ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

FRANCESCO CECIONI

Sopra alcune operazioni algebriche sulle matrici

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 11 (1910), exp. nº 3, p. 1-141

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1910_1_11__A3_0>

FRANCESCO CECIONI

SOPRA ALCUNE OPERAZIONI ALGEBRICHE

SULLE MATRICI

(TESI DI ABILITAZIONE)

INTRODUZIONE

Sia

$$z_i = \sum_1^n {}_k\, u_{ik}\, y_k \qquad (i = 1\,, 2\,, \ldots, n)$$

una sostituzione lineare che fa passare dalle variabili $z_1\,, z_2\,, \ldots, z_n$ alle $y_1\,, y_2\,, \ldots, y$, e indichiamo con

$$U = \begin{Bmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nn} \end{Bmatrix} = (u_{ik}) \quad (i\,, k = 1\,, 2\,, \ldots, n)$$

la matrice dei suoi coefficienti [1]). Sia analogamente

$$y_k = \sum_1^n {}_j\, v_{kj}\, x_j \qquad (i\,, k = 1\,, 2\,, \ldots, n)$$

una seconda sostituzione lineare che fa passare dalle variabili $y_1\,, y_2\,, \ldots, y_n$ alle $x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n$, e indichiamo la sua matrice con

$$V = \begin{Bmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{n1} & v_{n2} & \ldots & v_{nn} \end{Bmatrix} = (v_{kj}) \quad (k\,, j = 1\,, 2\,, \ldots, n).$$

Esprimiamo ora le variabili $z_1\,, z_2\,, \ldots, z_n$ per le $x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n$; otteniamo così la sostituzione

$$z_i = \sum_1^n {}_j \left(\sum_1^n {}_k\, u_{ik}\, v_{kj} \right) x_j \qquad (i = 1\,, 2\,, \ldots, n)\,,$$

[1]) Nell' indicazione delle matrici adopereremo indifferentemente, per comodo tipografico, le sgraffe e le parentesi tonde.

che fa passare dalle variabili x_i alle x_j, e che equivale quindi alla successiva applicazione delle due sostituzioni sopra considerate; vediamo che la matrice di questa sostituzione composta non è che *il prodotto della matrice* U *per la* V, *eseguito moltiplicando, come suol dirsi, le righe della prima per le colonne della seconda.*

Siano

$$f = \sum_1^n {}_{i,k}\, a_{ik}\, x_i\, y_k \ , \quad \varphi = \sum_1^n {}_{i,k}\, b_{ik}\, x_i\, y_k$$

due forme bilineari nelle due serie di variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$. È noto che nel calcolo simbolico delle forme bilineari [1]) si chiama *prodotto* (simbolico) della forma f per la φ, in quest'ordine, la forma bilineare

$$\psi = \sum_1^n {}_{i,j} \left(\sum_1^n {}_k\, a_{ik}\, b_{kj} \right) x_i\, y_j \, .$$

Se ora per una forma bilineare qualunque, ad es. la f, chiamiamo *matrice della forma* la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Bmatrix} = (a_{ik}) \quad (i\,,k = 1\,,2\,,\ldots,n)\,,$$

vediamo che la matrice della forma prodotto di due altre non è che il prodotto delle matrici delle due forme, nel medesimo ordine, eseguito ancora moltiplicando le righe della prima per le colonne della seconda.

Si sa ora che si possono *comporre* due matrici quadrate dello stesso ordine in quattro modi diversi secondo che si moltiplicano le righe o le colonne della prima per le righe o le colonne della

---

[1]) Cfr. Frobenius, *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LXXXIV (1878), pp. 1-63], p. 2. Citeremo in seguito questo lavoro con le iniziali *L. S.* Cfr. anche Muth, *Theorie und Anwendung der Elementartheiler* (Leipzig, Teubner, 1899) p. 20.

seconda; noi adotteremo costantemente il modo detto sopra e riserveremo il nome di *prodotto* di due matrici A, B (in quest' ordine) alla matrice ottenuta moltiplicando le righe di A per le colonne di B. Indicando con A′ la matrice *coniugata* o *trasposta* di una qualunque matrice A (cioè quella che si ottiene dalla A scambiando le righe con le colonne), vediamo che gli altri tre modi di composizione di A con B si hanno facendo il *prodotto* di A per B′, di A′ per B, di A′ per B′.

Adottata questa definizione del prodotto, i concetti ed i teoremi della teoria delle matrici si traducono in concetti e teoremi della teoria delle sostituzioni lineari e delle forme bilineari; in luogo di parlare di queste ultime si può quindi parlare astrattamente di matrici. Una stessa formula relativa a matrici può poi interpetrarsi in vari modi, quando ci si voglia riferire a forme bilineari od a sostituzioni lineari. Così ad es. il prodotto di A per B può interpetrarsi non solo come prodotto di sostituzioni o come prodotto di forme, ma anche (e si vede facilmente) come forma ottenuta dalla forma A eseguendo sulle variabili della seconda serie la sostituzione lineare B, oppure come forma ottenuta dalla forma B eseguendo sulle variabili della prima serie la sostituzione A′, trasposta della A.

Considereremo più in generale, in luogo di matrici quadrate, matrici rettangolari, e cominceremo ora dal ricordare alcune definizioni e notazioni fondamentali.

Siano A e B due matrici, la prima di m righe ed n colonne, la seconda di n righe e p colonne,

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ik}), \quad (i=1,2,\dots,m\,;\, k=1,2,\dots,n)$$

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = (b_{kj}), \quad (k=1,2,\dots,n\,;\, j=1,2,\dots,p)\,;$$

conformemente a quanto sopra abbiamo detto, chiameremo *prodotto di* A *per* B, e indicheremo con AB, la matrice di m righe e p colonne rappresentata da

$$\mathrm{AB} = \left(\sum_{1}^{n}{}_k\, a_{ik}\, b_{kj}\right), \quad (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, p).$$

Perchè dunque possa parlarsi del prodotto di due matrici A, B (in quest'ordine) bisogna e basta che il numero delle colonne di A sia uguale al numero delle righe di B; [1]) spesso nel seguito non enunceremo esplicitamente questa condizione, intendendola senz'altro sottintesa nel fatto stesso che considereremo il prodotto AB. Si chiama prodotto di più matrici, in un ordine determinato, la matrice che si ottiene moltiplicando la prima matrice per la seconda, il prodotto ottenuto per la terza, e così via; e dicendo così veniamo a sottintendere che il numero delle colonne di ogni matrice (eccetto l'ultima) deve essere uguale a quello delle righe della matrice successiva.

Per il prodotto di matrici, così definito, vale la *proprietà associativa,* espressa dalla formula.

$$(\mathrm{AB})\,\mathrm{C} = \mathrm{A}(\mathrm{BC}),$$

come si verifica immediatamente [2]). Non vale però, in generale, la *proprietà commutativa.* Se due matrici A, B sono tali che sia

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BA},$$

le due matrici si dicono *permutabili;* sarà in tal caso, con le notazioni precedenti, $m = n = p$, a meno che non si voglia definire l'uguaglianza di due matrici qualunque nel modo che abbiamo osservato poco fa in nota.

---

[1]) Ci si può, del resto, sempre ridurre a questo caso intendendo di far *seguire* alle righe o alle colonne di una delle due matrici, righe o colonne di elementi nulli. Con questo criterio si può evidentemente definire anche l'uguaglianza di due matrici di diverso numero di righe e di colonne.

[2]) Si osservi che tale proprietà non varrebbe ove si considerasse il prodotto *per righe.*

Data una matrice *quadrata* M (per la quale cioè il numero delle righe uguaglia il numero delle colonne), resta fissato, dalle definizioni date, il significato di *potenza* di M con esponente intero e positivo; si ha così

$$M^2 = M \, . \, M \quad , \quad M^3 = M \, . \, M \, . \, M , \ldots ;$$

vale evidentemente la formula

$$M^r \, . \, M^s = M^s \, . \, M^r = M^{r+s} \, .$$

Chiameremo *matrice diagonale* una matrice quadrata nella quale tutti gli elementi della diagonale principale siano uguali, e siano 0 gli altri:

$$\begin{Bmatrix} d & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & d \end{Bmatrix} ;$$

si suole indicare anche col simbolo (d); si ha evidentemente

$$(d) \, A = A \, (d) \, ,$$

e questo prodotto si ottiene semplicemente dalla A moltiplicandone tutti gli elementi per d; lo indicheremo anche con dA o Ad, così che avremo

$$(d) \, A = A \, (d) = d \, A = A \, d \, .$$

Se è $d = 1$, la matrice (d) si chiama *matrice unità,* e si suole indicare con E:

$$E = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Bmatrix} ;$$

quando si voglia mettere in evidenza l'ordine n della matrice unità scriveremo E_n; quasi sempre però sottintenderemo quest'indice, ed anche in uno stesso calcolo adopereremo lo stesso simbolo E per indicare due o più matrici unità, eventualmente di ordine diverso, quando il modo nel quale ognuno di questi simboli verrà adoperato, non lasci alcun dubbio sull'ordine della matrice che esso rappresenta.

Date due matrici R, S

$$\mathrm{R}=(r_{ik})\ ,\ \mathrm{S}=(s_{ik}),\quad (i=1,2,...,m\,;\,k=1,2,...,n)$$

aventi rispettivamente un ugual numero di righe ed un ugual numero di colonne, si chiama loro *somma*, e si indica con $\mathrm{R}+\mathrm{S}$, la matrice

$$\mathrm{R}+\mathrm{S}=(r_{ik}+s_{ik})\ ,\quad (i=1,2,...,m\,;\,k=1,2,...,n).$$

Analoga definizione si ha per la *differenza*, e per la somma di più matrici. Si indica poi, ad es., con $-\mathrm{S}$, la matrice

$$-\mathrm{S}=(-s_{ik})\ ,\quad (i=1,2,...,m\,;\,k=1,2,...,n).$$

Vale evidentemente, per la somma algebrica di più matrici, la proprietà associativa e commutativa, e vale pure, come subito si vede, la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione:

$$\mathrm{M}(\mathrm{R}+\mathrm{S})=\mathrm{MR}+\mathrm{MS}\,,$$

$$(\mathrm{R}+\mathrm{S})\,\mathrm{M}=\mathrm{RM}+\mathrm{SM}.$$

Una matrice si dice *nulla* quando ha tutti gli elementi uguali a 0; una tale matrice si indicherà semplicemente col simbolo 0, quando non possa nascere equivoco sul numero delle sue righe e delle sue colonne; così, anche in uno stesso calcolo, adopereremo in seguito il medesimo simbolo 0 per indicare matrici nulle di diverso numero di righe e di colonne, quando il modo con cui ognuno di questi simboli figura nelle formule non possa dar luogo ad ambiguità sul numero delle righe e delle colonne della matrice da esso rappresentata.

In base alle definizioni ora date viene fissato anche che cosa si intende per *funzione razionale intera* di più matrici. Non potranno però queste funzioni ridursi alla stessa forma come le analoghe per i numeri, in quanto che non vale ora, generalmente, la proprietà commutativa del prodotto.

In particolare chiameremo funzione *lineare* di una matrice (variabile) X una somma di prodotti di matrici, in ciascuno dei quali la X entri al massimo una sola volta come fattore; è evidente che ogni tale funzione può ridursi alla forma

$$A_1XB_1 + A_2XB_2 + \dots + A_mXB_m + C,$$

la quale non può, in generale, valendosi delle proprietà elementari della somma e del prodotto sopra ricordate, ridursi ad una forma più semplice. Una particolare matrice X per la quale si abbia

$$A_1XB_1 + A_2XB_2 + \dots + A_mXB_m + C = 0$$

sarà detta una *soluzione* dell'*equazione lineare* ora scritta.

