+$ , à valeurs positives, définie par :

$$\begin{aligned} L_2(t) &= \text{Log}(\text{Log}t) && \text{si } t \geq e^e \\ L_2(t) &= 1 && \text{si } 0 \leq t \leq e^e \end{aligned}$$

On dit alors que :

1) X vérifie la loi du logarithme itéré bornée (que l'on notera dorénavant  $X \in \text{LLI B}$ ) si et seulement si :

$$P\left\{ \sup_{n \geq 1} \frac{\|S_n(X)\|}{a_n} < \infty \right\} = 1,$$

2) X vérifie la loi du logarithme itéré compacte ( $X \in \text{LLI C}$ ) si et seulement si :

$$P\left\{ \left( \frac{S_n(X)}{a_n}, n \geq 1 \right) \text{ est relativement compacte dans } E \right\} = 1.$$

Clairement :  $X \in \text{LLI C} \implies X \in \text{LLIB}$ , mais la réciproque est fausse.

On dit que E est un espace de Banach de type  $p$  ( $1 \leq p \leq 2$ ), s'il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$\forall n \geq 1, \forall (Y_1, \dots, Y_n)$  v.a. indépendantes et symétriques à valeurs dans E telles que :  $\forall i, 1 \leq i \leq n, E\{\|Y_i\|^p\} < \infty$ , on ait :

$$E\left\{ \left\| \sum_{i=1}^n Y_i \right\|^p \right\} \leq C \sum_{i=1}^n E\{\|Y_i\|^p\}.$$

D'après J.T. Lapresté ([3]), si  $\phi$  est une fonction sur  $\mathbb{R}^+$  à valeurs positives, convexe, strictement croissante, continue,  $\phi(0) = 0$  (i.e.  $\phi$  est une fonction de Young), telle que de plus il existe  $\beta > 1$  avec

$\sup_{t > 0} \frac{\phi(\beta t)}{\phi(t)} < \infty$ , il est naturel d'étendre la définition précédente de

type  $p$ , qui est liée à la fonction puissance  $\phi(t) = t^p$ , au type  $\phi$ , où

$\phi$  est une fonction quelconque du genre décrit précédemment, en posant :

E est de type  $\phi$  s'il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$\forall n \geq 1, \forall (Y_1, \dots, Y_n)$  v.a. indépendantes et symétriques à valeur dans E telles que :  $\forall i, 1 \leq i \leq n, E\{\phi(\|Y_i\|)\} < \infty$ , on ait :

$$E\left\{ \phi\left( \left\| \sum_{i=1}^n Y_i \right\| \right) \right\} \leq C \sum_{i=1}^n E\left\{ \phi(\|Y_i\|) \right\}.$$

Nous aurons besoin du résultat suivant :

soient  $L^\phi(E)$  et  $l^\phi(E)$  les espaces d'Orlicz associés à  $\phi$  et  $E$  munis de leurs normes respectives :

- Si  $X$  est une v.a. à valeurs dans  $E$  :

$$\|X\|_{L^\phi(E)} = \inf \{a > 0 : E\{\phi(\frac{\|X\|}{a})\} \leq 1\}$$

- Si  $x = (x_i)_{i \geq 1} \subset E$  :

$$\|x\|_{l^\phi(E)} = \inf \{a > 0 : \sum_{i=1}^{\infty} \phi(\frac{\|x_i\|}{a}) \leq 1\} .$$

On suppose qu'il existe deux constantes  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$  telles que, pour tout  $X \in L^\phi(E)$  et tout  $x = (x_i)_{i \geq 1} \in l^\phi(E)$  :

$$\gamma_1 E\{\phi(\|X\|)\} \leq \phi(\|X\|_{L^\phi(E)}) \leq \gamma_2 E\{\phi(\|X\|)\} ,$$

$$\gamma_1 \sum_{i=1}^{\infty} \phi(\|x_i\|) \leq \phi(\|x\|_{l^\phi(E)}) \leq \gamma_2 \sum_{i=1}^{\infty} \phi(\|x_i\|) .$$

On a alors la proposition :

