

ANNALES SCIENTIFIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2  
*Série Probabilités et applications*

M. DOISY

**Files d'attente à rejet différé**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 88, série *Probabilités et applications*, n° 5 (1986), p. 73-89

<[http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA\\_1986\\_\\_88\\_5\\_73\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1986__88_5_73_0)>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

FILES D'ATTENTE A REJET DIFFERE

M. DOISY

RESUME : Nous étudions dans cet article les files d'attente stationnaires à rejet différé. Ces files admettent la discipline suivante : le client qui trouve le serveur occupé revient avec le client suivant ; ils sont servis tous deux si le serveur est libre, sinon ils sont à nouveau rejetés ; le nombre de rejets est limité à  $k$  ( $k$  entier  $\geq 1$ ).

Dans un premier temps on construit une solution stationnaire dans une extension de l'espace sous-jacent  $\Omega$  (par une méthode analogue à celle de Neveu [1]).

On étudie ensuite quelques constantes du système, liées au temps moyen des inter-arrivées et des demandes de service.

ABSTRACT : This article deals with postponed stationary queues. These allow of the following procedure : the customer who finds the attendant busy comes back with the next customer ; both are waited on if the attendant is available ; if not they are rejected again ; the rejections may not number more than  $k$  (integer  $k \geq 1$ ).

A stationary solution is first elaborated within an extension of the underlying space  $\Omega$ .

Various constants of the system are then studied in connexion with the average of the inter-arrival and service-times.

## I - LE MODELE.

Le modèle étudié est le suivant.

Etant donné un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  muni d'un automorphisme ergodique  $\theta$  et deux variables aléatoires réelles intégrables strictement positives réelles intégrables strictement positives  $\sigma$  et  $\tau$ , considérons un flot de clients arrivant à des instants successifs  $T_n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) avec  $T_0 = 0$  et  $T_{n+1} - T_n = \tau \circ \theta^n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) qui réclament des services  $\sigma_n = \sigma \circ \theta^n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) à un unique serveur.

Le client d'indice  $n$  est servi si le serveur est libre à l'instant  $T_n$  ; sinon il est rejeté. Dans ce cas il se représente au serveur à l'instant  $T_{n+1}$  ; il est alors servi avec le client d'indice  $n+1$  si le serveur est libre ; sinon il est rejeté à nouveau, comme le client d'indice  $n+1$ , et ils reviennent tous deux avec le client suivant. Les clients n'acceptent pas plus de  $k$  rejets ( $k$  entier  $\geq 1$ ).

Si à l'instant  $T_n$  le serveur est libre, il se charge d'un bloc de clients, de taille au plus  $k+1$  ; le client d'indice  $m$  sera dans ce bloc si  $m = n$  ou s'il a été rejeté précédemment avec  $m$  vérifiant la relation :  $0 < n-m \leq k$ .

Si  $M(\omega)$  désigne l'ensemble des indices  $n$  pour lesquels le serveur est libre en  $T_n$ , la connaissance de  $M(\omega)$  détermine le système au sens où il fournit les indices de tous les clients servis ; en effet les distances entre les indices consécutifs de  $M(\omega)$  donnent les longueurs des blocs de clients servis.

Nous chercherons donc à construire un sous-ensemble aléatoire  $M(\omega)$  de  $\mathbb{Z}$  satisfaisant aux conditions suivantes :

1) la condition de stationnarité :

$$M(\theta\omega) = M(\omega) - 1 \quad \forall \omega \in \Omega$$

2) si 0 est dans  $M(\omega)$  et si  $j$  est le nombre de clients dans le bloc correspondant ( $1 \leq j \leq k+1$ ) en posant :

$$V_j(\omega) = \text{Inf}\{n \geq 1 \text{ tq } \tau + \tau_0\theta + \dots + \tau_0\theta^{n-1} > \sigma + \sigma_0\theta^{-1} + \dots + \sigma_0\theta^{-j+1}\}$$

qui représente l'indice suivant de liberté, alors  $V_j(\omega)$  doit être le premier entier à droite de 0 dans  $M(\omega)$ .