Nei Cap. I e II del presente lavoro ci occuperemo di alcune particolari equazioni lineari fra matrici: [1]) precisamente nel Cap. I tratteremo di quelle equazioni nelle quali le matrici incognite vengono moltiplicate per le matrici note sempre da una medesima parte, e determineremo inoltre, come altro esempio, le condizioni di risolubilità dell'equazione $AXB = C$; nel Cap. II considereremo l'equazione particolarmente notevole, $AX = XB$. Nel Cap. III infine tratte-

---

[1]) Riguardo alle più generali equazioni lineari in una matrice ricorderemo i seguenti lavori di SYLVESTER contenuti nei *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, t. IC (1884, 2° sem.):

Sur la solution du cas le plus général des équations linéaires en quantités binaires, c'est-à-dire en quaternions ou en matrices du second ordre (pp. 117-118).

Sur la résolution générale de l'équation linéaire en matrices d'un ordre quelconque (pp. 409-412, 432-436).

Sur les deux méthodes, celle de Hamilton et celle de l'auteur, pour resoudre l'équation linéaire en quaternions (pp. 473-476).

Sur l'achèvement de la nouvelle méthode pour résoudre l'équation linéaire la plus générale en quaternions (pp. 502-504).

In questi lavori viene esposto un metodo secondo il quale si può determinare razionalmente la soluzione di qualsiasi equazione lineare in una matrice incognita, *nel caso in cui questa equazione possegga una sola soluzione,* ma tale metodo conduce a calcoli estremamente lunghi.

Nei casi particolari che tratteremo ci proporremo, più generalmente, di determinare le condizioni di risolubilità e tutte le soluzioni delle equazioni che studieremo.

remo l'equazione più semplice di grado superiore $X^m = A$, vale a dire il problema dell'*estrazione della radice* m^{esima} di una matrice (di una sostituzione lineare).

Diamo ancora, prima di entrare in argomento, la definizione di una notazione [1]) che sarà adoperata assai spesso. Siano A_{ik} $(i = 1, 2, \ldots, m; k = 1, 2, \ldots, n)$ mn matrici, la generica delle quali, A_{ik}, abbia un certo numero μ_i di righe, e un certo numero ν_k di colonne; le $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in}$ hanno così tutte lo stesso numero μ_i di righe, le $B_{1k}, B_{2k}, \ldots, B_{mk}$ lo stesso numero ν_k di colonne. Indicheremo col simbolo

$$(A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in})$$

quella matrice di μ_i righe e $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n$ colonne, le cui colonne sono ordinatamente quelle di A_{i1}, quelle di A_{i2}, ecc...., quelle di A_{in}; e col simbolo

$$\begin{pmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots, & A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22}, & \ldots, & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m1}, & A_{m2}, & \ldots, & A_{mn} \end{pmatrix}$$

intenderemo quella matrice, di $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_m$ righe e $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n$ colonne, le cui righe sono ordinatamente quelle di $(A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1n})$, quelle di $(A_{21}, A_{22}, \ldots, A_{2n})$, ... quelle di $(A_{m1}, A_{m2}, \ldots, A_{mn})$; è chiaro poi che le sue colonne sono ordinatamente quelle delle n matrici

$$\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{mn} \end{pmatrix}.$$

Se infine M è una matrice quadrata qualunque, indicheremo con $|M|$ il suo determinante.

---

[1]) Cfr. LAGUERRE, *Sur le calcul des systèmes linéaires* [Journal de l'École Polytecnique, t. XXV (1867), pp. 215-264], p. 255.

CAPITOLO I.

Alcune equazioni lineari fra matrici

Le equazioni $AX = B$, $XA = B$. — Sistemi di equazioni lineari nelle matrici.

1. — È noto che data una matrice quadrata A di ordine n, a determinante diverso da 0, esiste una e una sola matrice, che chiameremo matrice *reciproca* [1]) di A, e indicheremo col simbolo A^{-1}, tale che si abbia

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Esiste dunque una ed una sola soluzione di ciascuna delle due equazioni $AX = B$, $YA = B$, nell'ipotesi che sia $|A| \neq 0$, ma le due soluzioni risultano, in generale, diverse; solo nel caso in cui esse siano uguali si suol dare il nome di *quoziente* di B per A all'unica matrice X per cui è $AX = XA = B$, e la condizione perchè questo caso si verifichi è che le due matrici A e B siano permutabili [2]).

---

[1]) KRONECKER, *Vorlesungen über Determinantentheorie* (Leipzig, Teubner, 1903), p. 333. FROBENIUS, *L. S.*, p. 7. — Altri riservano il nome di matrice *reciproca* alla matrice $A_0 = (a^{(0)}_{ik})$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ nella quale l'elemento $a^{(0)}_{ik}$ è l'aggiunto dell'elemento a_{ki} di A; cfr., ad es., LAGUERRE, *Mem. cit.*, p. 218. Si ha evidentemente $A_0 = |A| \,.\, A^{-1}$; chiameremo eventualmente la A_0 matrice *aggiunta* di A (KRONECKER, *Op. cit.*, p. 329; FROBENIUS, *L. S.*, p. 7).

[2]) KRONECKER, *Op. cit.*, p. 354; FROBENIUS, *L. S.*, p. 8; LAGUERRE, *Mem. cit.*, p. 217; MUTH, *Op. cit.*, p. 31.

Supponiamo ora che possa essere anche $|A|=0$, e consideriamo più in generale l'equazione

$$AX = B, \tag{1}$$

nella quale A rappresenti ora una matrice di m righe ed n colonne, B una matrice pure di m righe ma di un numero qualunque p di colonne. Se questa equazione è risolubile, ogni colonna di B, la k^{esima} ad es., è una combinazione lineare delle colonne di A, i coefficienti della combinazione essendo ordinatamente gli elementi della k^{esima} colonna di X; le due matrici A ed (A, B) hanno dunque ugual caratteristica. Se viceversa questo accade, una qualunque colonna di B risulta una certa combinazione lineare delle colonne di A, e l'equazione (1) è quindi risolubile. Ne segue:

Condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione $AX=B$ *ammetta soluzioni, è che le due matrici* A *ed* (A, B) *abbiano ugual caratteristica* [1].

Analogamente:

Condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione $YC=D$ *ammetta soluzioni, è che le due matrici* C *e* $\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$ *abbiano ugual caratteristica.*

Essendo ora r la caratteristica di A, si indichi con A^* una matrice costituita da r righe indipendenti della matrice A, siano le $i_1{}^{esima}, i_2{}^{esima}, \ldots, i_r{}^{esima}$, e con B^* la matrice costituita dalle r righe di B aventi rispettivamente i medesimi numeri d'ordine $i_1, i_2, \ldots, i_r$; ogni matrice X che soddisfa alla (1) soddisfa anche alla

$$A^*X = B^*. \tag{2}$$

Sia A' la matrice delle righe residue di A, B' quella delle righe residue di B; poichè le matrici (A^*, B^*) e $\begin{pmatrix} A^*, & B^* \\ A', & B' \end{pmatrix}$ hanno ambedue la caratteristica r, l'equazione $Y(A^*, B^*) = (A', B')$ è, per il teorema precedente, risolubile; si ha quindi, per una soluzione

---

[1]) Cfr. Frobenius, *L. S.*, p. 8.

di essa, $YA^* = A'$, $YB^* = B'$. Se dunque X soddisfa all'equazione (2) si ha

$$A'X = YA^*X = YB^* = B',$$

e quindi anche, combinando quest'ultima con la (2), $AX = B$; le (1), (2), sono dunque equivalenti.

Dell'equazione (2) si determina facilmente la soluzione generale. Completiamo infatti la A^* con una matrice P di $n-r$ righe (ed n colonne), qualunque *ma fissa,* con l'unica condizione che sia $\begin{vmatrix} A^* \\ P \end{vmatrix} \neq 0$, e completiamo pure la B^* con una matrice Q di $n-r$ righe (ed n colonne) *di costanti arbitrarie.* Consideriamo l'equazione $\begin{pmatrix} A^* \\ P \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} B^* \\ Q \end{pmatrix}$; essa equivale alle due equazioni $A^*X = B^*$, $PX = Q$, e quindi la sua soluzione $X = \begin{pmatrix} A^* \\ P \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B^* \\ Q \end{pmatrix}$ soddisfa, in particolare, alla (2); se viceversa X è una soluzione qualunque della (2), e si prende $Q = PX$, sarà soddisfatta la $\begin{pmatrix} A^* \\ P \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} B^* \\ Q \end{pmatrix}$ e si avrà quindi, con la matrice Q considerata, $X = \begin{pmatrix} A^* \\ P \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B^* \\ Q \end{pmatrix}$. Quest'ultima formula dà dunque tutte le soluzioni della (2), e a due matrici Q distinte corrispondono inoltre evidentemente due distinte soluzioni X.

Risulta poi manifesto, da quanto abbiamo detto, che se P_1 è un'altra matrice che soddisfa alle medesime condizioni della P, le due formule $X = \begin{pmatrix} A^* \\ P \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B^* \\ Q \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} A^* \\ P_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B^* \\ Q \end{pmatrix}$ definiscono una medesima totalità di matrici X; difatti la X definita, per una certa matrice Q, dalla prima di queste due formule soddisfa alla $A^*X = B^*$, e se quindi poniamo $Q_1 = P_1X$ abbiamo $\begin{pmatrix} A^* \\ P_1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} B^* \\ Q_1 \end{pmatrix}$ ossia $X = \begin{pmatrix} A^* \\ P_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B^* \\ Q_1 \end{pmatrix}$, cioè la stessa matrice X si ottiene dalla seconda formula facendovi $Q = Q_1$; ed inversamente.

Possiamo enunciare il risultato ottenuto al modo seguente:

Indicando con r la caratteristica di A, *con* A^* *una matrice formata con r righe indipendenti di* A, *con* B^* *la matrice formata con le righe corrispondenti di* B *(aventi cioè il medesimo numero d'ordine), la soluzione generale di* $AX = B$ *(supposta risolubile) è data da*

$$X = \begin{pmatrix} A^* \\ P \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B^* \\ Q \end{pmatrix}, \tag{3}$$

dove P *e* Q *sono due matrici di* $n-r$ *righe (essendo n il numero delle colonne di* A), *scelta la prima con l'unica condizione che sia* $\begin{vmatrix} A^* \\ P \end{vmatrix} \neq 0$, *ma fissata una volta per tutte, arbitraria la seconda. Se p è il numero delle colonne di* B, *le soluzioni dette sono* $\infty^{p(n-r)}$.

La caratteristica di X è poi quella di $\begin{pmatrix} B^* \\ Q \end{pmatrix}$; e poichè la caratteristica di B^* è quella stessa di B, possiamo aggiungere:

Se s è la caratteristica di B, *le caratteristiche delle soluzioni dell'equazione* $AX = B$ *sono date dai numeri* $s, s+1, \ldots, s+n-r$.

Si osservi anche che esisterà una soluzione sola allora soltanto che la matrice A^* sia quadrata; dunque:

Condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione $AX = B$ *(supposta risolubile) abbia una sola soluzione, è che il numero delle colonne di* A *sia uguale alla sua caratteristica. La soluzione ha poi la caratteristica stessa di* B.