Proposition : Les assertions suivantes sont équivalentes :

a)  $E$  est de type  $\phi$ ,

b) il existe une constante  $C > 0$  telle que :  $\forall n \geq 1, \forall x_1, \dots, x_n \in E$  :

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_{L^\phi(E)} \leq C \left\| (x_i)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{l^\phi(E)} ,$$

où  $(\varepsilon_i)_{i \geq 1}$  désigne une suite de v.a. de Rademacher

(i.e.  $P\{\varepsilon_i = 1\} = P\{\varepsilon_i = -1\} = \frac{1}{2}$ ) indépendantes,

c) pour tout  $x = (x_i)_{i \geq 1} \subset E$  tel que  $\|x\|_{l^\phi(E)} < \infty$ ,  $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i x_i$  converge presque sûrement (p.s.).

Démonstration :

b)  $\implies$  a) : Soient  $n \geq 1$  et  $(Y_1, \dots, Y_n)$  des v.a. indépendantes et symétriques telles que :  $\forall i, 1 \leq i \leq n, E \{ \phi(|Y_i|) \} < \infty$  .

Soit  $(\epsilon_i)_{i \geq 1}$  une suite de Rademacher, indépendante de  $(Y_i)_{i \geq 1}$  ; par symétrie :

$$E\left\{ \phi\left( \left| \sum_{i=1}^n Y_i \right| \right) \right\} = E\left\{ \phi\left( \left| \sum_{i=1}^n \epsilon_i Y_i \right| \right) \right\} ;$$

si  $P_{(Y_1, \dots, Y_n)}$  désigne la loi du n-uplet  $(Y_1, \dots, Y_n)$ , on a :

$$\begin{aligned} E\left\{ \phi\left( \left| \sum_{i=1}^n Y_i \right| \right) \right\} &= \int_{E^n} E\left\{ \phi\left( \left| \sum_{i=1}^n \epsilon_i Y_i \right| \right) \right\} dP_{(Y_1, \dots, Y_n)}(y_1, \dots, y_n) \\ &\leq \frac{1}{\gamma_1} \int_{E^n} \phi\left( \left| \sum_{i=1}^n \epsilon_i Y_i \right| \right)_{L\phi(E)} dP_{(Y_1, \dots, Y_n)}(y_1, \dots, y_n) \\ &\leq \frac{1}{\gamma_1} \int_{E^n} \phi(C \left| (Y_i)_{1 \leq i \leq n} \right|)_{1\phi(E)} dP_{(Y_1, \dots, Y_n)}(y_1, \dots, y_n) \\ &\leq \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \int_{E^n} \left( \sum_{i=1}^n \phi(C |Y_i|) \right) dP_{(Y_1, \dots, Y_n)}(y_1, \dots, y_n) \\ &\leq \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \sum_{i=1}^n E \{ \phi(C |Y_i|) \} . \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } E \left\{ \phi\left( \left| \sum_{i=1}^n Y_i \right| \right) \right\} \leq \frac{\gamma_2 C'}{\gamma_1} \sum_{i=1}^n E \{ \phi(|Y_i|) \} ,$$

où  $C' > 0$  est une constante provenant du fait que  $\sup_{t>0} \frac{\phi(\beta t)}{\phi(t)} < \infty$  ; ce qui prouve que  $E$  est de type  $\phi$  .

c)  $\implies$  b) : On définit :

$$F = \{ x = (x_i)_{i \geq 1} \subset E : \|x\|_{1\phi(E)} < \infty \}$$

$$G = \{x = (x_i)_{i \geq 1} \subset E : \sup_{n \geq 1} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_{L^\phi(E)} < \infty\}$$

F et G sont des espaces de Banach.

