

ANNALES SCIENTIFIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2  
*Série Mathématiques*

AMIN M. KAIDI

**Structure des algèbres de Jordan-Banach non commutatives  
réelles de division**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 97, série *Mathématiques*, n° 27 (1991), p. 119-124

[http://www.numdam.org/item?id=ASCFM\\_1991\\_\\_97\\_27\\_119\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1991__97_27_119_0)

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**STRUCTURE DES ALGÈBRES DE JORDAN-BANACH  
NON COMMUTATIVES REELLES DE DIVISION \***

Amin M. KAIDI

**INTRODUCTION**

Il est bien connu que les algèbres (associatives) normées réelles de division sont de dimension finie, et à un isomorphisme près sont :  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$  l'algèbre des quaternions de Hamilton [1].

Dans [4] Martinez a prouvé que toute algèbre de Jordan-Banach complexe de division est isomorphe à  $\mathbb{C}$ .

Dans cet article on généralise le résultat de Martinez au cas Jordan non commutatif et on donne un théorème de structure pour les algèbres de Jordan non commutatives réelles de division.

**1. ETUDE DU SPECTRE DANS LES ALGÈBRES DE JORDAN BANACH NON COMMUTATIVES**

On désigne par  $K$  un corps commutatif de caractéristique nulle et on suppose que toutes les  $K$ -algèbres sont unitaires. Soit  $A$  une algèbre sur  $K$ . On rappelle que  $A$  est de Jordan non commutative (en abrégé : Jordan n.c) si elle vérifie les deux identités suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(J)} \quad x^2(yx) &= (x^2y)x \\ \text{(F)} \quad x(yx) &= (xy)x \end{aligned}$$

---

\* Cet article fait partie de la thèse de Doctorat préparée par l'auteur sous la direction du Professeur Rodriguez Palacios.

A est flexible si elle vérifie (F) et elle est de Jordan si elle est commutative et vérifie (J). Il est bien connu qu'une algèbre flexible A est de Jordan n.c. si et seulement si  $A^+$  est une algèbre de Jordan,  $A^+$  étant l'algèbre de même structure d'espace vectoriel que A, munie du produit  $x.y = \frac{1}{2}(xy + yx)$  [7, p. 473].

Soit A une algèbre de Jordan n.c. ; un élément x de A est inversible s'il vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes [5] :

1°) Il existe  $y \in A$  tel que  $xy = yx = 1$  et  $x^2y = yx^2 = x$ .

2°) x est inversible dans l'algèbre de Jordan  $A^+$  (voir [2] pour la définition et les propriétés).

A est de division si tout élément non nul de A est inversible. On note  $\text{Inv}(A)$  l'ensemble des éléments inversibles de A. Une sous-algèbre B de A est pleine si tout élément de B inversible dans A est inversible dans B.

Le théorème suivant permet de ramener l'étude du spectre au cas associatif.

**Théorème 1.1.** Tous élément a d'une algèbre de Jordan n.c. A est contenu dans une sous-algèbre associative commutative et pleine de A. On notera  $K(a)$  la sous-algèbre associative commutative et pleine engendrée par a.

**Preuve.** Un sous-ensemble X de A est dit commutatif si quels que soient x et y dans X,  $xy = yx$ . D'après le lemme de Zorn, {a} est contenu dans un sous-ensemble commutatif maximal M. M est évidemment un sous-espace de A.

On rappelle que si A est une algèbre flexible, alors pour tout élément z dans A, l'opérateur  $L_z^- : x \rightarrow L_z^-(x) = \frac{1}{2}(zx - xz)$ , est une dérivation de  $A^+$  [8, p. 146].

On rappelle aussi que si J est une algèbre de Jordan, D une dérivation de J et x un élément inversible de J alors  $D(x^{-1}) = -U_x^{-1}(D(x))$  [2, p. 54 exercice 4]. On utilise les deux résultats pour montrer que M est une sous-algèbre pleine de A.