Ragionamenti del tutto analoghi possiamo ripetere per l'equazione $YC = D$; enunceremo dunque il risultato:

Indicando con r la caratteristica di C, *con* C^{**} *una matrice formata con r colonne indipendenti di* C, *con* D^{**} *la matrice formata con le colonne corrispondenti di* D *(aventi cioè il medesimo numero d'ordine), la soluzione generale di* $YC = D$ *(supposta risolubile) è data da*

$$Y = (D^{**}, Q)\,(C^{**}, P)^{-1} \tag{4}$$

dove P *e* Q *sono due matrici di* $n-r$ *colonne (essendo n il numero delle righe di* C), *scelta la prima con l'unica condizione che* *sia* $|C^{**}, P| \neq 0$, *ma fissata una volta per tutte, arbitraria la seconda. Se* p *è il numero delle righe di* D, *le soluzioni dette sono* $\infty^{p(n-r)}$.

Se s *è la caratteristica di* D, *le caratteristiche delle soluzioni dell'equazione* $YC = D$ *sono date dai numeri* $s, s+1, \ldots, s+n-r$.

Condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione $YC = D$ *(supposta risolubile) abbia una sola soluzione, è che il numero delle righe di* C *sia uguale alla sua caratteristica.*

La soluzione ha poi la caratteristica stessa di D.

La soluzione generale di una qualunque delle due equazioni $AX = B$, $YC = D$, ad es. della prima, può anche determinarsi, con Frobenius (*L. S.,* p. 8), aggiungendo ad una soluzione particolare dell'equazione medesima la soluzione generale della $AX = 0$ [1]). Riguardo a quest'ultima equazione è facile vedere che se X_1 è una sua soluzione particolare, avente la caratteristica massima $n-r$, la soluzione generale è data da $X = X_1 R$ dove R è una matrice quadrata arbitraria di ordine p. Ciò si vede subito direttamente, [2]) oppure può dedursi dai precedenti risultati nel modo che segue. Sia $X_1 = \begin{pmatrix} A^* \\ P_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ Q_1 \end{pmatrix}$, essendo quindi la matrice Q_1 di caratteristica $n-r$; avremo $X = X_1 R = \begin{pmatrix} A^* \\ P_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ Q_1 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} A^* \\ P_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ Q_1 R \end{pmatrix}$; ma ponendo $Q_1 R = Q$, vediamo che presa ad arbitrio la matrice Q (di $n-r$ righe e p colonne) esistono sempre matrici R che soddisfano all'equazione $Q_1 R = Q$; la $X = X_1 R$ è quindi effettivamente la soluzione generale della $AX = 0$. Si vede però di qui che, eccettuato il caso che sia $n-r = p$ (nel qual caso la matrice Q_1 è quadrata) la formula $X = X_1 R$ dà ogni soluzione infinite volte.

2. — Abbiansi due equazioni

$$AX = B \;,\; CX = D,$$

e supponiamo che abbiano soluzioni comuni; queste soddisfaranno

---

[1]) Il numero delle colonne della matrice 0 deve evidentemente intendersi essere p; il numero delle sue righe è poi quello stesso di A.

[2]) Cfr. Frobenius, *L. S.,* p. 6.

all'equazione

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix},$$

e viceversa ogni soluzione di questa equazione soddisfa alle due equazioni precedenti; dunque

Condizione necessaria e sufficiente perchè le due equazioni $AX = B$, $CX = D$ *abbiano soluzioni comuni è che le due matrici* $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}$ *abbiano ugual caratteristica; le soluzioni comuni sono le soluzioni dall'equazione* $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}$.

Condizione necessaria e sufficiente perchè le due equazioni $XA = B$, $XC = D$ *abbiano soluzioni comuni è che le due matrici* (A, C), $\begin{pmatrix} A, C \\ B, D \end{pmatrix}$ *abbiano ugual caratteristica; le soluzioni comuni sono le soluzioni dell'equazione* $X(A, C) = (B, D)$.

Per il caso di più di due equazioni valgono evidentemente le proprietà analoghe.

3. — Se inoltre le due equazioni

$$AX = B, \quad CX = D$$

sono equivalenti, le due serie dei numeri che danno le caratteristiche delle loro soluzioni debbono essere identiche; le due matrici A, C (come anche le B, D) hanno quindi la stessa caratteristica, e poichè l'equazione $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}$ è equivalente, nell'ipotesi fatta, a ciascuna delle precedenti equazioni, la stessa caratteristica di A e C ha anche la matrice $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$. È poi evidentemente soddisfatta la condizione del n.° precedente, e quindi le tre matrici A, C, $\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}$ hanno ugual caratteristica.

Supposta, inversamente, verificata questa condizione, l'equazione $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}$ è risolubile; ma applicando per la sua risoluzione il metodo del n.° 1, essa si riduce, mantenendo le stesse notazioni del n.° 1 medesimo, all'equazione equivalente $A^*X = B^*$, o all'altra $C^*X = D^*$, le quali poi equivalgono rispettivamente alle $AX = B$, $CX = D$, che dunque sono equivalenti fra loro. Quindi:

Condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità e l'equivalenza di due equazioni $AX = B$, $CX = D$ (*o* $XA = B$, $XC = D$) *è che le tre matrici* A, C, $\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}$ $\left(o\ A, C, \begin{pmatrix} A, C \\ B, D \end{pmatrix}\right)$ *abbiano ugual caratteristica.*

Con questo criterio si verifica in particolare che le varie equazioni $A^*X = B^*$ che si deducono secondo il n.° 1 dalla $AX = B$, sono tutte equivalenti.

La condizione poi perchè $AX = B$ ammetta tutte le soluzioni di $CX = D$, è evidentemente che $CX = D$ e $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}$ siano equivalenti, e si deduce quindi:

Condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione $AX = B$ (*o* $XA = B$) *ammetta tutte le soluzioni della* $CX = D$ (*risp.* $XC = D$), *è che le due matrici* C, $\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}$ $\left(\textit{risp.}\ C, \begin{pmatrix} A, C \\ B, D \end{pmatrix}\right)$ *abbiano ugual caratteristica.*

4. — Confrontiamo ora un'equazione di un tipo con un'equazione dell'altro; proponiamoci cioè di determinare, ove esistano, le soluzioni comuni alle due equazioni

$$AX = B \quad , \quad XC = D ; \tag{5}$$

le matrici A, B, C, D sono matrici rettangolari, le prime due delle quali hanno un ugual numero di righe, le ultime due un ugual numero di colonne; perchè inoltre le due equazioni (5) abbiano soluzioni comuni, occorre evidentemente che il numero delle colonne di A e quello delle colonne di B siano eguali rispettivamente al numero delle righe di D e a quello delle righe di C. Condizione necessaria perchè le (5) ammettano soluzioni comuni è poi che sia

$$AD = BC ; \tag{6}$$

infatti dalla prima delle (5) si deduce $AXC = BC$, e dalla seconda $AXC = AD$; e poichè la condizione (6) comprende evidentemente tutte le condizioni prima dette, relative ai numeri delle righe e delle colonne delle quattro matrici, la (6) medesima rappresenta l'unica condizione necessaria trovata fino ad ora, e noi dimostreremo che essa è anche sufficiente.

Sia m il numero delle righe di A (e delle righe di B), n quello delle colonne di A (e delle righe di D), p quello delle colonne di B (e delle righe di C), e q quello delle colonne di C (e di quelle di D); secondo le formule (3), (4) del n.° 1, le soluzioni generali delle due equazioni (5) sono date rispettivamente da

$$X = \begin{pmatrix} A^* \\ P \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B^* \\ Q \end{pmatrix},$$

$$X = (D^{**}, N)\,(C^{**}, M)^{-1},$$

dove A^*, B^*, C^{**}, D^{**} hanno i noti significati, le due matrici P ed M sono due matrici fisse aventi rispettivamente $n-r$ righe ed n colonne, p righe e $p-r'$ colonne (essendo r la caratteristica di A, r' quella di C), e le Q, N sono due matrici di costanti arbitrarie aventi la prima $n-r$ righe e p colonne, la seconda n righe e $p-r'$ colonne. Perchè dunque le (5) abbiano soluzioni comuni è necessario e sufficiente che le Q, N si possano scegliere in modo che si abbia

$$\begin{pmatrix} A^* \\ P \end{pmatrix} . (D^{**}, N) = \begin{pmatrix} B^* \\ Q \end{pmatrix} . (C^{**}, M),$$

ossia

$$A^* D^{**} = B^* C^{**}, \tag{7}$$

$$A^* N = B^* M, \tag{8}$$

$$P . (D^{**}, N) = Q . (C^{**}, M). \tag{9}$$

La (7) è conseguenza della (6) che supponiamo verificata; rimangono dunque da esaminare le (8) e (9).

Distinguiamo ora due casi, secondo che almeno una delle due equazioni (5) possiede una sola soluzione, oppure ciò non si verifica. Nel primo caso sia ad es. la $AX = B$ quella che ha una soluzione sola; è allora $n = r$, $P = Q = 0$; la (9) è quindi verificata, e la (8) dà $N = A^{*-1} B^* M$; l'unica soluzione della $AX = B$ soddisfa quindi anche alla $XC = D$. Analoga conclusione vale quando si supponga invece che la $XC = D$ abbia una soluzione sola. — Se ambedue le (5) hanno una soluzione sola, esse risultano allora equivalenti.

Nel secondo caso, nel caso cioè che nessuna delle (5) abbia una soluzione unica, la (8) ammette infinite soluzioni per la matrice N, e per ognuna di queste la (9) dà una ed una sola matrice Q, poichè è $|C^{**}, M| \neq 0$; le (5) hanno quindi soluzioni comuni. — Queste soluzioni comuni non possono però essere tutte quelle di una o dell' altra delle due equazioni (5); bisognerebbe infatti per questo che o la matrice N, o la Q, potesse darsi ad arbitrio, e che questo non sia risulta per la N dalla (8), per la Q dalla

$$PD^{**} = QC^{**}, \tag{10}$$

conseguenza della (9). In particolare, le (5) non sono mai, in questo secondo caso, equivalenti.

Possiamo dunque dire:

Condizione necessaria e sufficiente perchè le equazioni $AX = B$, $XC = D$, *supposte risolubili, abbiano soluzioni comuni è che sia* $AD = BC$.

Esse non possono mai essere equivalenti, eccetto il caso ovvio che ambedue abbiano una soluzione sola. Di più una di esse non può possedere tutte le soluzioni dell'altra, eccetto anche qui il solo caso che una di esse abbia una soluzione unica.