Soit  $x \in F : \|x\|_{L^1 \phi(E)} < \infty$  ; par hypothèse  $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i x_i$  converge p.s. et

comme  $\sup_{t > 0} \frac{\phi(\beta t)}{\phi(t)} < \infty$  pour un  $\beta > 1$ , par un théorème de J. Hoffmann-

Jørgensen ([1], II théorème 5.5), on a :

$$\sup_{n \geq 1} E \left\{ \phi \left( \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\| \right) \right\} < \infty ;$$

donc :

$$\sup_{n \geq 1} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_{L^\phi(E)} < \infty ,$$

(car,  $\forall x \in L^\phi(E) : \|x\|_{L^\phi(E)} \leq \sup (1, E \{ \phi(\|x\|) \})$ ) ;

d'où :  $F \subset G$ , et par le théorème du graphe fermé, il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\forall x = (x_i)_{i \geq 1} \subset E : \sup_{n \geq 1} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_{L^\phi(E)} \leq C \|x\|_{L^1 \phi(E)} ,$$

ce qui implique b).

a)  $\implies$  c) : Soit  $x = (x_i)_{i \geq 1} \subset E$  tel que  $\|x\|_{L^1 \phi(E)} < \infty$  ;

il existe alors  $a > 0$  tel que :  $\sum_{i=1}^{\infty} \phi \left( \frac{\|x_i\|}{a} \right) \leq 1$ .

Les v.a.  $Y_i = \frac{1}{a} \varepsilon_i x_i$ ,  $i \geq 1$ , sont indépendantes et symétriques ; par suite, si C désigne la constante liée au type, on a :

$$\forall m, n \geq 1 : E \left\{ \phi \left( \frac{1}{a} \left\| \sum_{i=m}^n \varepsilon_i x_i \right\| \right) \right\} \leq C \sum_{i=m}^n \phi \left( \frac{\|x_i\|}{a} \right) ;$$

donc puisque la série :  $\sum_{i=1}^{\infty} \phi \left( \frac{\|x_i\|}{a} \right)$  converge, la suite  $(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i)_{n \geq 1}$

est de Cauchy dans  $L^\phi(E)$ , donc converge dans  $L^\phi(E)$  et également dans  $L^1(E)$

puisque  $L^1(E) \supset L^\phi(E)$  ; la série  $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i x_i$  converge alors en probabilité

donc p.s. par les propriétés des séries de v.a. indépendantes à valeurs dans un espace de Banach ; d'où c).

II - RELATIONS ENTRE LOI DU LOGARITHME ITERÉ ET TYPES  $\phi$  D'ESPACES DE BANACH

Une variable aléatoire réelle  $X$  vérifiant les conditions classiques de moments :  $E\{X\} = 0$ ,  $E\{|X|^2\} < \infty$  satisfait à la loi du logarithme itéré (bornée ou compacte car ces deux notions coïncident dans  $\mathbb{R}$ ). Dans le cas où  $X$  prend ses valeurs dans un espace de Banach, ces conditions ne sont en général pas suffisantes ; néanmoins G. Pisier ([4]) a montré qu'elles suffisent dans un espace de Banach de type 2. Réciproquement il a établi qu'un espace de Banach dans lequel toute v.a. centrée, de norme au carré intégrable, vérifie la loi du logarithme itéré (bornée), est de type  $p$  pour tout  $p < 2$ .

On se propose de préciser ces liens entre loi du logarithme itéré et types d'espaces de Banach en termes de types  $\phi$  :

Soit  $\phi_\alpha$ ,  $\alpha > 0$  une fonction de Young telle que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [ t^{-2} (L_2 t)^\alpha ] \phi_\alpha(t) = 1$$

Nous avons défini un comportement à l'infini de la fonction  $\phi_\alpha$ , il faut également lui en définir un à l'origine : de la même façon que pour

$\phi(t) = t^p$  ( $p > 0$ ) où l'on a :

$$t > 0 : \phi\left(\frac{1}{t}\right) = \left(\frac{1}{t}\right)^p = \frac{1}{t^p} = \frac{1}{\phi(t)} ,$$

on posera :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_\alpha\left(\frac{1}{t}\right) \phi_\alpha(t) = 1.$$

On a alors les théorèmes suivants :

Théorème 1 : Si  $X$  est une v.a. à valeurs dans un espace de Banach de type

$\phi_1$ , telle que :  $E\{X\} = 0$ ,  $E\{||X||^2\} < \infty$ , alors  $X \in \text{LLIB}$  ;

Théorème 2 : Si X est une v.a. à valeurs dans un espace de Banach de type

$\phi_\alpha$  ( $\alpha \in ]0,1[$ ), telle que :  $E\{X\}=0$ ,  $E\{\|X\|^2\} < \infty$ , alors X LLIC.