En fait, dans la construction que nous proposons, le sous-ensemble aléatoire  $M$  ne sera pas défini sur  $\Omega$  lui-même, mais sur une extension de  $\Omega$ .

## II - CONSTRUCTION DE LA SOLUTION STATIONNAIRE SUR UNE EXTENSION DE $\Omega$ .

Remarquons tout d'abord qu'à l'instant  $T_{V_j}(\omega)$ , le bloc sera de longueur :

$\text{Inf}(V_j(\omega), k+1)$  qu'on notera :

$$V_j(\omega) \wedge k+1.$$

Si 0 est dans  $M(\omega)$  avec  $j$  clients à servir, on obtient facilement, par récurrence, les indices à droite de 0 dans  $M(\omega)$  ; plus délicat est de "remonter dans le passé" c'est-à-dire, de déterminer le prédécesseur de 0. Pour cela on ne suppose plus 0 dans  $M(\omega)$ , et on s'intéresse au dernier client servi avant (au sens large) le client d'indice 0.

Si l'indice de celui-ci est  $\ell$ , on doit avoir :

$$V_j(\theta^{-\ell}\omega) > \ell.$$

On est aussi amené à considérer l'ensemble :

$$\bar{\Omega} = \{(\omega, j, \ell) \in \Omega \times [1, k+1] \times \mathbb{N} \text{ tq } V_j(\theta^{-\ell}\omega) > \ell\}$$

que l'on munira de la trace de la mesure produit, soit :

$$d\bar{\Gamma} = 1_{\bar{\Omega}} dP \otimes d\lambda_1 \otimes d\lambda_2 \text{ où } d\lambda_1 \text{ (resp. } d\lambda_2) \text{ est la mesure de comptage.}$$

On définit une transformation  $\bar{\theta}$  sur  $\bar{\Omega}$ , à partir de  $\theta$ , en observant quels indices conviennent en  $\theta_\omega$ , donc en étudiant :

$$V_j[\theta^{-(\ell+1)}(\theta_\omega)] = V_j(\theta^{-\ell}_\omega).$$

Si  $V_j(\theta^{-\ell}_\omega) > \ell+1$ , on prend le point  $(\theta_\omega, j, \ell+1)$  de  $\bar{\Omega}$ .

Si  $V_j(\theta^{-\ell}_\omega) = \ell+1$ , pour  $\theta_\omega$ , le dernier client servi est celui d'indice 0 avec un bloc de longueur  $V_j(\theta^{-\ell}_\omega) \wedge k+1$ .

On prend donc le point  $(\theta_\omega, V_j(\theta^{-\ell}_\omega) \wedge k+1, 0)$  de  $\bar{\Omega}$ . En résumé, pour  $(\omega, j, \ell)$  dans  $\bar{\Omega}$  on définit la transformation  $\bar{\theta}$  par :

$$\bar{\theta}(\omega, j, \ell) = (\theta_\omega, j, \ell+1) \quad \text{si } V_j(\theta^{-\ell}_\omega) > \ell+1$$

$$\bar{\theta}(\omega, j, \ell) = (\theta_\omega, V_j(\theta^{-\ell}_\omega) \wedge k+1, 0) \quad \text{si } V_j(\theta^{-\ell}_\omega) = \ell+1.$$

Considérons la section de  $\bar{\Omega}$  en  $\omega$ , notée  $\bar{\Omega}(\omega)$ .

$$\text{On a : } \text{Card } \bar{\Omega}(\omega) = \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} 1_{\{V_j(\theta^{-\ell}_\omega) > \ell\}}$$

Les applications  $V_j$  étant croissantes en  $j$ , on a :

$$\text{Card } \bar{\Omega}(\omega) \leq (k+1) - \sum_{\ell \in \mathbb{N}} 1_{\{V_{k+1}(\theta^{-\ell}_\omega) > \ell\}}$$

et la condition :  $\sum_{\ell \in \mathbb{N}} 1_{\{V_{k+1}(\theta^{-\ell}_\omega) > \ell\}}$  finie presque sûrement, suffit à

assurer que  $\text{Card } \bar{\Omega}(\omega)$  est aussi fini presque sûrement. Nous ferons cette hypothèse pour la suite.