Da ciò che si è detto sopra risulta che le soluzioni comuni possono rappresentarsi con la formula

$$X = (D^{**}, N)\,(C^{**}, M)^{-1}, \tag{11}$$

dove è

$$N = \begin{pmatrix} A^* \\ P \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B^* \\ Q \end{pmatrix} . M, \tag{12}$$

riguardando sempre, in queste formule, le P, M come fisse, la Q invece come arbitraria. Infatti la soluzione generale dell'equazione (8) rispetto alla matrice N può scriversi $N = \begin{pmatrix} A^* \\ P \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B^* . M \\ R \end{pmatrix}$, essendo R una matrice arbitraria di $n - r$ righe e $p - r'$ colonne; ma potendosi evidentemente determinare sempre una matrice Q tale che sia $QM = R$, si ha appunto $N = \begin{pmatrix} A^* \\ P \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B^* M \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^* \\ P \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B^* \\ Q \end{pmatrix} M$. — Osserviamo però che gli elementi della matrice Q, per quanto arbitrari, non rappresentano altrettante costanti essenziali nell'espressione (12) della N, e quindi nell'espressione (11) della X; le costanti essenziali sono infatti soltanto gli elementi della $R = QM$, e sono perciò in numero di $(n-r)(p-r')$. — Adoperando invece della (8) la (10), le soluzioni comuni possono scriversi

$$X = \begin{pmatrix} A^* \\ P \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B^* \\ Q \end{pmatrix},$$

essendo

$$Q = P \, . \, (D^{**}, N) \, . \, (C^{**}, M)^{-1},$$

e la matrice N è arbitraria; valgono per essa le stesse osservazioni fatte sopra per la matrice Q.

5. — Facendo il caso particolare $C = A$, $D = B$ si ottiene:

La condizione necessaria e sufficiente perchè le due equazioni (supposte risolubili)

$$(13) \qquad AX = B \quad , \quad XA = B$$

abbiano soluzioni comuni, è che A *e* B *siano permutabili.*

Poichè inoltre se le (13) hanno ambedue una sola soluzione, la matrice A, e quindi anche la B, è una matrice quadrata, ed è $|A| \neq 0$, vediamo che

Le due equazioni (13) *non possono mai essere equivalenti, eccetto il caso che le due matrici siano quadrate e sia* $|A| \neq 0$; *in questo caso poi esse sono equivalenti allora ed allora soltanto che* A *e* B *siano permutabili,* come si vede anche direttamente, e come abbiamo ricordato in principio.

Si vede di più che volendo mantenere al concetto di *quoziente* di due matrici A, B la proprietà di essere definito da una *qualunque* delle due equazioni $AX = B$, $XA = B$, si ricade necessariamente nel caso che sia $|A| \neq 0$ (ed $AB = BA$), ossia nel caso dell'unicità del quoziente medesimo.

Un altro caso particolare può aversi facendo nelle (5) $B = D = 0$; si ha

Se le due equazioni $AX = 0$, $XC = 0$ *hanno ambedue soluzioni non identicamente nulle, posseggono soluzioni comuni, non nulle.*

6. — Abbiasi ora un sistema di m equazioni lineari in n matrici incognite, del tipo

$$\sum_{1}^{n}{}_{k}\, A_{ik}\, X_k = B_i \qquad (i=1,2,\ldots,m) \tag{14}$$

e sia μ_i il numero delle righe di $A_{i,1}, A_{i,2}, \ldots, A_{i,n}, B_i$, ν_k quello delle colonne di $A_{1,k}, A_{2,k}, \ldots, A_{m,k}$, e ν il numero delle colonne delle B_i; [1]) ogni X_k avrà allora ν_k righe e ν colonne. Ponendo

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{pmatrix} \tag{15}$$

vediamo che ad ogni soluzione del sistema (14) corrisponde una soluzione dell'equazione

$$\begin{pmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots, & A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22}, & \ldots, & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m1}, & A_{m2}, & \ldots, & A_{mn} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_m \end{pmatrix}, \tag{16}$$

essendo la X legata alle $X_1, X_2, \ldots, X_m$ dalla relazione (15); e viceversa da ogni soluzione di questa equazione si ottiene una soluzione del sistema (14).

Si ha così il seguente risultato, completamente analogo al teorema di Capelli per le equazioni lineari:

Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema (14) *ammetta soluzioni, è che le due matrici*

$$\begin{pmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots, & A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22}, & \ldots, & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m1}, & A_{m2}, & \ldots, & A_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots, & A_{1n}, & B_1 \\ A_{21}, & A_{22}, & \ldots, & A_{2n}, & B_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m1}, & A_{m2}, & \ldots, & A_{mn}, & B_m \end{pmatrix} \tag{17}$$

---

[1]) V. la definizione di somma di matrici e le osservazioni fatte in principio.

abbiano la stessa caratteristica. — Ammette poi una sola soluzione allora ed allora soltanto che questa caratteristica sia uguale al numero delle colonne della prima matrice. Altrimenti, se r è la detta caratteristica, le soluzioni sono $\infty^{\nu(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n-r)}$.

Applicando, per la risoluzione effettiva dell'equazione (16), ciò che è stato detto al n.° 1, ci si riduce ad un'equazione analoga, nella quale la matrice nota del primo membro è una matrice quadrata, avente il determinante diverso da 0, mentre nella matrice del secondo membro si introducono le costanti arbitrarie occorrenti.

Supponiamo ora appunto che per il sistema (14) si abbia $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n=\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_m$, e che *il determinante del sistema*, cioè il determinante della prima delle matrici (17), sia diverso da zero. Della matrice ora detta potremo allora considerare la matrice reciproca, che scriveremo al modo seguente

$$\begin{pmatrix} A'_{11} , & A'_{12} , & \ldots, & A'_{1m} \\ A'_{21} , & A'_{22} , & \ldots, & A'_{2m} \\ . & . & . & . \\ A'_{n1} , & A'_{n2} , & \ldots, & A'_{nm} \end{pmatrix},$$

dove A'_{ik} rappresenta una matrice di ν_i righe e μ_k colonne; indicando allora con $\delta_{k,h}$ il simbolo di Kronecker ($\delta_{k,h}=0$ per $k \neq h$, $\delta_{k,k}=1$), avremo

$$\sum_1^m{}_i \, A'_{k,i} \, A_{i,h} = \delta_{k,h} \, E_{\nu_k} \, , \quad (k, h = 1, 2, \ldots, n).$$

Se quindi moltiplichiamo l'i^{esima} equazione del sistema (14), cioè la

$$\sum_1^n{}_h \, A_{ih} X_h = B_i \, ,$$

per $A'_{k,i}$ a sinistra, e sommiamo poi rispetto ad i da 1 ad n, otteniamo

$$X_k = \sum_1^m{}_i \, A'_{ki} \, B_i \, , \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{18}$$

Questa formula presenta una evidente analogia con la regola di Cramer.

Riguardo infine alla caratteristica delle soluzioni possiamo dire, nel caso generale, che se s è la caratteristica della matrice $\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ B_m \end{pmatrix}$, le caratteristiche delle varie matrici $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{pmatrix}$ sono date dai numeri $s, s+1, \ldots, s+\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n-r$, essendo r la caratteristica della prima delle due matrici (17). Nel caso poi che questa matrice sia quadrata ed abbia il determinante diverso da 0, la caratteristica r_k di ogni singola X_k sarà, secondo la formula (18), la caratteristica del prodotto delle due matrici

$$A'_k = (A'_{k1}\ ,\ A'_{k2}\ ,\ldots,\ A'_{km})\quad ,\quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_m \end{pmatrix},$$

la prima delle quali ha caratteristica uguale al numero delle sue righe; avremo quindi [1])

$$r_k = s+\nu_k+H_k-(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n) = s+H_k-\nu_1-\ldots-\nu_{k-1}-\nu_{k+1}-\ldots-\nu_n,$$

essendo H_k il numero dei divisori elementari uguali ad ω [2]) della matrice

$$\begin{pmatrix} -E_{\nu_k}\,\omega & , & \overline{A}'_k \\ \overline{B} & , & -E_{\nu_1}\,\omega \end{pmatrix},$$

---

[1]) V. la mia Nota: *Sulla caratteristica del prodotto di due matrici* [Periodico di Matematica, anno XXIV (1909), fasc. VI, pp. 253-265], p. 261.

[2]) Per la definizione e le proprietà dei divisori elementari di una matrice cfr. Muth, *Op. cit.*

nella quale la $\overline{A}'_k$ non è che la A'_k cui siano aggiunte (se è $s > \nu_k$) $s - \nu_k$ righe di elementi nulli, e la $\overline{B}$ è formata con s colonne indipendenti della B e (se è $\nu_k > s$) con $\nu_k - s$ colonne di elementi nulli.

L'equazione $AXB = C$.

7. — Un procedimento analogo a quello seguìto nel n.° 1 ci permette di determinare le condizioni di risolubilità di un'altra equazione lineare fra matrici, di tipo diverso da quelle considerate precedentemente, cioè della

$$AXB = C. \tag{19}$$

È intanto manifesto, per quel che vedemmo al n.° 1 medesimo, che se tale equazione ammette soluzioni, le due matrici $A, (A, C)$ hanno ugual caratteristica, come pure le altre due $B, \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$, in quanto che risultano risolubili ambedue le equazioni $AY = C$, $ZB = C$; dimostreremo ora che queste condizioni sono insieme sufficienti.

Supponiamo perciò che queste condizioni siano soddisfatte, e indichiamo, con notazioni analoghe a quelle del n.° 1, con m, p i numeri delle righe rispettivamente di A e B, con n, q i numeri delle loro colonne, con r la caratteristica di A, con s quella di B, con t quella di C. Consideriamo ora una matrice A^* formata con r righe indipendenti di A, e siano quelle aventi i numeri d'ordine $i_1, i_2, \dots, i_r$, una B^{**} formata con s colonne indipendenti di B, ad es. la $k_1{}^{esima}, k_2{}^{esima}, \dots, k_s{}^{esima}$, ed infine la $\overline{C}$ formata dagli elementi di C che appartengono *ordinatamente* alle righe di indici $i_1, i_2, \dots, i_r$, e alle colonne di indici $k_1, k_2, \dots, k_s$. Poichè A^* ed (A, C) $\left(\text{risp. } B^{**} \text{ e } \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}\right)$ hanno, per l'ipotesi fatta, ugual caratteristica, è chiaro che ogni riga di (A, C) $\left(\text{risp. ogni colonna di } \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}\right)$ che non sia fra le $i_1{}^{esima}, i_2{}^{esima}, \dots, i_r{}^{esima}$ (risp. $k_1{}^{esima}, k_2{}^{esima}, \dots, k_s{}^{esima}$) è una combinazione lineare di queste ultime; altrettanto quindi accade per la matrice C, e la matrice $\overline{C}$ ha dunque la stessa caratteristica di C. Scambiando allora opportunamente le righe di A e C, e le colonne di B e C, potremo scrivere la (19) nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}^* \\ \mathrm{A}' \end{pmatrix} \mathrm{X} \, (\mathrm{B}^{**} \,,\, \mathrm{B}') = \begin{pmatrix} \overline{\mathrm{C}} \,, & \mathrm{C}' \\ \mathrm{C}'' \,, & \mathrm{C}''' \end{pmatrix}, \tag{20}$$

avendo la A′ $m-r$ righe e n colonne, la B′ p righe e $q-s$ colonne, la C′ r righe e $q-s$ colonne, la C″ $m-r$ righe e s colonne, la C‴ infine $m-r$ righe e $q-s$ colonne. Ma le due matrici

$$(\mathrm{A}^* \,,\, \overline{\mathrm{C}} \,,\, \mathrm{C}') \,,\quad \begin{pmatrix} \mathrm{A}^* \,, & \overline{\mathrm{C}} \,, & \mathrm{C}' \\ \mathrm{A}' \,, & \mathrm{C}'' \,, & \mathrm{C}''' \end{pmatrix}$$