Ces deux théorèmes sont des corollaires immédiats d'un théorème de J. Kuelbs ([2], théorème 4.1) que l'on rappelle ici :

Théorème (Kuelbs) :

Soit X une v.a. à valeurs dans E,  $E\{X\} = 0$ ,  $E\{\|X\|^2\} < \infty$ ;

$$X \in \text{LLIB} \iff \sup_{n \geq 1} E \left\{ \frac{\|S_n(X)\|}{a_n} \right\} < \infty ,$$

$$X \in \text{LLIC} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{\|S_n(X)\|}{a_n} \right\} = 0$$

$$(\iff \frac{S_n(X)}{a_n} \rightarrow 0 \text{ en probabilité}).$$

Démonstration du théorème 1 :

(La démonstration du théorème 2 est tout à fait identique) ;

Soit X' une copie indépendante de X ; on note C la constante liée au type.

Par l'inégalité de Jensen (utilisée deux fois) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n} E\{\|S_n(X)\|\} &= \frac{1}{a_n} E\left\{\left\|\sum_{i=1}^n X_i\right\|\right\} \\ &\leq \frac{1}{a_n} E\left\{\left\|\sum_{i=1}^n (X_i - X'_i)\right\|\right\} \\ &\leq \frac{1}{a_n} E\left\{\phi_1^{-1}\left[\phi_1\left(\left\|\sum_{i=1}^n (X_i - X'_i)\right\|\right)\right]\right\} \\ &\leq \frac{1}{a_n} \phi_1^{-1}\left(E\left\{\phi_1\left(\left\|\sum_{i=1}^n (X_i - X'_i)\right\|\right)\right\}\right) \\ &\leq \frac{1}{a_n} \phi_1^{-1}\left(C \sum_{i=1}^n E\left\{\phi_1\left(\|X_i - X'_i\|\right)\right\}\right) \\ &\leq \frac{1}{a_n} \phi_1^{-1}\left(C n E\left\{\phi_1\left(2\|X\|\right)\right\}\right) \end{aligned}$$

d'où :  $\sup_{n \geq 1} E \left\{ \frac{||S_n(X)||}{a_n} \right\} < \infty$  puisque  $\phi_1^{-1}(n)$

est équivalent, quand  $n$  tend vers l'infini, à  $\sqrt{n L_2 n}$  ; par suite  $X \in LLI B$  par le théorème de J. Kuelbs rappelé ci-dessus.

Nous concluons avec un théorème lié à une forme de réciproque des théorèmes 1 et 2 :

Théorème 3 : Soit  $E$  un espace de Banach dans lequel toute v.a.

$X$ ,  $E\{X\} = 0$ ,  $E\{||X||^2\} < \infty$  vérifie la loi du logarithme itéré (bornée) ; alors  $E$  est de type  $\phi_\alpha$  pour tout  $\alpha > 1$ .

Démonstration :

Nous savons (voir [4]) que si  $X$  vérifie la loi du logarithme itéré borné, alors :

$$E \left\{ \sup_{n \geq 1} \frac{||S_n(X)||}{a_n} \right\} < \infty$$

Puisque par hypothèse  $E\{||X||^2\} < \infty$ , par le théorème du graphe fermé, il existe une constante  $C' > 0$  telle que :

pour toute v.a.  $X$  à valeurs dans  $E$ ,  $E\{X\} = 0$ ,  $E\{||X||^2\} < \infty$ , on a :

$$E \left\{ \sup_{n \geq 1} \frac{||S_n(X)||}{a_n} \right\} \leq C' (E\{||X||^2\})^{1/2} .$$

Un résultat de G. Pisier ([4], Proposition 5.1) nous montre alors que :

$\forall n \geq 1, \forall x_1, \dots, x_n \in E$  :

$$\begin{aligned} E \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right| \right\} &\leq 2 C' \sqrt{2L_2 n} \left( \sum_{i=1}^n ||x_i||^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C \sqrt{L_2 n} \left( \sum_{i=1}^n ||x_i||^2 \right)^{1/2} , \end{aligned}$$

où  $C = 2\sqrt{2}C'$  et  $(\varepsilon_i)_{i \geq 1}$  désigne une suite de Rademacher.