Remarquons que cette condition est vérifiée si  $E(V_{k+1})$  est finie. En effet

$$E(V_{k+1}) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} P(V_{k+1} > \ell)$$

ce qui s'écrit encore :

$$[V_{k+1}] = \int_{\Omega} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} 1_{\{V_{k+1} \circ \theta^{-\ell} > \ell\}} dP.$$

En posant :  $\bar{\Omega}_n = \bar{\theta}^n(\bar{\Omega})$ , on obtient une suite décroissante d'ensembles et on s'intéresse à :

$$\bar{\Omega}_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\Omega}_n.$$

Pour tout  $n$ ,  $\bar{\Omega}_n(\omega)$  est non vide car :

$$\bar{\theta}^n(\theta^{-n}\omega, x, x) \text{ est de la forme } (\omega, x, x).$$

Un argument classique de compacité prouve alors que  $\bar{\Omega}_{\infty}(\omega) = \bigcap_n \bar{\Omega}_n(\omega)$  est non vide, pour tout  $\omega$ .

Tout point de  $\bar{\Omega}_n$  de la forme  $(\theta\omega, x, x)$  est l'image par  $\bar{\theta}$  d'au moins un point de  $\bar{\Omega}_{n-1}$ , de première composante  $\omega$ .

En effet si  $(\theta\omega, j, \ell)$  appartient à  $\bar{\Omega}_n$ , on a :  $(\theta\omega, j, \ell) = \bar{\theta}^n(\omega', j', \ell')$  avec  $(\omega', j', \ell')$  dans  $\bar{\Omega}$  et donc

$$\begin{aligned} (\theta\omega, j, \ell) &= \bar{\theta}[\bar{\theta}^{n-1}(\omega', j', \ell')] \\ &= \bar{\theta}[(\theta^{n-1}(\omega'), j'', \ell'')]. \end{aligned}$$

Alors  $\theta^{n-1}(\omega') = \omega$  et  $(\omega, j'', \ell'')$  appartient à  $\bar{\Omega}_{n-1}$ .

Finalemment on a :  $\text{Card } \bar{\Omega}_n(\theta\omega) \leq \text{Card } \bar{\Omega}_{n-1}(\omega)$ . Par passage à la limite décroissante, on a :

$$0 \leq \text{Card } \bar{\Omega}_\infty(\theta\omega) \leq \text{Card } \bar{\Omega}_\infty(\omega).$$

Grâce à l'ergodicité de l'application  $\theta$ , on en déduit que  $\text{Card } \bar{\Omega}_\infty(\omega)$  est presque sûrement une constante finie et non nulle.

Posons alors :  $\text{Card } \bar{\Omega}_\infty(\omega) = c$  p.s. [ $1 \leq c \leq \infty$ ].

Appelons  $N$  l'ensemble négligeable des  $\omega$  pour lesquels cette égalité n'est pas vérifiée et remplaçons  $\Omega$  par l'ensemble équivalent :

$$\Omega \setminus N \simeq \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \theta^j(N)$$

qu'on notera encore  $\Omega$ .

On a alors, pour tout  $\omega$  et pour tout entier  $j$  de  $\mathbb{Z}$

$$\text{Card } \bar{\Omega}_\infty(\omega) = \text{Card } \bar{\Omega}_\infty(\theta^j\omega) = c.$$

Notons encore que l'égalité :  $\text{Card } \bar{\Omega}_\infty(\cdot) = c$  implique :  $\bar{P}(\bar{\Omega}_\infty) = c$ .

L'application  $\bar{\theta}$  envoie surjectivement  $\bar{\Omega}_\infty(\omega)$  dans  $\bar{\Omega}_\infty(\theta\omega)$ . En effet, si à partir du point  $(\theta\omega, j, \ell)$  de  $\bar{\Omega}_\infty$  on peut "remonter"  $n+1$  fois par  $\bar{\theta}$  (i.e.  $(\theta\omega, j, \ell) \in \bar{\theta}^{n+1}(\bar{\Omega})$ ), il existe au moins un point de :

$$\bar{\theta}^{-1}(\{(\theta\omega, j, \ell)\})$$

à partir duquel on peut "remonter"  $n$  fois par  $\bar{\theta}$ .

