ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

E. LENGLART

Inégalité de semimartingale

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 69, série *Mathématiques*, n° 19 (1981), p. 77-80

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_77_0>

INEGALITE DE SEMIMARTINGALE

E. LENGLART

Université de Rouen

Nous considérons un espace de probabilité filtré $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{\underline{F}}_t,P)$ vérifiant les conditions habituelles et F une fonction convexe modérée (croissante, nulle en 0), d'exposant p ($p=\sup_x \frac{xf(x)}{F(x)}$, où f est la dérivée droite de F).

L'espace des v.a. x telles que $\|x\|_F = \inf\{c>0\ ;\ E(F(|x|/c)\leq 1\}$ soit fini est désigné par L^F, et c'est un espace de Banach quand on le munit de la norme $\|\ \|_F$. La fonction F étant modérée, une v.a. x appartient à L^F ssi $F(|x|)$ est intégrable. Nous appelons $\underline{\underline{M}}^F(P)$ (resp. $\underline{\underline{A}}^F(P)$, $\underline{\underline{V}}^F(P)$) l'espace des P-martingales M telles que M^*_∞ appartienne à L^F (resp. des processus adaptés à variation finie, prévisibles nuls en 0 pour $\underline{\underline{V}}^F(P)$, tels que $\int_0^\infty |dA_s|$ appartienne à L^F). On désigne par $\underline{\underline{H}}^F(P)$ l'espace des P-semimartingales égal à $\underline{\underline{M}}^F(P)+\underline{\underline{A}}^F(P) = \underline{\underline{M}}^F(P)\oplus\underline{\underline{V}}^F(P)$; on appelle $\underline{\underline{S}}^F(P)$ l'espace des semimartingales X telles que X^*_∞ appartienne à L^F.

Si X est une semimartingale spéciale, nous notons $\tilde{X}$ son "compensateur" prévisible, c'est à dire l'unique processus à variation finie, prévisible et nul en 0, tel que $X-\tilde{X}$ soit une martingale locale, que nous noterons $\overset{c}{X}$ et appellerons la compensée de X.

LEMME. Soit X une semimartingale spéciale. Si f_X est un processus prévisible à valeurs dans $\{-1,+1\}$ tel que $|d\tilde{X}| = f_X.d\tilde{X}$, on a

$$\left\|\int_0^\infty |d\tilde{X}_s|\right\|_F \leq 2p\ \left\|\left(\int_0^{\cdot} f_X dX\right)^*_\infty\right\|_F$$

DEMONSTRATION.

a) Si X est une sous martingale spéciale (i.e. $f_X=1$). Par arrêt, on peut supposer que X est de la classe (D). On a alors, pour tout t.a. T

$$E(\tilde{X}_\infty - \tilde{X}_T) = E(X_\infty - X_T) \leq E(2X^*_\infty I_{\{T<\infty\}})$$

et on conclut par le lemme de Garsia-Neveu.

b) Cas général. La semimartingale $\int f_X\, dX$ admet pour compensateur prévisible le processus croissant $\int f_X\, d\tilde{X} = \int |d\tilde{X}|$ et est donc une sousmartingale locale; on est ramené au point a).

De cette inégalité, nous pouvons déduire une généralisation des inégalités de Burkholder-Davis-Gundy aux semimartingales. Si X est une semimartingale, nous notons $\|X\|_{\underline{\underline{H}}^F}$ le nombre $+\infty$ si X n'est pas spéciale et $\|[\overset{c}{X},\overset{c}{X}]^{\frac{1}{2}}_\infty + \int_0^\infty |d\tilde{X}_s|\|_F$ si X est spéciale; nous notons $\|X^*_\infty\|_F$ par $\|X\|_{\underline{\underline{S}}^F}$. Enfin, nous notons par $p^F(X)$ le nombre $\sup\{\|\int f\,dX\|_{\underline{\underline{S}}^F}\ ;\ f \text{ prév.}, |f|\leq 1\}$.

