ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

PAUL-JEAN CAHEN

Anneaux presque intégralement clos

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 91, série *Mathématiques*, nº 24 (1987), p. 61-64

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1987__91_24_61_0>

Ann. Sci. Univ. Clermont II, Sér. Math., Fasc. 24, pp. 61-64

ANNEAUX PRESQUE INTEGRALEMENT CLOS

Paul Jean CAHEN

Résumé :

On donne des exemples d'anneaux A intègres mais non intégralement clos, de corps des fractions K, tels que $x \in K$ et $x^n \in A$ implique $x \in A$, en considérant, ou bien des extensions quadratiques du corps des rationnels, ou bien des anneaux de polynômes.

Abstract :

We give examples of domains A, non integrally closed, of field of fractions K, such that $x \in K$ and $x^n \in A$ implies $x \in A$, by considering either quadratic extensions of the field of rational numbers or rings of polynomials.

Introduction :

Tous les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires. Si B et A sont deux anneaux tels que $B \subset A$, on dira qu'un élément x de A est *radical sur B* si

$$\exists n \in N \ , x^n \in B$$

Bien sûr un élément radical est entier sur B, on dira donc qu'un anneau intègre B est *presque intégralement clos* si les seuls éléments de son corps des fractions qui sont radicaux sur B sont les éléments de B.

Bourbaki donne un exemple d'anneau presque intégralement clos qui n'est pas intégralement clos [[1], chapitre V , § 1 Exercice 15] mais celui-ci semble inutilement compliqué. On donne ici, dans une première partie,des exemples parmi les ordres d'extensions quadratiques de Q . Dans une seconde partie on indique un certain lien avec le groupe des unités des anneaux considérés. On revient enfin pour finir à l'exemple de Bourbaki en le simplifiant et le généralisant : Si L/K est une extension de corps, on considère le sous-anneau B de L [X] formé des polynômes P tels que $P(0) \in K$, on donne alors des conditions nécessaires et suffisantes pour que B soit Noethérien, intégralement clos ou presque intégralement clos.

1. Ordres des corps quadratiques.

Notons tout d'abord que si B est intègre, alors les éléments de son corps des fractions qui sont radicaux sur B sont nécessairement dans la clôture intégrale A de B.

Théorème : *Soit d un entier sans facteur carré tel que $d \equiv 1 \pmod 4$, B l'anneau*

$\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$, $x = \dfrac{1+\sqrt{d}}{2}$ *et* $A = \mathbf{Z}[x]$ *la clôture intégrale de B.*

i) Si $d \equiv 5 \pmod 8$, tout élément de A est radical sur B, de façon précise si $\alpha \in A$ alors $\alpha^3 \in B$.

ii) Si $d \equiv 1 \pmod 8$ alors B est presque intégralement clos.

Pour le démontrer, on considère $\alpha = a + bx$, tel que $\alpha \in A$, mais $\alpha \notin B$, d'où $a, b \in \mathbf{Z}$ mais b est impair. On a alors

$$\alpha^2 = t\alpha - n \quad \text{où } t = \mathrm{Tr}(\alpha),\ n = N(\alpha) \ \text{(trace et norme)}$$

on observe que $t = 2a + b$ est impair et $n = a^2 + ab + b^2\left(\frac{1-d}{4}\right)$ est de même parité que $\frac{1-d}{4}$. Si $d \equiv 5 \pmod 8$, on tire $\alpha^3 \in B$, si $d \equiv 1 \pmod 8$, on tire par récurrence $\alpha^n = t_n\alpha - n_n$ où t_n impair, donc $\alpha^n \notin B$, pour tout n.

Remarque :

Si on considère l'anneau $C = \mathbf{Z}[2\sqrt{d}]$, où $d \equiv 1 \pmod 8$, alors certains éléments de la clôture intégrale A de C sont radicaux sur C (à savoir ceux de $B = \mathbf{Z}[\sqrt{d}]$) et d'autres ne le sont pas.