Ceci étant vrai, pour tout entier  $n$ , l'un des points de  $\bar{\theta}^{-1}(\{(\theta\omega, j, \ell)\})$  est dans  $\bar{\Omega}_\infty(\omega)$ .

Les ensembles  $\bar{\Omega}_\infty(\omega)$  et  $\bar{\Omega}_\infty(\theta\omega)$  ayant le même cardinal fini, l'application  $\bar{\theta}$  transforme bijectivement  $\bar{\Omega}_\infty(\omega)$  en  $\bar{\Omega}_\infty(\theta\omega)$ . De plus la première composante de  $\bar{\theta}$  étant  $\theta$ , l'application  $\bar{\theta}$  est une bijection de  $\bar{\Omega}_\infty$ .

Vérifions enfin que dans  $\bar{\Omega}_\infty$ , l'application  $\bar{\theta}$  préserve  $\bar{P}$ .

Soit  $f$  une application mesurable positive sur  $\bar{\Omega}_\infty$  et posons :

$$\bar{\theta}(\omega, j, \ell) = (\theta\omega, \alpha(\omega, j, \ell), \beta(\omega, j, \ell)).$$

Alors

$$\int_{\bar{\Omega}_\infty} f \circ \bar{\theta} \, d\bar{P} = \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f(\theta\omega, \alpha(\omega, j, \ell), \beta(\omega, j, \ell)) 1_{\bar{\Omega}_\infty}(\omega, j, \ell) dP(\omega).$$

L'invariance de  $P$  par  $\theta$ , permet d'écrire cette égalité :

$$= \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f(\omega, \alpha(\theta^{-1}\omega, j, \ell), \beta(\theta^{-1}\omega, j, \ell)) 1_{\bar{\Omega}_\infty}(\theta^{-1}\omega, j, \ell) dP(\omega)$$

Comme  $\bar{\theta}$  transforme bijectivement les sections, les indices  $j$  et  $\ell$  vérifiant  $(\theta^{-1}\omega, j, \ell)$  dans  $\bar{\Omega}_\infty$ , se transforment par  $\alpha$  et  $\beta$  en les indices  $j'$  et  $\ell'$  vérifiant  $(\omega, j', \ell')$  dans  $\bar{\Omega}_\infty$  et donc :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} f(\omega, \alpha(\theta^{-1}\omega, j, \ell), \beta(\theta^{-1}\omega, j, \ell)) 1_{\bar{\Omega}_\infty}(\theta^{-1}\omega, j, \ell) \\ &= \sum_{j'=1}^{k+1} \sum_{\ell' \in \mathbb{N}} f(\omega, j', \ell') 1_{\bar{\Omega}_\infty}(\omega, j', \ell') \end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\int_{\bar{\Omega}_\infty} f \circ \bar{\theta} \, d\bar{P} = \int_{\bar{\Omega}_\infty} f \, d\bar{P}.$$



Dans l'ensemble  $\bar{\Omega}_\infty$ , considérons l'ensemble aléatoire :

$$M(\bar{\omega}) = \{n \in \mathbb{Z} \quad \text{tq} \quad \bar{\theta}^n(\bar{\omega}) \in \Omega \times [1, k+1] \times \{0\}\}.$$

On a immédiatement :  $M(\bar{\theta} \bar{\omega}) = M(\bar{\omega}) - 1$ . Si 0 est dans  $M(\bar{\omega})$ , alors le point  $\bar{\omega}$  est de la forme  $(\omega, j, 0)$  et on a :

$$\text{Inf}\{n \geq 1 \quad \text{tq} \quad \bar{\theta}^n(\omega, j, 0) \in \Omega \times [1, k+1] \times \{0\}\} = V_j(\omega).$$

Ainsi le successeur de 0 dans  $M(\bar{\omega})$  est  $V_j(\omega)$ .