Soit  $x, y \in M$ . Pour tout  $z \in M$ ,  $L_z^-(xy) = L_z^-(x.y) = L_z^-(x).y + x.L_z^-(y) = 0$ . D'où  $M \cup \{xy\}$  est commutatif. Le caractère maximal de M implique que  $xy \in M$ . Soit x un élément de M inversible dans A. Pour tout  $z \in M$ ,  $L_z^-(x^{-1}) = -U_x^{-1}(L_z^-(x)) = 0$ . D'où  $M \cup \{x^{-1}\}$  est commutatif et, par suite,  $x^{-1} \in M$ .

En particulier  $M$  est une algèbre de Jordan. Le théorème devient une conséquence de son analogue dans le cas Jordan [4, p. 41, corollaire 5.11].

Dans toute la suite  $K$  désignera  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On dit qu'une algèbre  $A$  sur  $K$  est normée si le  $K$ -espace vectoriel  $A$  est muni d'une norme  $\|\cdot\|$  vérifiant  $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ , pour tout  $x, y$  dans  $A$ . Si, en plus, cette norme est complète on dira que  $A$  est de Banach.

Soit  $A$  une algèbre de Jordan-Banach n.c, alors  $\text{Inv}(A) = \text{Inv}(A^+)$  est une partie ouverte de  $A$  [4, p. 66, théorème 3.3] et l'application  $(x \rightarrow x^{-1})$  de  $\text{Inv}(A)$  dans  $A$  est continue [4, p. 66, lemme 3.4]. On en déduit aisément que si  $B$  est une sous-algèbre pleine de  $A$  alors  $\bar{B}$  l'est aussi. En particulier, si  $a \in A$ , alors  $K(a)$  est associative commutative pleine et fermée.

Soit  $A$  une  $\mathbb{C}$ -algèbre de Jordan n.c. On définit le spectre d'un élément  $x$  de  $A$  comme étant l'ensemble des  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\lambda - x \notin \text{Inv}(A)$  et on note  $\text{Sp}(x, A)$ , ou plus simplement  $\text{Sp}a$  lorsqu'il n'y a pas de confusion. Si  $x$  appartient à une sous-algèbre pleine  $B$  de  $A$  alors  $\text{Sp}(x, B) = \text{Sp}(x, A)$ . En particulier  $\text{Sp}(x, A) = \text{Sp}(x, \mathbb{C}(x))$ . Si  $A$  est en plus de Banach alors  $\text{Sp}(x, A) = \text{Sp}(x, \mathbb{C}(x))$ . Ces remarques nous permettent d'exploiter directement les résultats connus sur le spectre dans le cas associatif. On cite spécialement le résultat suivant :

**Théorème 1.2.** Soit  $a$  un élément d'une  $\mathbb{C}$ -algèbre de Jordan n.c. normée. Alors  $\text{Sp}a \neq \emptyset$ .

Soit  $A$  une  $\mathbb{R}$ -algèbre de Jordan n.c,  $A_{\mathbb{C}}$  le complexifié de  $A$ . On définit de même le spectre d'un élément  $x$  de  $A$  comme étant le spectre de  $x$  dans  $A_{\mathbb{C}}$ . On vérifie, comme dans le cas associatif, que si  $\lambda \in \text{Sp}x$  alors  $\bar{\lambda} \in \text{Sp}x$  et que, si  $\lambda \neq 0$ , alors  $\lambda \in \text{Sp}x$  si et seulement si  $x^2 - (\lambda + \bar{\lambda})x + |\lambda|^2 \notin \text{Inv}(A)$ . [1, p. 70. théorème 7 et 8].

## 2. ALGÈBRES DE JORDAN N.C. NORMÉES DE DIVISION

**Théorème 2.1.** Soit  $A$  une  $\mathbb{C}$ -algèbre de Jordan n.c. normée de division. Alors  $A$  est isomorphe à  $\mathbb{C}$ .