hanno ambedue, in seguito alla ipotesi ammessa, la caratteristica r, e così le

$$\begin{pmatrix} \mathrm{B}^{**} \\ \overline{\mathrm{C}} \\ \mathrm{C}'' \end{pmatrix} ,\quad \begin{pmatrix} \mathrm{B}^{**} \,, & \mathrm{B}' \\ \overline{\mathrm{C}} \,, & \mathrm{C}' \\ \mathrm{C}'' \,, & \mathrm{C}''' \end{pmatrix}$$

hanno la caratteristica s; per il n.° 1 potremo allora porre

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathrm{LA}^* = \mathrm{A}' \,, & \mathrm{L}\overline{\mathrm{C}} = \mathrm{C}'' \,, & \mathrm{LC}' = \mathrm{C}''' \\ \mathrm{B}^{**}\mathrm{M} = \mathrm{B}' \,, & \overline{\mathrm{C}}\mathrm{M} = \mathrm{C}' \,, & \mathrm{C}''\mathrm{M} = \mathrm{C}''' \end{array} \right. \tag{21}$$

essendo L una matrice di $m-r$ righe e r colonne, M una di s righe e $q-s$ colonne. La (20) si può anche scrivere:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}^*\mathrm{X}\mathrm{B}^{**} \,, & \mathrm{A}^*\mathrm{X}\mathrm{B}' \\ \mathrm{A}'\mathrm{X}\mathrm{B}^{**} \,, & \mathrm{A}'\mathrm{X}\mathrm{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\mathrm{C}} \,, & \mathrm{C}' \\ \mathrm{C}'' \,, & \mathrm{C}'' \end{pmatrix} \tag{22}$$

e quindi se X verifica la (19) verifica anche la

$$\mathrm{A}^*\mathrm{X}\,\mathrm{B}^{**} = \overline{\mathrm{C}} \,. \tag{23}$$

Ma, inversamente, soddisfi X alla (23), e le due condizioni enunciate siano soddisfatte; avremo allora, per le (21),

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^*\mathrm{X}\mathrm{B}' &= \mathrm{A}^*\mathrm{X}\mathrm{B}^{**}\mathrm{M} = \overline{\mathrm{C}}\mathrm{M} = \mathrm{C}' \,, \\ \mathrm{A}'\mathrm{X}\mathrm{B}^{**} &= \mathrm{LA}^*\mathrm{X}\mathrm{B}^{**} = \mathrm{L}\overline{\mathrm{C}} = \mathrm{C}'' \,, \\ \mathrm{A}'\mathrm{X}\mathrm{B}' &= \mathrm{LA}^*\mathrm{X}\mathrm{B}^{**}\mathrm{M} = \mathrm{L}\overline{\mathrm{C}}\mathrm{M} = \mathrm{C}''\mathrm{M} = \mathrm{C}''' \,, \end{aligned}$$

onde sarà soddisfatta anche la (22). Le (19), (23) sono dunque equivalenti.

La soluzione generale della (23) si scrive immediatamente; se infatti P, Q sono due matrici *fisse*, rispettivamente di $n-r$ righe e n colonne, p righe e $p-s$ colonne, scelte del resto con l'unica condizione che sia $\begin{vmatrix} A^* \\ P \end{vmatrix} \neq 0$, $|B^{**}, Q| \neq 0$, e U, V, W tre matrici affatto arbitrarie, aventi rispettivamente r righe e $p-s$ colonne, $n-r$ righe e s colonne, $n-r$ righe e $p-s$ colonne, ogni matrice X per la quale si abbia

$$\begin{pmatrix} A^* \\ P \end{pmatrix} X (B^{**}, Q) = \begin{pmatrix} \bar{C}, U \\ V, W \end{pmatrix} \tag{24}$$

soddisfa evidentemente alla (23), mentre per ogni soluzione della (23) esistono manifestamente tre matrici U, V, W per le quali è soddisfatta l'ultima relazione; vi è inoltre corrispondenza biunivoca fra le soluzioni X della (23), e i sistemi di valori delle costanti di U, V, W. Si ha dunque:

Condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione (19) *ammetta soluzioni, è che le due matrici* A, (A, C), *e le altre due* B, $\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$ *abbiano rispettivamente ugual caratteristica. — La soluzione generale di tale equazione è data da*

$$X = \begin{pmatrix} A^* \\ P \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{C}, U \\ V, W \end{pmatrix} (B^{**}, Q)^{-1}, \tag{25}$$

essendo le P, Q *matrici fisse, le* U, V, W *matrici formate di costanti arbitrarie, ed avendo poi tutti i simboli il significato detto sopra.*

Condizione necessaria e sufficiente perchè la (19), *supposta risolubile, abbia una sola soluzione, è che la caratteristica di* A *sia uguale al numero delle sue colonne, e quella di* B *uguale al numero delle sue righe. Se questo non è, le soluzioni sono* ∞^{np-rs}.

Riguardo alle caratteristiche delle soluzioni dell'equazione (19) si osservi anzitutto che la matrice $(\bar{C}, U)$ può avere per caratteristica, essendo la U arbitraria, uno qualunque dei numeri compresi (i limiti inclusi) fra t e il più piccolo dei numeri $t+p-s$ ed r; ciò si vede immediatamente supponendo di sostituire a $\overline{\mathrm{C}}$ una matrice formata con t colonne indipendenti di $\overline{\mathrm{C}}$ medesima. Analogamente se per una certa U la $(\overline{\mathrm{C}}\,,\mathrm{U})$ ha una caratteristica ρ, la $\begin{pmatrix}\overline{\mathrm{C}} \,, \mathrm{U} \\ \mathrm{V} \,, \mathrm{W}\end{pmatrix}$ potrà avere per caratteristica uno qualunque dei numeri compresi (i limiti inclusi) fra ρ e il più piccolo dei numeri $\rho+n-r$ e p. Se allora supponiamo che ρ sia precisamente la massima caratteristica che può raggiungere la $(\overline{\mathrm{C}}\,,\mathrm{U})$, cioè il più piccolo dei numeri $t+p-s$ ed r, vediamo che la massima caratteristica della $\begin{pmatrix}\overline{\mathrm{C}} \,, \mathrm{U} \\ \mathrm{V} \,, \mathrm{W}\end{pmatrix}$ è data dal più piccolo dei tre numeri $n+p-r-s+t$, n, p. Poichè, per la formula (25), la caratteristica di X è uguale a quella di $\begin{pmatrix}\overline{\mathrm{C}} \,, \mathrm{U} \\ \mathrm{V} \,, \mathrm{W}\end{pmatrix}$, abbiamo dunque:

Le caratteristiche delle soluzioni della (19) *sono date dai numeri compresi (i limiti inclusi) fra la caratteristica t di* C *e il più piccolo dei tre numeri $n+p-r-s+t$, n, p.*

CAPITOLO II.

L'equazione $AX = XB$

L' equazione $AX = XB_{0,1}$.

8. — Prendiamo ora a considerare l'equazione

$$AX = XB\,; \tag{26}$$

in essa le due matrici A, B devono essere necessariamente quadrate, in quanto che, ad es., il numero delle righe come quello delle colonne di A, debbono essere uguali ambedue al numero delle righe di X.

Il FROBENIUS, in *L. S.* pag. 28, giunge (in modo *razionale*) al risultato che per la risolubilità della (26) è necessario che le due *funzioni caratteristiche* [1])

$$|A - E\omega| \quad , \quad |B - E\omega|$$

rispettivamente di A e di B abbiano divisori comuni [2]).

Il SYLVESTER [3]) mostra poi che questa condizione è anche sufficiente, determinando effettivamente (quando essa sia soddisfatta)

---

[1]) Ricordiamo che data una matrice quadrata A, di ordine n, si chiama *funzione caratteristica* di A il polinomio di grado n nella variabile ω, $|A - E\omega|$.

[2]) Cfr. anche MUTH, *Op. cit.,* p. 163, che però considera solo il caso $|A| = \mid= 0$, $|B| = \mid= 0$.

[3]) *Sur l'équation en matrices* $px = xq$ [Comptes rendus ecc., vol. IC (1884, 2.° sem.), pp. 67-70, 115-116].

alcune soluzioni dell'equazione medesima; esse però vengono determinate in modo irrazionale, valendosi del teorema fondamentale dell'Algebra. Ci proponiamo in quel che segue di determinare *razionalmente* la soluzione generale della (26); ritroveremo così anche la condizione necessaria e sufficiente ora ricordata.

Ci varremo perciò del procedimento dato recentemente dal sig. prof. O. NICOLETTI per ridurre ad una certa forma canonica, determinabile razionalmente, una sostituzione lineare omogenea [1]). Con questo procedimento in luogo di operare nel campo di razionalità di tutti i numeri reali e complessi, si opera in un qualunque campo R di razionalità che contenga gli elementi delle matrici date.

9. — Cominciamo dal ricordare, in questo n.° e nel successivo, alcuni dei primi teoremi dati nella Memoria ora citata, Memoria che in seguito indicheremo brevemente con la iniziale M. Sia $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ una matrice quadrata di ordine n e

$$D(\omega) = |A - E\omega|$$

la sua funzione caratteristica, [2]) e si ponga per brevità

$$c_{ij} = a_{ij} - \varepsilon_{ij}\,\omega \qquad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

essendo ε_{ij} i simboli di KRONECKER; sia poi R un determinato campo di razionalità, che contenga gli elementi di A, $P = P(\omega)$ un divisore (variabile), *primo* nel campo R, del determinante $D(\omega)$, $P^{\alpha_1}, P^{\alpha_2}, \dots, P^{\alpha_h}$ $(\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_h)$ i divisori elementari della matrice $A - E\omega$ relativi al divisore P. Posto in generale

$$l_\varrho = \alpha_{\varrho+1} + \dots + \alpha_h \qquad (\varrho = 0, 1, \dots, h-1),$$

ogni minore di ordine $n - \varrho$ di $D(\omega)$

$$\frac{\partial^\varrho D}{\partial c_{p_1 q_1} \dots \partial c_{p_\varrho q_\varrho}}$$

---

[1]) O. NICOLETTI, *Sulla riduzione a forma canonica di una sostituzione lineare omogenea e di un fascio di forme bilineari* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie III, t. XIV, (1908), pp. 265-325], Cap. I.

[2]) I risultati che ora ricordiamo sono dimostrati in M. prendendo più in generale, in luogo della E, una qualunque matrice a determinante non nullo.

sarà divisibile per P^{l_ϱ}, e ve ne sarà fra essi almeno uno *regolare* rispetto a P, cioè non divisibile per una potenza superiore di P; e poichè, come è noto, ogni minore di $D(\omega)$ regolare rispetto a P contiene minori, di qualunque ordine, che godono di questa proprietà, potremo inoltre supporre che i successivi minori regolari rispetto a P, che indicheremo ordinatamente con

$$\frac{\partial^\varrho D}{\partial c_{s_1 t_1} \dots \partial c_{s_\varrho t_\varrho}} \qquad (\rho = h-1, h-2, \dots, 1)$$

siano ciascuno contenuto nel successivo.