Conclusion : Sous l'hypothèse :  $\sum_{\ell \in \mathbb{N}} \frac{1}{\{V_{k+1} \circ \bar{\theta}^{-\ell} > \ell\}}$  finie presque

sûrement, on a obtenu une extension de  $\Omega$ , soit  $\bar{\Omega}_\infty$ , de mesure  $\bar{P}(\bar{\Omega}_\infty) = c$ , munie de l'automorphisme (non nécessairement ergodique)  $\bar{\theta}$  qui préserve la mesure et de plus transforme bijectivement les sections. L'ensemble aléatoire :  $M(\bar{\omega}) = \{n \in \mathbb{Z} \quad \text{tq} \quad \bar{\theta}^n(\bar{\omega}) \in \Omega \times [1, k+1] \times \{0\}\}$  est une solution stationnaire au problème associé à  $\bar{\Omega}_\infty$ ,  $\bar{\theta}$  et à l'application  $V$  définie sur la base par :  $V(\omega, j, 0) = V_j(\omega)$ .

Un point  $(\omega, j, \ell)$  de  $\bar{\Omega}_\infty$  s'interprète de la façon suivante ; l'instant  $T_{-\ell}(\omega)$  est un instant de liberté du serveur ; le client d'indice  $-\ell$  sera servi avec  $j-1$  clients précédemment rejetés, et il est prédécesseur de 0. Pour presque tout  $\omega$ , il y a  $c$  solutions stationnaires.

### III - TRADUCTION DANS L'ESPACE DES TOURS.

On transcrit, dans ce paragraphe, les résultats obtenus, dans l'espace des tours, ce qui fournit une meilleure représentation.

Considérons l'ensemble :

$$T = \{(\omega, j, \ell) \in \Omega \times [1, k+1] \times \mathbb{N} \quad \text{tq} \quad 0 \leq \ell < V_j(\omega)\}$$

que l'on notera symboliquement :

$$T = \Omega \times [1, k+1] \times [0, V_j[$$

et l'"ascenseur"  $t$  dans  $T$  défini par :

$$\begin{aligned} t(\omega, j, n) &= (\omega, j, n+1) \quad \text{si} \quad V_j(\omega) > n+1 \\ t(\omega, j, n) &= \theta^{V_j(\omega)}(\omega, V_j(\omega) \wedge k+1, 0) \quad \text{si} \quad V_j(\omega) = n+1. \end{aligned}$$

La mesure  $Q$  sur  $T$  est toujours la trace de la mesure produit.

On met en bijection  $\bar{\Omega}$  et  $T$  par l'application :

$$\phi(\omega, j, \ell) = (\theta^{-\ell} \omega, j, \ell) \quad \text{pour} \quad (\omega, j, \ell) \quad \text{dans} \quad \bar{\Omega}.$$

On vérifie sans peine que :  $\phi \circ \bar{\theta} = t \circ \phi$ .

De plus, l'application  $\phi$  envoie la mesure  $\bar{P}$  sur  $Q$ . Soit, en effet,  $A$  un ensemble mesurable de  $T$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 1_A \circ \phi(\bar{\omega}) d\bar{P}(\bar{\omega}) &= \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} 1_A(\theta^{-\ell} \omega, j, \ell) 1_{\bar{\Omega}}(\omega, j, \ell) dP(\omega) \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} 1_A(\omega, j, \ell) 1_{\bar{\Omega}}(\theta^{-\ell} \omega, j, \ell) dP(\omega). \end{aligned}$$

Mais on a les équivalences suivantes :

$$(\theta^{\ell} \omega, j, \ell) \in \bar{\Omega} \iff V_j(\omega) < \ell \iff (\omega, j, \ell) \in T.$$

L'expression précédente devient :

$$= \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} 1_A(\omega, j, \ell) 1_T(\omega, j, \ell) dP(\omega) = Q(A).$$

Si maintenant nous posons :  $T_n = t^n(T)$  on a :

$$T_\infty = \lim_n \downarrow t^n(T) \cap \phi(\bar{\Omega}_\infty).$$

En particulier :  $Q(T_\infty) = \bar{P}(\bar{\Omega}_\infty) = c.$

Si  $\pi_1$  désigne la projection de  $T_\infty$  sur  $\Omega$ , on en déduit que  $\pi_1(T_\infty)$  n'est pas négligeable. On enlève à  $T_\infty$ , l'image par  $\phi$  des négligeables que l'on a ôté à  $\bar{\Omega}_\infty$ , et on identifie cet ensemble à  $T_\infty$ .