**Preuve.** Soit  $a \in A$  et  $\lambda \in \text{Sp}a \neq \emptyset$ .  $\lambda - a \notin \text{Inv}(A)$ . D'où  $a = \lambda$ .

**Théorème 2.2.** Soit  $A$  une  $\mathbb{R}$ -algèbre de Jordan n.c. normée de division. Alors

**A est une algèbre quadratique.**

Preuve. Une algèbre  $A$  est dit quadratique si pour tout  $a \in A$ , il existe  $v, u \in K$  tel que  $a^2 + va + u = 0$ . Soit  $a$  un élément non nul de  $A$  et  $\lambda \in \text{Sp}a$ ,  $\lambda \neq 0$ . Alors  $a^2 - (\lambda + \bar{\lambda})a + |\lambda|^2 \in \text{Inv}(A)$  et par suite  $a^2 - (\lambda + \bar{\lambda})a + |\lambda|^2 = 0$ .

Remarque 2.3. Soit  $A$  une  $\mathbb{R}$ -algèbre de Jordan n.c. normée de division et  $a \in A$ . Si  $a \notin \mathbb{R}$ , alors l'équation du second ordre à coefficients réels vérifiée par  $a$  est unique. Donc  $\text{Sp}a = \{\lambda, \bar{\lambda}\}$  et si  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  sont tels que  $a^2 - 2\alpha a + \alpha^2 + \beta^2 = 0$  alors  $\text{Sp}a = \{\alpha \pm i\beta\}$ . Soit  $\hat{A}_{\mathbb{C}}$  le complété de  $A_{\mathbb{C}}$ . On a  $\emptyset \neq \text{Sp}(a, \hat{A}_{\mathbb{C}}) \subseteq \text{Sp}(a, A_{\mathbb{C}})$ . D'où  $\text{Inf}\|a^n\|^{1/n} = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(a, A_{\mathbb{C}})\} = |\lambda|$  [1, p. 23 théorème 8]. Donc  $|\lambda| = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} \leq \|a\|$ .

Lemme 2.4. (Osborn) [6, théorème 1]. Soit  $V$  une  $K$ -algèbre anti-commutative ( $x \wedge y$  le produit de  $x$  et  $y$ ) munie d'une forme bilinéaire  $(\cdot, \cdot)$ . Alors le  $K$ -espace vectoriel  $A = K \oplus V$  muni du produit :  $(\alpha + x)(\beta + y) = \alpha\beta + \alpha y + \beta x + x \wedge y$ , est une algèbre quadratique. Réciproquement, si  $A$  est une algèbre quadratique, on pose  $V = \{x \in A / x^2 \in K \text{ et } x \notin K - \{0\}\}$ , alors  $A = K \oplus V$ . En plus, si  $x, y \in V$  et  $xy = (x, y) + x \wedge y$  dénote la décomposition de  $xy$  suivant  $K \oplus V$ , alors  $\wedge$  est un produit anti-commutatif sur  $V$  et  $(\cdot, \cdot)$  est une forme bilinéaire sur  $V$ .

Remarque 2.5.

1°) Si  $A$  est une algèbre quadratique, alors  $A^+$  est l'algèbre de Jordan associée à la forme bilinéaire symétrique  $(x|y) = \frac{1}{2}((x, y) + (y, x))$  définie sur  $V$  (voir [2, p. 13] pour la définition).

2°) Soit  $J$  une  $\mathbb{R}$ -algèbre de Jordan associée à une forme bilinéaire symétrique  $(\cdot | \cdot)$ . Alors  $J$  est de division si et seulement si  $(\cdot | \cdot)$  est définie négative.

3°) Une algèbre quadratique  $A$  est de Jordan n.c. si et seulement si  $A$  est flexible. Cette condition est équivalente aux deux conditions suivantes :  $(\cdot, \cdot)$  est symétrique et, pour tout  $x, y \in V$ ,  $(x|x \wedge y) = 0$ .