Dividiamo ora per P^{l_ϱ} ognuno dei seguenti minori di ordine $n-\rho$

$$\frac{\partial^\varrho D}{\partial c_{s_\varrho j} \partial c_{s_1 t_1} \dots \partial c_{s_{\varrho-1} t_{\varrho-1}}} \qquad (j=1, 2, \dots, n),$$

e indichiamo con $\overline{X}_j^{(\varrho)}$ il quoziente ottenuto, così che avremo

$$\frac{\partial^\varrho D}{\partial c_{s_\varrho j} \partial c_{s_1 t_1} \dots \partial c_{s_{\varrho-1} t_{\varrho-1}}} = P^{l_\varrho} \overline{X}_j^{(\varrho)}.$$

Si hanno allora per la matrice

$$(27) \qquad \left(\overline{X}_j^{(\varrho)}\right) \qquad (\rho=1, 2, \dots, h; j=1, 2, \dots, n)$$

di h righe ed n colonne, formata con le hn funzioni di ω ora definite, le proprietà seguenti:

a) Si ha

$$(28) \qquad \sum_1^n {}_j\, c_{ij} \overline{X}_j^{(\varrho)} \equiv 0 \; (\mathrm{mod.}\; P^{\alpha_\varrho}), \quad (\rho=1, 2 \dots h;\; i=1, 2 \dots n);$$

b) La matrice (27) *ha* (mod. P) *la caratteristica* h [1]).

10. — Siano ora $h_0 = h$, h_1, h_2, ..., $h_{\alpha_1 - 1}$ i così detti numeri di PREDELLA [2]) relativi al divisore P, ed alla matrice $A - E\omega$, sia cioè in generale h_t il numero degli esponenti α_ϱ maggiori di t; abbiamo il teorema [3]):

---

[1]) M., n. 1-2, pp. 268-271.

[2]) V. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi.* Pisa, Spoerri, (1907), p. 99.

[3]) M., n. 3, pp. 271-273.

Le congruenze

(29) $$\sum_{1}^{n}{}_j\, c_{ij}\, X_j \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ P^l) \qquad (1 \leq l \leq \alpha_1)$$

ammettono h_{l-1} *soluzioni (indipendenti) la cui matrice ha* (mod. P) *la caratteristica* h_{l-1}.

Qualunque matrice di soluzioni di esse congruenze ha (mod. P) *una caratteristica non maggiore di* h_{l-1}.

Per $l > \alpha_1$ la dimostrazione stessa di questo teorema prova, senza alcuna modificazione, che ogni soluzione delle congruenze

(29)′ $$\sum_{1}^{n}{}_j\, c_{ij}\, X_j \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ P^l) \qquad (l > \alpha_1)$$

è divisibile per P; ponendo allora, per una tale soluzione, $X_j = PX'_j$ otteniamo

$$\sum_{1}^{n}{}_j\, c_{ij}\, X'_j \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ P^{l-1}) \ ,$$

e così seguitando vediamo che il teorema enunciato può completarsi così:

Ogni soluzione delle congruenze

(29)′ $$\sum_{1}^{n}{}_j\, c_{ij}\, X_j \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ P^l) \qquad (l > \alpha_1)$$

è divisibile per $P^{l-\alpha_1}$.

Si ha inoltre che *se* P (*appartenendo sempre ad* R) *non divide* $|A - E\omega|$, *ogni soluzione delle congruenze* (29) *o* (29′) *è* $\equiv 0$ (mod. P^l). Infatti i ragionamenti del citato n. 3 di M. provano che ogni tale soluzione è divisibile per P, e le considerazioni fatte poco fa mostrano allora appunto che essa è divisibile per P^l.

Ogni sistema di hn funzioni $X_j^{(\rho)}$ $(j = 1, 2, \ldots, n\,;\ \rho = 1, 2, \ldots, h)$ che goda delle due proprietà *a*), *b*) poco sopra enunciate, è detto (M., p. 273) *un sistema canonico di soluzioni relativo al divisore* P *ed alle righe di* $A - E\omega$. Vale il teorema [1]).

---

[1]) M., n. 4, pp. 273-275.

L'espressione della più generale soluzione X_j *delle congruenze* (29) *per mezzo delle soluzioni di un sistema canonico è*

$$(30)\ X_j \equiv \sum_1^{h_{l-1}} {}_r M_r(\omega) X_j^{(r)}(\omega) + \sum_1^{l-1} {}_\varrho P^{l-\varrho} \sum_{h_\varrho+1}^{h_{\varrho-1}} {}_{t_\varrho} M_{t_\varrho}(\omega) X_j^{(t_\varrho)}(\omega) \ (\text{mod. } P^l).$$

In essa ogni polinomio $M_r(\omega)$ $(r=1,2,\dots,h_{l-1})$ è determinato rispetto al modulo P^l, ogni polinomio $M_{t_\varrho}(\omega)$ rispetto a P^ϱ; *essa dipende quindi da*

$$g\left\{l h_{l-1} + \sum_1^{l-1} {}_\varrho \rho (h_{\varrho-1} - h_\varrho)\right\} = g(h+h_1+\dots+h_{l-1})$$

parametri arbitrari, essendo g il grado di P rispetto ad ω.

Se consideriamo invece le (29)', la proprietà sopra notata dice evidentemente che la loro soluzione generale si ha moltiplicando per $P^{l-\alpha_1}$ la soluzione generale delle congruenze

$$\sum_1^n {}_j c_{ij} X_j \equiv 0 \ (\text{mod. } P^{\alpha_1});$$

si vede allora facilmente che anche per le (29)' si ha una formula come la (30), solo che in essa mancheranno i termini $\sum_1^{h_{l-1}} {}_r M_r(\omega) X_j^{(r)}(\omega)$, ed i valori di ρ, anzichè andare da 1 a $l-1$, andranno da 1 ad α_1. Ma se nella (30), così come è scritta, diamo ad l un valore maggiore di α_1, ed osserviamo che può ritenersi $h_t=0$ per $t \geq \alpha_1$, possiamo dire che *la* (30) *dà la soluzione generale delle congruenze*

$$\sum_1^n {}_j c_{ij} X_j \equiv 0 \ (\text{mod. } P^l)$$

con l qualunque (intero e positivo), purchè si intenda che ognuna delle somme

$$\sum_1^{h_{l-1}} {}_r M_r(\omega) X_j^{(r)}(\omega) \quad , \quad \sum_{h_\varrho+1}^{h_{\varrho-1}} {}_{t_\varrho} M_{t_\varrho}(\omega) X_j^{(t_\varrho)}(\omega)$$

debba esser fatta uguale a 0, *quando è nullo l'indice superiore. — Il numero dei parametri arbitrari da cui dipende la detta solu-*

zione generale è dato in ogni caso da $g(h+h_1+\ldots+h_{l-1})$; infatti per $l>\alpha_1$ esso è $g(h+h_1+\ldots+h_{\alpha_1-1})$, e si ha $h_{\alpha_1}=h_{\alpha_1+1}=\ldots=h_l=0$.

11. — Richiamate queste proprietà fondamentali si considerino i q sistemi di congruenze

$$(31)\qquad \left.\begin{array}{l} \sum_{1}^{n}{}_j\, c_{ij}\, X_{j,1} \equiv 0 \pmod{P^{\beta_1}} \\ \sum_{1}^{n}{}_j\, c_{ij}\, X_{j,2} \equiv 0 \pmod{P^{\beta_2}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{1}^{n}{}_j\, c_{ij}\, X_{j,q} \equiv 0 \pmod{P^{\beta_q}} \end{array}\right\},\quad (i=1,2,\ldots,n),$$

dove i $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ ($\beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq \beta_q$) sono un certo numero q di numeri interi e positivi affatto arbitrari, e $P=\omega^g+b_1\omega^{g-1}+\ldots+b_{g-1}\omega+b_g$ è un polinomio di grado g, primo nel considerato campo di razionalità R.

Indichiamo con $X_{j,1}$ una soluzione qualunque del primo sistema, con $X_{j,2}$ una del secondo, ecc.; siccome ogni $X_{j,\sigma}$ ($\sigma=1,2,\ldots,q$) è definita solo rispetto al modulo P^{β_σ}, potrà scriversi esplicitamente al modo che segue: [1])

$$) \quad X_{j,\sigma} \equiv \sum_{1}^{g}{}_u \sum_{0}^{\beta_\sigma-1}{}_v\, x_j^{\sigma,\, vg+u}\, \omega^{u-1} P^v \pmod{P^{\beta_\sigma}},\ (j=1,2,\ldots,n;\ \sigma=1,2,\ldots,q).$$

Le $x_j^{\sigma,vg+u}$ debbono riguardarsi come quantità note, contenenti parametri arbitrari, in quanto che le cose ricordate nei n.i precedenti permettono di determinare la soluzione generale di ognuno dei sistemi di congruenze (31); e poichè le $X_{j,\sigma}$ date dalle (32) soddisfano ai sistemi (31), si trova facilmente, eseguendo la sostituzione, che deve aversi [2])

$$\sum_{0}^{\beta_\sigma-1}{}_v \left(\sum_{1}^{n}{}_j\, a_{ij}\, x_j^{\sigma,vg+u} - x_i^{\sigma,vg+u-1} + b_{g-u+1}\, x_i^{\sigma,(v+1)g}\right) \omega^{u-1} P^v \equiv 0 \pmod{P^{\beta_\sigma}};$$

---

[1]) Si confronti il principio del n. 6 (p. 276) di M.
[2]) Cfr. M. n. 7, pp. 278-279.

questo porta evidentemente che sia (M. p. 278)

$$\sum_{1}^{n}{}_j\, a_{ij}\, x_j^{\sigma,\, vg+u} = x_i^{\sigma,\, vg+u-1} - x_i^{\sigma,\, (v+1)g}\, b_{g-u+1} \tag{33}$$

$$(i=1,2,\ldots,n\,;\ \sigma=1,2,\ldots,q\,;\ u=1,2,\ldots,g\,;\ v=0,1,\ldots,\beta_\sigma-1).$$

Consideriamo ora la matrice seguente, che indicheremo con $B_{0,1}^{(\sigma)}$:

$$B_{0,1}^{(\sigma)} = \left|\begin{array}{ccccc ccccc ccccc c}
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 0 & \dots \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 0 & \dots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 0 & \dots \\
-b_g & -b_{g-1} & -b_{g-2} & \dots & -b_1 & 1 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 0 & \dots \\
0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 0 & \dots \\
0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 0 & \dots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 0 & \dots \\
0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 0 & -b_g & -b_{g-1} & -b_{g-2} & \dots & -b_1 & 1 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 0 & \dots \\
0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\
0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots \\
0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 0 & -b_g & -b_{g-1} & -b_{g-2} & \dots & -b_1 & \dots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right|$$

composta di β_σ^2 matrici parziali dei tipi qui indicati, ciascuna delle quali ha l'ordine g; la $B_{0,1}^{(\sigma)}$ è perciò di ordine $g\beta_\sigma$, e la $B_{0,1}^{(\sigma)} - E\omega$ ha, come subito si riconosce, l'unico divisore elementare P^{β_σ}; poniamo inoltre

$$B_{0,1} = \left\{\begin{array}{cccc}
B_{0,1}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\
0 & B_{0,1}^{(2)} & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \dots & B_{0,1}^{(q)}
\end{array}\right\},$$

risultando così $B_{0,1}$ una matrice quadrata di ordine $g(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_q)$, che chiameremo *la matrice normale relativa ai divisori elementari* $P^{\beta_1}, P^{\beta_2},\ldots, P^{\beta_q}$; la $B_{0,1}-E\omega$ possiede appunto questi divisori elementari [1]). Se allora indichiamo con $X^{(\sigma)}$ la matrice

$$X^{(\sigma)}=(x_j^{\sigma,vg+u}) \qquad (j=1,2,\ldots,n;\, v=0,1,\ldots,\beta_\sigma-1;\, u=1,2,\ldots,g)$$

di n righe e $g\beta_\sigma$ colonne (essendo j l'indice delle righe, $vg+u$ quello delle colonne), e con X la

$$(34) \qquad X=(X^{(1)}, X^{(2)},\ldots, X^{(q)})=(x_j^{1,vg+u}, x_j^{2,vg+u},\ldots, x_j^{q,vg+u})$$

di n righe e $g(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_q)$ colonne, vediamo che la (33) può scriversi brevemente così

$$(35) \qquad AX=XB_{0,1},$$

onde concludiamo che la matrice (34) soddisfa alla relazione (35), pensata come un'equazione nella matrice incognita X.