Soit  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  la suite de nombres réels définie par :

$$b_0 = 1, \quad b_k = e^{2^k} \quad (k \geq 1) ;$$

pour tous  $k \in \mathbb{N}$  et  $n \geq 1$  on pose :

$$A_k^n = \left\{ 1 \leq j \leq n : \phi_\alpha^{-1} \left( \frac{\sum_{i=1}^n \phi_\alpha (||x_i||)}{b_{k+1}} \right) \leq ||x_j|| < \phi_\alpha^{-1} \left( \frac{\sum_{i=1}^n \phi_\alpha (||x_i||)}{b_k} \right) \right\} ,$$

et on note :  $|A_k^n| = \text{Card} (A_k^n)$ . Alors :

$$\begin{aligned} E \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right| \right\} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} E \left\{ \left| \sum_{j \in A_k^n} \varepsilon_j x_j \right| \right\} \\ &\leq c \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{L_2 |A_k^n|} \left( \sum_{j \in A_k^n} ||x_j||^2 \right)^{1/2} \\ &\leq c \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{|A_k^n| L_2 |A_k^n|} \phi_\alpha^{-1} \left( \frac{\sum_{i=1}^n \phi_\alpha (||x_i||)}{b_k} \right) ; \end{aligned}$$

$$\text{Or : } \sum_{i=1}^n \phi_\alpha (||x_i||) \geq \sum_{j \in A_k^n} \phi_\alpha (||x_j||) \geq \frac{|A_k^n|}{b_{k+1}} \left( \sum_{i=1}^n \phi_\alpha (||x_i||) \right)$$

$$\text{d'où : } \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geq 1, |A_k^n| \leq b_{k+1} .$$

Ainsi :

$$E \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right| \right\} \leq c \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{b_{k+1} L_2 (b_{k+1})} \phi_\alpha^{-1} \left( \frac{\sum_{i=1}^n \phi_\alpha (||x_i||)}{b_k} \right) ,$$

et ceci pour tout  $n \geq 1$  et tous  $x_1, \dots, x_n \in E$ .

Soit  $x = (x_i)_{i \geq 1} \subset E$  tel que :  $||x||_{\phi(E)} < \infty$  ; il existe donc  $a > 0$

tel que :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \phi_\alpha \left( \frac{||x_i||}{a} \right) \leq 1 .$$

D'où, pour tous  $m, n \geq 1$  :

$$E\left\{\left|\sum_{i=m}^n \varepsilon_i x_i\right|\right\} \leq a C \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{b_{k+1} L_2(b_{k+1})} \phi_{\alpha}^{-1}\left(\frac{\sum_{i=m}^n \phi_{\alpha}\left(\frac{\|x_i\|}{a}\right)}{b_k}\right),$$

et puisque  $\sum_{i=1}^{\infty} \phi_{\alpha}\left(\frac{\|x_i\|}{a}\right) \leq 1$  :

$$\forall \varepsilon \in ]0,1], \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall m, n \geq N : \sum_{i=m}^n \phi_{\alpha}\left(\frac{\|x_i\|}{a}\right) \leq \varepsilon.$$

Donc, pour  $m, n \geq N$  :

$$E\left\{\left|\sum_{i=m}^n \varepsilon_i x_i\right|\right\} \leq a C \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{b_{k+1} L_2(b_{k+1})} \phi_{\alpha}^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{b_k}\right).$$

Puisque  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 / (L_2 t)^{\alpha}}{\phi_{\alpha}(t)} = 1$ , il existe une constante  $D > 0$  et  $k_0 \in \mathbb{N}$