THEOREME 1. Il existe deux constantes universelles $0 < C_F < c_F < \infty$ telles que, pour toute semimartingale X, on ait

$$C_F \|X\|_{\underline{\underline{H}}^F} \leq \|\int f_X dX\|_{\underline{\underline{S}}^F} \leq p^F(X) \leq c_F \|X\|_{\underline{\underline{H}}^F}$$

DEMONSTRATION. On peut encore supposer que X est une sous martingale locale (i.e. $f_X = 1$) car $\|\int f_X dX\|_{\underline{\underline{H}}^F} = \|X\|_{\underline{\underline{H}}^F}$ et $p^F(\int f_X dX) = p^F(X)$.

a) $\|X\|_{\underline{\underline{H}}^F} \leq \|[\overset{c}{X},\overset{c}{X}]^{\frac{1}{2}}_\infty\|_F + \|\tilde{X}_\infty\|_F \leq a_F \|\overset{c}{X}\|_{\underline{\underline{S}}^F} + \|\tilde{X}_\infty\|_F$ (B-D-G)

$\leq a_F \|X\|_{\underline{\underline{S}}^F} + (a_F + 1)\|\tilde{X}_\infty\|_F \leq (a_F + 2p(a_F + 1))\|X\|_{\underline{\underline{S}}^F}$ (lemme).

b) si f est prévisible, borné par 1:

$\|\int f dX\|_{\underline{\underline{S}}^F} \leq \|\int f d\overset{c}{X}\|_{\underline{\underline{S}}^F} + \|\tilde{X}_\infty\|_F \leq b_F \|[\int f d\overset{c}{X}, \int f d\overset{c}{X}]^{\frac{1}{2}}_\infty\|_F + \|\tilde{X}_\infty\|_F$ (B-D-G)

$\leq (b_F + 1) \|X\|_{\underline{\underline{H}}^F}$.

COROLLAIRE 1. Si X est une sous martingale locale, on a

$$C_F \|X\|_{\underline{\underline{H}}^F} \leq \|X\|_{\underline{\underline{S}}^F} \leq c_F \|X\|_{\underline{\underline{H}}^F}$$

COROLLAIRE 2. Si on pose, pour X semimartingale, $q^F(X) = \sup \|\int I_A dX\|_{\underline{\underline{S}}^F}$ où A décrit les ensembles prévisibles, les normes $\| \|_{\underline{\underline{H}}^F}$, p^F et q^F sont équivalentes.

REMARQUE. Yor a prouvé dans 4 l'inégalité suivante, à l'aide du lemme de Kinshin. Posons $N_F(X) = \sup \| \int_{0-}^{\infty} f\, dX \|_F$ où f décrit les processus prévisibles élémentaires de la forme $a_0 I_{\{0\}} + \sum a_i I_{]t_i, t_{i+1}]}$ avec $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n < \infty$ et a_i est $\underline{\underline{F}}_{t_i}$ mesurable bornée par 1. Les normes $\| \|_{\underline{\underline{H}}^F}$ et N_F sont équivalentes.

COROLLAIRE 3. Si Q est une probabilité absolument continue par rapport à P, de densité bornée, $H^F(P)$ est inclus dans $H^F(Q)$, avec une norme plus forte.

C'est évident en comparant les normes p_P^F et p_Q^F.

Nous allons maintenant démontrer une inégalité due à Stein dans le cas discret et pour $F(x) = x^p (p>1)$, à Lepingle[1] dans le cas $F(x) = x$ et en temps continu, et à Yor dans le cas général[5]. Ce théorème est démontré, dans les articles précités, par des techniques de dualité, plus "savantes", mais qui donnent de meilleures constantes.

THEOREME 2. Il existe une constante $c'_F < \infty$ telle que pour toute semi martingale spéciale X on ait $\|[\tilde{X},\tilde{X}]^{\frac{1}{2}}_\infty\|_F \leq c'_F \|[X,X]^{\frac{1}{2}}_\infty\|_F$.