Ma supponiamo viceversa che essendo $B_{0,1}$ una matrice qualunque della forma sopra definita, con le costanti $b_1, b_2,\ldots, b_g$ arbitrarie nel campo di razionalità R, soggette all'unica condizione che il polinomio $\omega^g+b_1\omega_{g-1}+\ldots+b_{g-1}\omega+b_g$ sia primo in esso campo, l'equazione (35) ammetta una soluzione X. Adottando per tale soluzione X la notazione (34) e tutte quelle adoperate finora, vediamo che i suoi elementi soddisfano alle (33), e se quindi definiamo qn funzioni $X_{j,\sigma}$ $(j=1,2,\ldots,n;\, \sigma=1,2,\ldots,q)$ mediante le (32), esse soddisfano, come si vede facilmente, alle congruenze (31), e perciò la X si ottiene nel modo precedentemente indicato.

Se il polinomio P, mediante il quale è formata la matrice $B_{0,1}$, non divide $|A-E\omega|$, il σ^{esimo} $(\sigma=1,2,\ldots,q)$ dei sistemi di congruenze (31) non ha, per il n.° precedente, che soluzioni divisibili per P^{β_σ}, e risulta quindi necessariamente $X=0$. Se invece P divide $|A-E\omega|$, esistono effettivamente soluzioni non nulle. – Poichè

---

[1]) Abbiamo apposto alle notazioni $B_{0,1}^{(\sigma)}$, $B_{0,1}$ l'indice 1 appunto per indicare che i determinanti $|B_{0,1}^{(\sigma)}-E\omega|$, $|B_{0,1}-E\omega|$ ammettono, nel campo R, un solo divisore primo. Cfr. le notazioni che adopereremo ai n. 13 e 14.

inoltre il determinante $|B_{0,1} - E\omega|$ è una potenza di P, e P è primo nel campo R, che contiene gli elementi di A, vediamo che il massimo divisore comune di $|A - E\omega|$ e $|B_{0,1} - E\omega|$ è una potenza di P, e possiamo quindi enunciare la cosa nel modo seguente:

Condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione (35), *dove* $B_{0,1}$ *ha il detto significato, ammetta soluzioni non nulle è che le due funzioni caratteristiche* $|A - E\omega|$, $|B_{0,1} - E\omega|$ *ammettano divisori comuni. La soluzione più generale di essa equazione si ha sotto la forma* (34), *essendo le* $x_j^{\sigma, \nu g + u}$ *definite dalle* (31), (32), *e si determina quindi razionalmente, in ogni campo di razionalità* R *che contenga gli elementi di* A *e di* $B_{0,1}$.

12. — È facile calcolare il numero N dei parametri arbitrari da cui dipende la soluzione più generale della (35). Dal n. 10 si ha intanto che la più generale matrice $X^{(\sigma)}$ è un aggregato lineare ed omogeneo [1]) di

$$g\left(h + h_1 + \dots + h_{\beta_\sigma - 1}\right)$$

particolari matrici $X^{(\sigma)}$, linearmente indipendenti, avendo indicato con h_t i numeri di Predella relativi alla matrice A ed al divisore P; la X dipenderà quindi, pure linearmente ed omogeneamente, da

$$N = g \sum_1^q {}_\sigma \left(h + h_1 + \dots + h_{\beta_\sigma - 1}\right)$$

parametri arbitrari. A questo numero N si possono però dare altre forme che vogliamo determinare.

Scrivendo, anzitutto, per disteso la somma dell'ultima formula al modo seguente:

$$\begin{aligned} & h + h_1 + \dots + h_{\beta_q - 1} + \dots + h_{\beta_2 - 1} + \dots + h_{\beta_1 - 1} \\ + & h + h_1 + \dots + h_{\beta_q - 1} + \dots + h_{\beta_2 - 1} \\ + & \dots\dots\dots\dots \\ + & h + h_1 + \dots + h_{\beta_q - 1} , \end{aligned}$$

---

1) Notiamo esplicitamente che qui ed in seguito con le frasi : *combinare linearmente ed omogeneamente più matrici, aggregato lineare ed omogeneo di più matrici,* ed analoghe, intendiamo sempre che i coefficienti della combinazione siano *numeri* e non *matrici.*

e indicando con $k_0 = k = q$, $k_1, k_2, \ldots$ i numeri di PREDELLA per la matrice $B_{0,1}$, si vede immediatamente che è

$$N = g(hk + h_1 k_1 + \ldots + h_{\beta_1 - 1} k_{\beta_1 - 1}) = g(hk + h_1 k_1 + \ldots + h_{\alpha_1 - 1} k_{\alpha_1 - 1});$$ [1]

ne segue anche, per ragione di simmetria,

$$N = g \sum_1^h {}_\varrho (k + k_1 + \ldots + k_{\alpha_\varrho - 1}).$$

Un'altra espressione per mezzo dei numeri α e β può ottenersi così. Essendo evidentemente

$$\alpha_{h_\mu + 1} = \alpha_{h_\mu + 2} = \ldots = \alpha_{h_{\mu - 1}} = \mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \alpha_1),$$

si ha

$$\alpha_{h_\mu + 1} + \ldots + \alpha_{h_{\mu-1}} + \alpha_{h_{\mu-1}+1} + \ldots + \alpha_{h_{\mu-2}} + \ldots + \alpha_h =$$

$$= \mu (h_{\mu-1} - h_\mu) + (\mu - 1)(h_{\mu-2} - h_{\mu-1}) + \ldots + 2(h_1 - h_2) + (h - h_1),$$

ossia

$$h + h_1 + \ldots + h_{\mu-1} - \mu h_\mu = \alpha_{h_\mu + 1} + \alpha_{h_\mu + 2} + \ldots + \alpha_h, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, \alpha_1).$$

Può scriversi allora

$$h + h_1 + \ldots + h_{\beta_\sigma - 1} = \beta_\sigma h_{\beta_\sigma} + \alpha_{h_{\beta_\sigma}+1} + \alpha_{h_{\beta_\sigma}+2} + \ldots + \alpha_h \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, q),$$

e vediamo che il numero $h + h_1 + \ldots + h_{\beta_\sigma - 1}$ può anche ottenersi considerando di ogni coppia (β_σ, α_1), (β_σ, α_2), ..., (β_σ, α_h) il numero più piccolo e facendo la somma degli h numeri così ottenuti; per ottenere N bisogna poi fare la somma rispetto a σ, e moltiplicare per g.

Possiamo dunque dire:

Se indichiamo con $\gamma_{\varrho\sigma}$ il più piccolo dei numeri α_ϱ, β_σ ($\varrho = 1, 2, \ldots, h$; $\sigma = 1, 2, \ldots, k$), l'equazione (35) *ammette*

$$N = g \sum_1^k {}_\sigma (h + h_1 + \ldots + h_{\beta_\sigma - 1}) = g \sum_1^h {}_\varrho (k + k_1 + \ldots + k_{\alpha_\varrho - 1}) =$$

$$= g(hk + h_1 k_1 + \ldots + h_{\beta_1 - 1} k_{\beta_1 - 1}) = g(hk + h_1 k_1 + \ldots + h_{\alpha_1 - 1} k_{\alpha_1 - 1}) = g \sum_1^h {}_\varrho \sum_1^k {}_\sigma \gamma_{\varrho\sigma}$$

---

[1] Per $h = k = q$, $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, ..., $\alpha_h = \beta_h$ si ottiene $N = g \Sigma h_\varrho^2$. Cfr. M. n. 5, p. 276.

soluzioni linearmente indipendenti; la soluzione generale si ottiene combinando linearmente ed omogeneamente N *soluzioni linearmente indipendenti.*

L' equazione $AX = XA_0$.

13. — Siano ora, sempre nel considerato campo di razionalità R che contiene gli elementi della matrice A, $P_1^{\alpha_{1,1}}, P_1^{\alpha_{1,2}}, \ldots, P_1^{\alpha_{1,p_1}}, P_1^{\alpha_{2,1}}, \ldots, P_2^{\alpha_{2,p_2}}, \ldots, P_m^{\alpha_{m,1}}, \ldots, P_m^{\alpha_{m,p_m}}$ i divisori elementari di $A - E\omega$; indichiamo con $A_{0,i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ la matrice normale relativa ai divisori elementari $P_i^{\alpha_{i,1}}, \ldots, P_i^{\alpha_{i,p_i}}$, e con A_0 la matrice di ordine n

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_{0,1}, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & A_{0,2}, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, & A_{0,m} \end{pmatrix};$$

la $A_0 - E\omega$ ha allora i medesimi divisori elementari della $A - E\omega$, e la A_0 può dirsi *la matrice normale* [1]) *relativa ai suddetti divisori elementari di* A.

Si vede subito che il metodo del n. 11 permette di determinare, in modo razionale, la soluzione generale dell'equazione

$$AX = XA_0. \tag{36}$$

Sia infatti g_i il grado di P_i, e poniamo

$$X = (X_1, X_2, \ldots, X_m),$$

essendo X_i una matrice (incognita) di n righe e di $g_i(\alpha_{i,1} + \alpha_{i,2} + \ldots + \alpha_{i,p_i})$ colonne; la (36) può scriversi allora

$$(AX_1, AX_2, \ldots, AX_m) = (X_1 A_{0,1}, X_2 A_{0,2}, \ldots, X_m A_{0,m}),$$

---

[1]) Si osservi che veramente di tali matrici se ne ha un numero finito, e non una sola, secondo l'ordine in cui si seguono le $A_{0,i}$. Adopreremo non ostante la frase «*la* matrice normale» perchè tale ordine sarà di solito indifferente, ed avremo cura di metterlo in evidenza quando dovrà soddisfare a particolari condizioni.

e si scinde quindi nelle m equazioni

$$AX_i = X_i A_{0,i}, \qquad (i=1,2,\ldots,m);$$

ciascuna di esse, contenendo la sola matrice incognita X_i, ed essendo del tipo studiato al n. 11, può risolversi razionalmente, e risulta così risoluta anche la (36).