(indépendants de  $\varepsilon$ ) tels que :

$$\forall k \geq k_0 : \phi_{\alpha}^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{b_k}\right) \leq \frac{D}{\sqrt{\frac{b_k}{\varepsilon} (L_2(\frac{b_k}{\varepsilon}))^{\alpha}}} \leq \frac{D \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{b_k (L_2(b_k))^{\alpha}}}$$

$$\text{d'où : } E\left\{\left|\sum_{i=m}^n \varepsilon_i x_i\right|\right\} \leq \sqrt{\varepsilon} a C D' \left(\sum_{k=k_0}^{\infty} \sqrt{\frac{L_2(b_{k+1})}{(L_2(b_k))^{\alpha}}} + K'\right)$$

où  $D'$  et  $K'$  sont des constantes ; enfin puisque  $\alpha > 1$ , la série entre parenthèses converge et il existe donc une constante  $K > 0$  telle que :

$$\forall \varepsilon \in ]0,1], \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall m, n \geq N :$$

$$E\left\{\left|\sum_{i=m}^n \varepsilon_i x_i\right|\right\} \leq K \sqrt{\varepsilon},$$

donc  $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i x_i$  converge dans  $L^1(E)$ , donc en probabilité, donc p.s. par les propriétés des séries de v.a. indépendantes. Par la proposition de l'introduction,  $E$  est de type  $\phi_{\alpha}$  pour tout  $\alpha > 1$ .

Remarque :

On peut dresser un parallèle entre théorème central limite (TCL) et loi du logarithme itéré bornée sous la forme du tableau suivant :

TCL	LLI B
<p>1. Si X est à valeurs dans un espace de Hilbert :</p> <p><math>X \in \text{TCL} \iff E\{X\} = 0, E\{\ X\ ^2\} &lt; \infty</math></p>	<p>1' Si X est à valeurs dans un espace de Hilbert :</p> <p><math>X \in \text{LLI B} \iff E\{X\} = 0,</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\forall \xi \in E' : E\{\langle X, \xi \rangle^2\} &lt; \infty,</math></p> <p style="text-align: center;">et <math>E\left\{\frac{\ X\ ^2}{L_2 \ X\ }\right\} &lt; \infty.</math></p>
<p>2. Si X est à valeurs dans un espace de Banach de type 2 et si</p> <p><math>E\{X\} = 0, E\{\ X\ ^2\} &lt; \infty,</math> alors</p> <p><math>X \in \text{TCL}.</math></p>	<p>2' (Si X est à valeurs dans un espace de Banach de type <math>\phi_1</math> et si</p> <p><math>E\{X\} = 0, \forall \xi \in E' : E\{\langle X, \xi \rangle^2\} &lt; \infty,</math></p> <p>et <math>E\left\{\frac{\ X\ ^2}{L_2 \ X\ }\right\} &lt; \infty</math> alors <math>X \in \text{LLI B}.</math>)</p>
<p>3. Un espace de Banach dans lequel toute v.a. X : <math>E\{X\} = 0,</math></p> <p><math>E\{\ X\ ^2\} &lt; \infty</math> vérifie le théorème central limite, est de type 2.</p>	<p>3' Un espace de Banach dans lequel toute v.a. X : <math>E\{X\} = 0,</math></p> <p><math>\forall \xi \in E' : E\{\langle X, \xi \rangle^2\} &lt; \infty</math> et</p> <p><math>E\left\{\frac{\ X\ ^2}{L_2 \ X\ }\right\} &lt; \infty</math> vérifie la loi du logarithme itéré bornée, est de type <math>\phi_1.</math></p>

Le résultat 1 est classique. Les points 2 et 3, classiques également, peuvent se trouver dans G. Pisier ([4]) et caractérisent les espaces de Banach dans lesquels les conditions de moments :  $E\{X\} = 0, E\{\|X\|^2\} < \infty$  sont suffisantes pour que X vérifie le théorème central limite : ce sont les espaces de Banach de type 2.