Dans  $\bar{\Omega}_\infty$ , l'application  $\bar{\theta}$  préservant  $\bar{P}$ , après transport par  $\phi$ , l'application  $t$  préserve  $Q$  dans  $T_\infty$ .

Comme  $t$  vaut  $\phi \circ \bar{\theta} \circ \phi^{-1}$  et que  $\bar{\theta}$  est une bijection dans  $\bar{\Omega}_\infty$ ,  $t$  est aussi une bijection sur  $T_\infty$ . L'ensemble  $T_\infty$ , stable par l'ascenseur  $t$ , a une structure de tours ; il est donc parfaitement déterminé par sa base sur  $\Omega \times [1, k+1[$ , que l'on notera  $T_0$ , et par les  $V_j$ . On écrira symboliquement :

$$T_\infty = T_0 \times [0, V_j[.$$

Intéressons-nous à cette base  $T_0$ , munie de la mesure trace notée  $Q_0$ .

Dire que  $(\omega, j)$  est dans  $T_0$ , c'est-à-dire que pour  $\omega$ ,  $0$  est un instant de liberté du serveur avec un bloc de  $j$  clients à servir.

On construit à partir de  $t$ , l'application  $t_0$  de  $T_0$  dans lui-même, en posant :

$$t_0(\omega, j) = (\theta^j_{(\omega)}, V_j(\omega) \wedge k+1) \text{ pour } (\omega, j) \text{ dans } T_0.$$

Alors  $t_0$  est une bijection de  $T_0$  ; en effet l'image réciproque d'un point de  $T_0$ , s'obtient en prenant tout d'abord son image réciproque par  $t$ , puis en redescendant jusqu'à la base.

L'application  $t_0$  préserve  $Q_0$  sur  $T_0$ , et c'est même équivalent au fait que  $t$  préserve  $Q$  sur  $T_\infty$ ; pour s'en convaincre il suffit de songer à la forme d'ascenseur de  $t$ .

Finalement, l'application  $t_0$  donne l'évolution du système, tant future que passée (grâce à  $t_0^{-1}$ ) pour les solutions stationnaires pour lesquelles  $0$  est instant de liberté du serveur.

Enfin, dans  $T_\infty$  on a une solution stationnaire en considérant, comme précédemment l'ensemble aléatoire :

$$M(\tilde{\omega}) = \{n \in \mathbb{Z} \quad \text{tq} \quad t^n(\tilde{\omega}) \in T_0\} \quad \text{pour } \tilde{\omega} \text{ dans } T_\infty.$$

#### IV - QUELQUES CONSTANTES DU SYSTEME.

Rappelons que  $Q_0$  est la mesure trace sur la base  $T_0$  des tours, donc :

$$Q_0 = \int_{T_0} 1_{T_0}(\omega, j) dP(\omega) \otimes d\lambda^1(j).$$

On a vu déjà que :  $Q(T_\infty) = c.$

Grâce à la structure de tours de  $T_\infty$ , on a :

$$Q(T_\infty) = \int_{T_0} V_j(\omega) dQ_0(\omega, j) = c$$

ce que l'on écrira :

$$\int_{T_0} V_j \frac{dQ_0}{c} = 1$$

Les points intermédiaires  $(\omega, j, \ell)$  avec  $0 < \ell < V_j(\omega)$  au-dessus de  $(\omega, j)$  de  $T_0$ , seront des clients servis ou non, selon la position de  $\ell$  par rapport à  $V_j(\omega)$ .

Plus précisément :

si  $V_j(\omega) \leq k+1$  : tous les clients de la tour seront servis

si  $V_j(\omega) > k+1$  : seuls les points intermédiaires d'indice  $\ell$ , vérifiant :

$\ell \geq V_j(\omega) - k$  seront servis.