2. Lien avec les unités.

Si B est intègre et A désigne sa clôture intégrale, on note B^* et A^* les groupes des unités respectivement de B et de A. *Pour que* B *soit presque intégralement clos, il faut que* B^*/A^* *soit sans torsion,* or dans le cas où B est un ordre, et donc A l'anneau des entiers d'un corps de nombres, B^*/A^* est un groupe fini [(2) II. § 4, Exercice 4] ;dans ce cas il faut donc avoir $B^* = A^*$.

On retrouve donc ici le fait que si $d > 0$, et $d \equiv 1 \pmod 8$, l'unité fondamentale du corps $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ appartient à $\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$.

On voit par contre que si $d < 0$, $d \equiv 5 \pmod 8$ mais $d \neq -3$, on a alors $B^* = A^* = \{-1, +1\}$, tandis que B n'est pas presque intégralement clos.

Les exemples du § suivant montrent qu'en général on peut avoir $B^* \neq A^*$ et B presque intégralement clos.

3. Anneau de polynômes.

On note L/K une extension et $\overline{K}$ la fermeture algébrique de K dans L. On considère le sous-anneau B de L[X] formé des polynômes P tels que $P(0) \in K$.
On note que B est intègre de corps de fractions L(X).
La clôture intégrale de B est le sous-anneau A de L[X] formé des polynômes P tels que $P(0) \in \overline{K}$, on a

$$K[X] \subset B \subset A \subset L[X]$$

Ainsi *B est intégralement clos si et seulement si* $\overline{K} = K$, c'est-à-dire L/K est une extension transcendante pure.

On voit aussi que

B *est Nœthérien si et seulement si l'extension* L/K *est finie.*

Si l'extension L/K est de degré n, alors $A = L[X]$ est un $K[X]$-module libre de rang n et B de même, dans le cas contraire, on montre aisément que l'idéal I de B formé des polynômes P tels que $P(0) = 0$, n'est pas de type fini.
On a enfin, avec les notations ci-dessus :

Proposition : B *est presque intégralement clos si et seulement si tout élément de L radical sur K est un élément de K.*

Ainsi, si L/K est algébrique, mais L ne possède pas d'autres éléments radicaux sur K que les éléments de K, alors B est presque intégralement clos, mais n'est pas intégralement clos. Or, on a tout simplement :

Proposition : *Si* $L/\mathbb{Q}$ *est une extension galoisienne de degré impair, alors tout élément de* L *radical sur* $\mathbb{Q}$ *est un élément de* $\mathbb{Q}$ *.*

En effet, les seules racines de l'unité contenues dans L sont alors 1 et -1 et si x est radical sur $\mathbb{Q}$, soit $x^n = a$ où $a \in \mathbb{Q}$, on sait que les conjugués de x sont de la forme ξa où ξ est une racine de $n^{\text{ème}}$ de l'unité donc, ici, nécessairement $\pm x$, d'où x est de degré 1 ou 2 et comme l'extension est de degré impair, x est nécessairement de degré 1.

L'exemple le plus simple est celui d'une extension de degré 3 (par exemple $\mathbb{Q}(x)$ où x est racine de $X^3 - 3X + 1$) et, contrairement à la construction donnée par Bourbaki [(1), Chap. V § 1, Exercice 15], on voit qu'il n'est pas nécessaire d'imposer au groupe de Galois de l'extension d'être non résoluble.

On note enfin que $B^* = K$, alors que $A^* = \overline{K}$, et donc qu'on peut avoir $B^* \neq A^*$ et B presque intégralement clos.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI : Algèbre commutative, Hermann, Paris.

[2] Z.I. BOREVITCH et I.R. CHAFAREVITCH : Théorie des nombres, Gauthier-Villars, Paris.

Faculté des Sciences de TUNIS, Département de Mathématiques, Campus Universitaire El Menzah
Tunis, Tunisie.