4°) Soit  $J$  une  $\mathbb{R}$ -algèbre de Jordan normée de division ; alors  $J$  est associée à une forme bilinéaire symétrique définie négative continue sur un

espace vectoriel normé réel  $V((1),(2))$  et théorème 2.2). Soit  $a \in J = \mathbb{R} \oplus V$ ,  $a = \alpha + x$ . Alors  $a^2 - 2\alpha a + \alpha^2 - (x|x) = 0$ . On note  $\|a\|_0 = |\alpha^2 - (x|x)|^{1/2}$  et  $\|a\|_1 = |\alpha| + \|x\|$ . D'après la remarque 2.3,  $\|a\|_0 \leq \|a\|$  et  $\|\cdot\|_1$  est équivalente à  $\|\cdot\|$ . Réciproquement, si  $V$  est un espace vectoriel normé réel muni d'une forme bilinéaire symétrique  $(\cdot|\cdot)$  définie négative continue, alors l'algèbre de Jordan associée à  $(\cdot|\cdot)$  est de division normée par  $\|\cdot\|_1$ .

**Théorème 2.6.** Les uniques algèbres de Jordan réelles normées de division sont de la forme  $J = \mathbb{R} \oplus V$ , où  $V$  est un espace vectoriel normé réel muni d'une forme bilinéaire symétrique  $(\cdot|\cdot)$  définie négative continue et  $J$  est l'algèbre de Jordan associée à  $(\cdot|\cdot)$  munie de la norme  $\|\alpha + x\| = |\alpha| + \|x\|$ .

**Théorème 2.7.** Les uniques algèbres de Jordan n.c. réelles normées de division sont de la forme  $A = \mathbb{R} \oplus V$ , où  $V$  est un espace vectoriel normé réel muni d'une forme bilinéaire symétrique  $(\cdot|\cdot)$  définie négative continue et d'un produit anti-commutatif  $\wedge$  continu vérifiant  $(x|x \wedge y) = 0$  pour tout  $x, y$  dans  $V$ ;  $A$  est l'algèbre quadratique associée à  $(V, (\cdot|\cdot), \wedge)$  muni de la norme  $\|\alpha + x\| = |\alpha| + \|x\|$ .

**Corollaire 2.8.** Les uniques algèbres alternatives réelles normées de division sont  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  (quaternions de Hamilton) et  $\mathbb{O}$  (Octonions de Cayley).

**Preuve.** Soit  $A$  une  $\mathbb{R}$ -algèbre alternative réelle normée de division,  $A$  est de Jordan n.c. de division [2] et [3],  $A = \mathbb{R} \oplus V$ , l'application  $X = \alpha + x \rightarrow \bar{X} = \alpha - x$  est une involution dans  $A$  et  $q|X| = X\bar{X}$  est une forme quadratique sur  $A$  vérifiant  $q(XY) = q(X)q(Y)$  d'où le résultat [7].

**REFERENCES**

1. F.F. BONSALL and J. DUNCAN, Complete normed algebras, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1973.
2. N. JACOBSON, Structure and representations of Jordan algebras, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 1968.
3. A. MOJTAR KAIDI, Bases para une teoria de las algebras no asociativas normadas completas, tesis doctoral, Universidad de Granada, 1977.
4. J. MARTINEZ MORENO, Sobre algebras de Jordan normadas completas, Tesis doctoral, Uni. de Granada, n° 149 (1977).
5. M. McCRIMMON, Non commutative Jordan rings, Trans-Amer. Math. Soc. 158, n°1 (1971), 1-33.
6. J.M. OSBORN, Quadratic division algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962), 202-221.
7. R.D. SCHAFER, An Introduction to non associative algebras, Academic Press, New-York, 1966.
8. R.D. SCHAFER, Non commutative Jordan algebras of characteristic 0, Amer. Math. Soc. 6 (1955), 472-475.

Département de Mathématiques  
Faculté des Sciences  
Université Mohammed V  
RABAT B.P. 1014 (MAROC)