Il y a aura toujours :  $V_j \wedge k+1$  clients servis sur une tour. Ainsi le nombre moyen de clients servis, soit  $N_S$  vaut :

$$N_S = \int_{T_0} V_j \wedge (k+1) \cdot \frac{dQ_0}{c}$$

Les clients servis immédiatement, correspondent aux points de la base  $T_0$  :

leur nombre moyen  $N'_S$  vaut donc :

$$N'_S = \int_{T_0} \cdot \frac{dQ_0}{c}$$

Dans l'espace des tours  $T$ , le temps de retour à  $T_0$  est donné, pour  $(\omega, j)$  dans  $T_0$ , par  $V_j(\omega)$ .

Posons  $T_{V_0}(\omega, j) = \sum_{0 \leq i < V_j(\omega)} \tau \circ \theta^i(\omega)$  pour  $(\omega, j)$  dans  $T_0$  qui représente le premier instant d'arrivée et de liberté après 0.

On a : 
$$T_{V_0}(\omega, j) = \sum_{i=0}^{+\infty} \tau \circ \theta^i(\omega) 1_{\{i < V_j(\omega)\}}.$$

Alors : 
$$\int_{T_i} T_{V_0} \frac{dQ_0}{c} = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^{k+1} \int_{\Omega} \sum_{i=0}^{+\infty} \tau \circ \theta^i(\omega) 1_{\{i < V_j(\omega)\}} 1_{T_0}(\omega, j) dP(\omega)$$

ce qui s'écrit encore :

$$= \frac{1}{c} \int_{\Omega} \tau \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{i=0}^{+\infty} 1_{\{i < V_j(\theta^{-i}\omega)\}} \text{ et } (\theta^{-i}\omega, j) \in T_0 \right\} dP(\omega)$$

Les conditions : " $(\theta^{-i}\omega, j) \in T_0$  et  $i < V_j(\theta^{-i}\omega)$ " traduisent exactement que le client d'indice  $-i$  est un prédécesseur (toujours au sens large) de 0. Comme pour presque tout  $\omega$ , il y a  $c$  solutions stationnaires donc  $c$  prédécesseurs de 0, cette double somme vaut  $c$ , presque sûrement.

On a donc :

$$\int_{T_0} T_{V_0} \frac{dQ_0}{c} = E(\tau).$$

Le temps de service associé à un point  $(\omega, j)$  de  $T_0$  vaut :

$$\sigma + \sigma \circ \theta^{-1} + \dots + \sigma \circ \theta^{-j+1}.$$

Soit  $S$  le temps moyen de service :

$$S = \int_{T_0} (\sigma + \dots + \sigma \theta^{-j+1}) \frac{dQ_0}{c} = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{k+1} (\sigma + \dots + \sigma \theta^{-j+1}) 1_{T_0}(\omega, j) dP(\omega).$$

En réordonnant les termes de cette somme, et en utilisant toujours l'invariance de  $P$  par  $\theta$ , on obtient :

$$S = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \sigma(\omega) f(\omega) dP(\omega)$$

où  $f(\omega) = \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} 1_{T_0}(\theta^{+i}\omega, j) / \omega \in \Omega.$

Les conditions : " $(\theta^{+i}\omega, j) \in T_0$  avec  $i < j$ " traduisent que le client d'indice 0 est dans un bloc de clients servis.

Ainsi  $f(\omega)$  compte le nombre de solutions servant le client d'indice 0.

On a alors :

$$S = E\left(\sigma \cdot \frac{f}{c}\right).$$

Remarquons que ce calcul reste valable en remplaçant  $\sigma$  par la constante 1.