DEMONSTRATION; a) Si $F(x) = x^2$, c'est bien connu et facile (Stricker [2]): on a $E([\tilde{X},\tilde{X}]_\infty) \leq E([X,X]_\infty)$.

b) Si X est à sauts prévisiblement bornés par un processus croissant prévisible D, on a, pour tout t.a. T, $E([\tilde{X},\tilde{X}]_T I_{\{T>0\}}) \leq E([X,X]_T I_{\{T>0\}})$ $E(([X,X]^{\frac{1}{2}}_{T-} + D_T)^2 I_{\{T>0\}})$. En appliquant un lemme sur les fonctions concave [6], on obtient $E([\tilde{X},\tilde{X}]^{\frac{1}{2}}_{\infty}) \leq 2\,E([X,X]^{\frac{1}{2}}_{\infty} + D_{\infty})$.

c) Si $F(x)=x$, on obtient le résultat à l'aide d'une sorte de décomposition de Davis, mais plus simple: on peut supposer que X^*_{∞} est intégrable ; posons $S_t = \sup_{s\leq t}|\Delta X_s|$ et $K_t = \sum_{s\leq t} \Delta X_s\, I_{\{|\Delta X_s|\geq 2 S_{s-}\}}$. le processus K a sa variation totale majorée par $2S_{\infty}$ elle même majorée par $2[X,X]^{\frac{1}{2}}_{\infty}$. On a alors $X = Y + K$ et $|\Delta Y| \leq 2S_-$, et les inégalités

$$E([\tilde{Y},\tilde{Y}]^{\frac{1}{2}}_{\infty}) \leq 2E([Y,Y]^{\frac{1}{2}}_{\infty} + 2S_{\infty}) \leq 2E([K,K]^{\frac{1}{2}}_{\infty} + 3[X,X]^{\frac{1}{2}}_{\infty}) \leq 10E([X,X]^{\frac{1}{2}}_{\infty})$$

$$E([\tilde{K},\tilde{K}]^{\frac{1}{2}}_{\infty}) \leq E(\int_0^{\infty}|d\tilde{K}_s|) \leq E(\int_0^{\infty}|dK_s|) \leq 2E([X,X]^{\frac{1}{2}}_{\infty})$$

d'où l'on déduit $E([\tilde{X},\tilde{X}]^{\frac{1}{2}}_{\infty}) \leq 12E([X,X]^{\frac{1}{2}}_{\infty})$

d) cas général. Considérant la semimartingale par rapport à $(\underline{\underline{F}}_{T+t})$ ${}^TX = (X_{T+t} - X_T)I_{\{T<\infty\}}$ (T étant un t.a.), on obtient

$$E([\tilde{X},\tilde{X}]^{\frac{1}{2}}_{\infty} - [\tilde{X},\tilde{X}]^{\frac{1}{2}}_{T}) \leq E(([\tilde{X},\tilde{X}]_{\infty} - [\tilde{X},\tilde{X}]_T)^{\frac{1}{2}}) \leq 12E([{}^TX,{}^TX]^{\frac{1}{2}}_{\infty})$$

$$\leq 12E([X,X]^{\frac{1}{2}}_{\infty} I_{\{T<\infty\}})$$

En appliquant le lemme de Garsia-Neveu, on a alors

$$\|[\tilde{X},\tilde{X}]^{\frac{1}{2}}_{\infty}\|_F \leq 12p\,\|[X,X]^{\frac{1}{2}}_{\infty}\|_F \quad .$$

COROLLAIRE 1. <u>Sous les mêmes hypothèses, on a</u> $\|[\overset{c}{X},\overset{c}{X}]^{\frac{1}{2}}_{\infty}\|_F \leq (c_F^{\frac{1}{2}}+1)\|[X,X]^{\frac{1}{2}}\|_F$

COROLLAIRE 2. <u>Soient</u> $X \in \underline{\underline{H}}^F(\underline{\underline{F}}_{\cdot},P)$, Q <u>une probabilité absolument continue par rapport à</u> P, <u>de densité bornée</u>, <u>et</u> $\underline{\underline{G}}_{\cdot}$ <u>une autre filtration</u>. <u>Si</u> X <u>est une</u> $(\underline{\underline{G}}_{\cdot},Q)$-<u>semimartingale</u>, <u>alors sa</u> $(\underline{\underline{G}}_{\cdot},Q)$-<u>compensée appartient à</u> $\underline{\underline{H}}^F(\underline{\underline{G}}_{\cdot},Q)$ <u>et</u> X <u>appartient à</u> $\underline{\underline{H}}^F_{loc}(\underline{\underline{G}}_{\cdot},Q)$.