Le résultat 1' est un théorème récent de Kuelbs, Zinn et Goodman ([5]). Le point 3' se démontre facilement ; donnons quelques éléments de démonstration :

$$\text{Si } X \in \text{LLI B} : E \left\{ \sup_{n \geq 1} \frac{\|S_n(X)\|}{a_n} \right\} < \infty ;$$

comme par hypothèse  $\|X\|_{L^1 \phi_1(E)} < \infty$ , par le théorème du graphe fermé il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\begin{aligned} E \left\{ \sup_{n \geq 1} \frac{\|S_n(X)\|}{a_n} \right\} &\leq C \|X\|_{L^1 \phi_1(E)} \\ &\leq C \phi_1^{-1}(\gamma_2 E \{ \phi_1(\|X\|) \}). \end{aligned}$$

Soient  $n \geq 1$  et  $x_1, \dots, x_n \in E$  ; on note  $S_x$  la mesure de Dirac au point  $x \in E$ .

$$\text{Si } X \text{ est de loi } \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (S_{x_i} + S_{-x_i}) :$$

$$E \{ \phi_1(\|X\|) \} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_1(\|x_i\|).$$

En recopiant alors les arguments de la proposition 5.1 de G. Pisier ([4]) déjà rappelée précédemment, on a :

$$\forall n \geq 1, \forall x_1, \dots, x_n \in E :$$

$$E \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\| \right\} \leq 2a_n C \phi_1^{-1} \left( \gamma_2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_1(\|x_i\|) \right).$$

Puisque  $\phi_1^{-1}(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{\phi_1^{-1}(n)} \sim \frac{1}{\sqrt{nL_2^n}}$  ( $n \rightarrow \infty$ ), on montre, avec des argu-

ments maintenant classiques, que si  $x = (x_i)_{i \geq 1} \subset E$  est tel que

$$\|x\|_{L^1 \phi_1(E)} < \infty, \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i x_i \text{ converge dans } L^1(E) \text{ donc p.s. On conclut alors,}$$

avec la proposition de l'introduction que  $E$  est de type  $\phi_1$ .

Reste le point 2' qui est entre parenthèses car à l'état de conjecture : on peut en effet espérer que le théorème de J. Kuelbs rappelé précédemment puisse en fait s'énoncer de la manière suivante :

Soit X une v.a. à valeurs dans un espace de Banach telle que :

$$E\{X\} = 0, \quad \forall \xi \in E' : E\{\langle X, \xi \rangle^2\} < \infty \quad \text{et} \quad E\left\{\frac{\|X\|^2}{\|X\|}\right\} < \infty ;$$

$$\text{alors : } X \in \text{LLI B} \iff \sup_{n \geq 1} E\left\{\frac{\|S_n(X)\|}{a_n}\right\} < \infty .$$

Si un tel résultat s'évérait vérifié, la démonstration de notre théorème 1 aurait le point 2' comme corollaire immédiat ; 2' et 3' caractériseraient alors les espaces de Banach dans lesquels les conditions de moments :

$$E\{X\} = 0, \quad \forall \xi \in E' : E\{\langle X, \xi \rangle^2\} < \infty \quad \text{et} \quad E\left\{\frac{\|X\|^2}{\|X\|}\right\} < \infty$$

(et nécessaires d'ailleurs) pour que X vérifie la loi du logarithme itéré

bornée : ce sont les espaces de type  $\phi_1$ .

REFERENCES :

- [1] J. Hoffmann-Jørgensen : Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour, VI 1976. Lecture Notes in Math. 598, Berlin-Heidelberg - New-York : Springer 1977.
  
- [2] J. Kuelbs : Kolmogorov law of the iterated logarithm for Banach space valued random variables. Illinois J. Math. 21-4, 784-800 (1977).
  
- [3] J.T. Lapresté : Charges, poids et mesures de Lévy dans les espaces vectoriels localement convexes. Séminaires de Probabilités de Strasbourg XIII, 1977-1978, 41-71. Lecture Notes in Math. 721, Berlin-Heidelberg - New-York : Springer 1979.
  
- [4] G. Pisier : Le théorème de la limite centrale et la loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach. Séminaire Maurey-Schwartz 1975-76, exposés N° 3 et 4.
  
- [5] J. Zinn, V. Goodman et J. Kuelbs : Some results on the LIL in Banach space with applications to weighted empirical processes. Preprint.