On obtient donc :

$$\int_{T_0} j \cdot \frac{dQ_0}{c} = E\left(\frac{f}{c}\right)$$

La définition des applications  $V_j$ , implique que :

$$\sigma + \dots + \sigma \circ \theta^{-j+1} < T_{V_0}.$$

Ainsi

$$E\left(\sigma \cdot \frac{f}{c}\right) \leq E(\tau).$$

Utilisons la seconde inégalité de définition des  $V_j$ , soit :

$$\sum_{i=0}^{V_j-2} \tau \circ \theta^i \leq \sigma + \sigma \circ \theta^{-1} + \dots + \sigma \circ \theta^{-j+1}.$$

Le premier membre diffère de  $T_{V_0}$ , pour le seul terme :  $\tau \circ \theta^{V_j-1}$  que

l'on intègre :

$$\begin{aligned} \int_{T_0} \tau \circ \theta^{V_j-1} \frac{dQ_0}{c} &= \frac{1}{c} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{k+1} \tau \circ \theta^{V_j-1}(\omega) 1_{T_0}(\omega, j) dP(\omega) \\ &= \frac{1}{c} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{n \geq 1} \tau \circ \theta^{n-1}(\omega) 1_{\{V_j(\omega)=n \text{ et } (\omega, j) \in T_0\}} dP(\omega) \end{aligned}$$

ou encore :

$$= \frac{1}{c} \int_{\Omega} \tau \circ \theta^{-1}(\omega) \left\{ \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{n \geq 1} 1_{\{V_j \circ \theta^{-n}(\omega)=n\} \text{ et } (\theta^{-n}\omega, j) \in T_0} \right\} dP(\omega)$$

On pose  $g(\omega)$  cette double somme.



Si le point  $(\theta^{-n}\omega, j)$  est dans  $T_0$ , avec :  $V_j \circ \theta^{-n}(\omega) = n$ , le client d'indice 0 est servi sans attente.

Ainsi la quantité  $g(\omega)$  compte le nombre de solutions servant le client d'indice 0 sans attente.

On peut écrire plus simplement :  $g(\omega) = \sum_{j=1}^{k+1} 1_{T_0}(\omega, j)$ .

Alors

$$\int_{T_0} \tau \circ \theta^{j-1} \frac{dQ_0}{c} = E(\tau \circ \theta^{-1} \cdot \frac{g}{c})$$

Remarquons que l'on a toujours  $0 \leq g(\omega) \leq f(\omega)$ .

Les inégalités de définition des applications  $V_j$  donnent ainsi par intégration, la double inégalité :

$$E(\tau) - E(\tau \circ \theta^{-1} \cdot \frac{g}{c}) \leq E(\sigma \cdot \frac{f}{c}) \leq E(\tau).$$

Si l'on suppose les suites :  $(\sigma \circ \theta^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(\tau \circ \theta^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  indépendantes,

le fait que le client d'indice 0 soit servi ou non, ne dépend pas du service qu'il demande ainsi les variables aléatoires  $\sigma$  et  $f$  sont indépendantes. La deuxième inégalité devient :

$$E(\frac{f}{c}) \leq \frac{E(\tau)}{E(\sigma)}$$

En particulier si les délais de service sont grands devant les délais d'inter-arrivée, peu de solution en moyenne serviront le client d'indice 0 (ou un client d'indice 1)

BIBLIOGRAPHIE :

- A.A. BOROVKOV : Stochastic processes in queuing theory.  
Springer 1976.
- J.W. COHEN : The simple server queue.  
North Holland. Amsterdam 1969.
- M.R. JAÏBI : Evolution d'une file d'attente avec priorité.  
Annales de l'I.H.P., Section B, Vol. XVI  
n° 3.
- R. LOYNES : The stability of a queue with non-independent  
inter-arrival and service-times.  
Proc. Cambridge Philo-Soci. 58 (1962).
- J. NEVEU [1] : Cours de Zurich. (Février 83).  
Théorie Ergodique et Processus Ponctuels  
Stationnaires. Application aux files  
d'attente.
- [2] : Introduction aux processus aléatoires.  
Cours de 3<sup>ème</sup> Cycle. Université Paris VI.
- [3] : Processus Ponctuels.  
Ecole d'Eté de Probabilités de St-Flour VI  
(1976. Lecture Notes. Springer Verlag (1977)).

Michel DOISY  
B.P. 4060  
TANANARIVE (Madagascar)

Reçu en Mars 1986