DEMONSTRATION. Si X appartient à $\underline{\underline{H}}^F(\underline{\underline{F}}_{\cdot},P)$, $[X,X]^{\frac{1}{2}}_{\infty}$ appartient à $L^F(P)$ et donc à $L^F(Q)$; le résultat se déduit alors du corollaire 1.
La semimartingale X est alors dans $\underline{\underline{H}}^F_{loc}(\underline{\underline{G}}_{\cdot},Q)$ car tout processus prévisible à variation finie est localement borné.

REMARQUE. Si $\underline{\underline{G}}_{\cdot} \subset \underline{\underline{F}}_{\cdot}$ et X est $\underline{\underline{G}}_{\cdot}$-adaptée, X appartient à $\underline{\underline{H}}^F(\underline{\underline{G}}_{\cdot},Q)$ si elle appartient à $\underline{\underline{H}}^F(\underline{\underline{F}}_{\cdot},P)$, car il est clair que $p^F_{(\underline{\underline{G}}_{\cdot},Q)} \leq p^F_{(\underline{\underline{F}}_{\cdot},Q)}$ $\leq c\;p^F_{(\underline{\underline{F}}_{\cdot},P)}$

UNE REMARQUE SUR LES CHANGEMENTS DE PROBABILITE.

Dellacherie a montré que si X est une semimartingale, il existe une probabilité Q équivalente à P, de densité bornée, telle que, pour tout t, X^t appartienne à $\underline{\underline{M}}^2(Q) \oplus \underline{\underline{V}}^1(Q)$. Nous allons voir que les théorèmes

1 et 2 entrainent un résultat plus fort, démontré par Bichteler dans le cas p=2, et par Dellacherie (communication personnelle) dans le cas général.

THEOREME 3. Soit (X^n) une suite de semimartingales. Il existe une probabilité Q équivalente à P, de densité bornée, telle que, pour tout t et tout n, X^n arrétée en t appartienne à $\bigcap_p \underline{\underline{H}}^p(Q) \cap \underline{\underline{H}}^F(Q)$.

DEMONSTRATION. Nous traitons, pour des simplifications de notations, le cas d'une seule semimartingale X, l'argument étant essentiellement le même pour une suite. Rappelons un lemme du à Dellacherie, et qui résulte simplement du lemme de Borel-Cantelli: si (z_n) est une suite de v.a. p.s. finies, il existe une probabilité Q équivalente à P, de densité bornée, telle que, pour tout n, z_n est Q-intégrable.

Soit Q_1 une probabilité équivalente à P, de densité bornée, telle que pour tout p et tout t, $[X,X]_t^p$ et $F([X,X]_t^{\frac{1}{2}})$ soient Q_1-intégrable. La semimartingale X est alors Q_1-spéciale et, d'après le théorème 2, pour tout t, sa Q_1-compensée M appartient à $\bigcap_p \underline{\underline{H}}^p(Q_1) \cap \underline{\underline{H}}^F(Q_1)$. Si A est le Q_1-compensateur prévisible de X, on peut trouver une probabilité Q équivalente à Q_1, de densité bornée, telle que pour tout p et t $(\int_0^t |dA_s|)^p$ et $F(\int_0^t |dA_s|)$ soient Q-intégrables; alors, pour tout t, A^t appartient à $\bigcap_p \underline{\underline{H}}^p(Q) \cap \underline{\underline{H}}^F(Q)$ et, d'après le corollaire 3 du théorème 1, il en va de même pour M^t et donc pour X^t.

REFERENCES.

1 D. LEPINGLE. Une inégalité de martingale. Sém. de Proba. XIII

2 C. STRICKER. Quasimartingales, martingales locales, semimartingales et filtration naturelle. Z.f.W. 39, 1977.

3 M. YOR. Les inégalités de sous martingales comme conséquence de la relation de domination. Stochastics, Vol 3, 1979.

4 M. YOR. Quelques intéractions entre mesures vectorielles et intégrales stochastiques. Sém. de théorie du Potentiel IV, lect. notes in Math. n° 713, 1979.

5 M. YOR. En cherchant une définition naturelle des intégrales stochastiques optionnelles. Sém. de Proba. XIII.

6 E. LENGLART, D. LEPINGLE, M. PRATELLI. Présentation unifiée de certaines inégalités de la théorie des martingales. Sém. de Proba. XIV.

Erik LENGLART
Université de Rouen
Département de Mathématiques
76 130 Mont Saint Aignan.