Ogni matrice X_i dipende poi, in modo lineare ed omogeneo, da

$$N_i = g_i \sum_1^{p_i}{}_{\varrho,\sigma} \gamma_{i\varrho\sigma}$$

parametri arbitrari, essendo $\gamma_{i\varrho\sigma}$ il minore dei due numeri $\sigma_{i,\varrho}$, $\sigma_{i,\sigma}$; il numero dei parametri che entrano, pure linearmente ed omogeneamente, nella soluzione generale della (36) risulta allora

$$N = N_1 + N_2 + \ldots + N_m.$$

Se supponiamo che sia, per ogni valore di i, $\alpha_{i,1} \geq \alpha_{i,2} \geq \ldots \geq \alpha_{i,p_i}$, facilmente si trova, in questo caso,

$$N_i = g_i \{ \alpha_{i,1} + 3\alpha_{i,2} + \ldots + (2p_i - 1)\alpha_{i,p_i} \};$$

si ha dunque

$$N = \sum_1^m {}_i\, g_i \{ \alpha_{i,1} + 3\alpha_{i,2} + \ldots + (2p_i - 1)\alpha_{i,p_i} \}.$$

Indicando poi con n_r il grado in ω del m. c. d. dei minori di ordine $n-r$ di $A-E\omega$, si ha

$$\sum_1^m {}_i\, g_i \alpha_{i,1} = n_0 - n_1,$$

$$\sum_1^m {}_i\, g_i \alpha_{i,2} = n_1 - n_2, \text{ ecc.},$$

e si ottiene così per il numero N anche l'altra espressione

$$N = n_0 + 2(n_1 + n_2 + \ldots + n_n).$$

Si può richiedere ora se la (36) ammetta soluzioni a determinante diverso da 0, o in altri termini se il determinante $|X|$ della soluzione generale sia una funzione identicamente nulla o no delle N costanti arbitrarie.

Dai nn. 6 (pp. 276-278) e 9 (pp. 281-283) della più volte citata Memoria del sig. prof. NICOLETTI risulta appunto che se ogni matrice parziale X_i si determina mediante un sistema canonico relativo al divisore P_i, la matrice X ha effettivamente il determinante diverso da 0. Il determinante $|X|$ della soluzione generale della (36) non è dunque identicamente nullo, e l'imporre alle costanti arbitrarie la condizione $|X| \neq 0$ non limita il numero delle costanti medesime, onde le soluzioni a determinante diverso da 0 dipendono dallo stesso numero N di costanti arbitrarie, come la soluzione generale.

Dai nn. 11 (pp. 284-285) e 13 (pp. 286-288) di M. risulta poi che la X ottenuta nel modo ora detto, adoperando per ogni P_i il più generale sistema canonico, è la più generale soluzione della (36) a determinante non nullo; e le considerazioni dei nn. 5 (pp. 275-276) e 10 (p. 283) della Memoria medesima offrono il modo di costruire effettivamente tale matrice. Si può invece procedere alla determinazione della soluzione più generale della (36) nel modo detto sopra, ed imporre in ultimo alle costanti arbitrarie la limitazione $|X| \neq 0$.

Nei citati nn. 5 e 10 di M. viene poi determinato, come numero delle costanti arbitrarie che entrano nella più generale soluzione X a determinante non nullo, appunto il numero

$$N = n_0 + 2\,(n_1 + n_2 + \dots + n_n),$$

il che è conforme a ciò che sopra abbiamo detto.

È noto che due matrici A e B (quadrate e del medesimo ordine) si dicono *simili* [1]) se esiste una matrice S, a determinante diverso da 0, per la quale sia $S^{-1}AS = B$, e si dice che la S *riduce la* A *alla* B, o anche *trasforma la* A *nella* B. — Le due matrici A, A_0 sono dunque simili, e la A_0 si suole anche chiamare *la forma normale a cui può ridursi la matrice* A (nel campo R), o semplicemente *la forma normale della matrice* A (nel campo R); le solu-

---

[1]) Cfr. FROBENIUS, *L. S.*, p. 21; MUTH, *Op. cit.*, p. 29.

zioni X della (36) con $|X| \neq 0$ sono tutte e sole le matrici che riducono A alla sua forma normale. Abbiamo dunque: [1])

Se A *è una matrice qualunque ed* A_0 *la sua forma normale (in un determinato campo di razionalità che contiene gli elementi di* A), *e si indicano con* $P_i^{\alpha_{i,1}}$, $P_i^{\alpha_{i,2}}, \ldots, P_i^{\alpha_{i,p_i}}$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ *i divisori elementari di* $A - E\omega$, *e con* $A_{0,i}$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ *le matrici normali relative rispettivamente ai divisori elementari* $P_i^{\alpha_{i,1}}, \ldots, P_i^{\alpha_{i,p_i}}$, *l'equazione*

$$AX = XA_0 \tag{36}$$

può risolversi con operazioni razionali, ponendo $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$, *e determinando ogni* X_i, *col metodo del n. 11, dall'equazione* $AX_i = X_i A_{0,i}$ $(i=1, 2, \ldots, m)$. — *La* (36) *ammette* N *soluzioni linearmente indipendenti, essendo*

$$N = \sum_1^m {}_i\, g_i \{\alpha_{i,1} + 3\alpha_{i,2} + \ldots + (2p_i - 1)\alpha_{i,p_i}\} = n_0 + 2(n_1 + n_2 + \ldots + n_n),$$

dove g_i *è il grado di* P_i, *ed* n_r *indica il grado in* ω *del* m. c. d. *dei minori di ordine* $n-r$ *di* $A - E\omega$; *la soluzione più generale si ha combinando linearmente ed omogeneamente* N *tali soluzioni particolari. Il determinante della soluzione generale non è identicamente nullo, ed imponendo la condizione* $|X| \neq 0$ *si hanno* ∞^N *matrici che sono tutte quelle che riducono* A *alla sua forma normale.*

Risoluzione dell'equazione $AX = XB$.

14. — Veniamo ora all'equazione

$$AX = XB \tag{26}$$

che consideriamo in un campo di razionalità R che contenga gli elementi di A e di B, e sia V una particolare matrice che riduce B alla sua forma normale B_0:

$$V^{-1}BV = B_0\,;$$

[1]) Cfr. il teorema di M., n. 13, p. 288.

dalla (26) si deduce allora

$$AXV = XVB_0,$$

e ponendo

$$Y = XV, \tag{37}$$

$$AY = YB_0; \tag{38}$$

se viceversa Y soddisfa alla (38), la $X = YV^{-1}$ determinata dalla (37) soddisfa alla (26); basta dunque considerare l'equazione (38).

Siano $P_i^{\beta_{i,1}}, P_i^{\beta_{i,2}}, \dots, P_i^{\beta_{i,q_i}}$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ i divisori elementari di $B - E\omega$ nel considerato campo R, e si indichi con $B_{0,i}$ la matrice normale relativa ai divisori elementari $P_i^{\beta_{i,1}}, \dots, P_i^{\beta_{i,q_i}}$, così che sarà

$$B_0 = \begin{pmatrix} B_{0,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{0,2} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & B_{0,m} \end{pmatrix};$$

detto poi n l'ordine di A, g_i il grado di P_i, si ponga

$$Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m),$$

essendo la Y_i una matrice di n righe e $g_i(\beta_{i,1} + \beta_{i,2} + \dots + \beta_{i,q_i})$ colonne. La (38) equivale allora alle m equazioni

$$AY_i = Y_i B_{0,i}, \qquad (i = 1, 2, \dots, m). \tag{39}$$

Ora, per il n. 11, la i^{esima} di queste non ammette che la soluzione nulla se P_i non divide $|A - E\omega|$, mentre se P_i divide $|A - E\omega|$ ammette soluzioni non nulle; la condizione di risolubilità (con matrici non nulle) della (38), e quindi anche della (26), è dunque che le due funzioni $|A - E\omega|$ e $|B_0 - E\omega|$, o $|B - E\omega|$, abbiano divisori comuni, ossia che ammettano un m. c. d. variabile.

Soddisfatta questa condizione, se P_i è un divisore, primo nel campo R, comune alle due funzioni dette, si può dalle (39) determinare razionalmente, secondo il n. 11, la più generale matrice Y_i

che vi soddisfa, la quale dipende, linearmente ed omogeneamente (n. 12), da

$$N_i = g_i \sum_{1}^{p_i}{}_\varrho \sum_{1}^{q_i}{}_\sigma \gamma_{i\varrho\sigma}$$

parametri arbitrari, essendo $P_i^{\alpha_{i,1}}, P_i^{\alpha_{i,2}}, \dots, P_i^{\alpha_{i,p_i}}$ i divisori elementari di $A - E\omega$ relativi a P_i, e $\gamma_{i\varrho\sigma}$ il più piccolo dei numeri $\alpha_{i,\varrho}, \beta_{i,\sigma}$. Se dunque ν è il numero dei divisori primi comuni alle due funzioni $|A - E\omega|$, $|B - E\omega|$, il numero delle costanti arbitrarie da cui dipende la soluzione generale della (26) è data da $N = \sum_1^\nu {}_i \sum_\varrho \sum_\sigma g_i \gamma_{i\varrho\sigma}$. — Di questo numero si può facilmente ottenere un'espressione indipendente dal campo di razionalità R nel quale si opera [1]). Si indichino infatti con $F_1, F_2, F_3, \dots$ i successivi divisori elementari *completi* di $B - E\omega$, si ponga cioè

$$F_1 = P_1^{\alpha_{1,1}} . P_2^{\alpha_{2,1}} \dots P_m^{\alpha_{m,1}}, \quad F_2 = P_1^{\alpha_{1,2}} . P_2^{\alpha_{2,2}} \dots P_m^{\alpha_{m,2}}, \dots,$$

e siano analogamente $E_1, E_2, E_3, \dots$ quelli di $A - E\omega$; il m.c.d. di E_ϱ e di F_σ risulta manifestamente $P_1^{\gamma_{1\varrho\sigma}} . P_2^{\gamma_{2\varrho\sigma}} \dots P_\nu^{\gamma_{\nu\varrho\sigma}}$, e se quindi $\delta_{\varrho\sigma}$ è il grado di tale m. c. d. avremo

$$\delta_{\varrho\sigma} = \sum_1^\nu {}_i \, g_i \gamma_{i\varrho\sigma},$$

onde segue

$$N = \sum_{\varrho, \sigma} \delta_{\varrho\sigma},$$

che è l'espressione voluta.

Abbiamo così il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione

$$(26) \qquad AX = XB$$

ammetta soluzioni non nulle, è che le due funzioni caratteristiche $|A - E\omega|$, $|B - E\omega|$ *ammettano divisori comuni. Se* $P_1, P_2, \dots, P_\nu$

---

[1]) Questa espressione mi fu fatta osservare dal sig. prof. O. NICOLETTI.

sono i divisori, primi in un determinato campo di razionalità R *che contenga gli elementi di* A *e di* B, *comuni alle due dette funzioni,* $P_i^{\alpha_{i,1}}, \ldots, P_i^{\alpha_{i,p_i}}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ *i corrispondenti divisori elementari di* $A - E\omega$, $P_i^{\beta_{i,1}}, \ldots, P_i^{\beta_{i,q_i}}$ *quelli di* $B - E\omega$, *e indichiamo con* $B_{0,i}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ *la matrice normale relativa ai divisori elementari* $P_i^{\beta_{i,1}}, \ldots, P_i^{\beta_{i,q_i}}$, *la soluzione generale della* (26) *si ha dalla formula*

$$X = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_\nu, 0 \ldots 0)\, V^{-1}$$

dove V *è una particolare matrice che riduce* B *alla sua forma normale*

$$B_0 = \begin{Bmatrix} B_{0,1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & B_{0,2} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & B_{0,m} \end{Bmatrix},$$

ed ogni Y_i *si ottiene dall'equazione*

$$AY_i = Y_i B_{0,i}$$

col metodo del n. 11.

La soluzione generale della (26) *dipende linearmente ed omogeneamente da*

$$N = \sum_1^\nu{}_i \sum_1^{p_i}{}_\varrho \sum_1^{q_i}{}_\sigma g_i \gamma_{i\varrho\sigma} = \sum_{\varrho,\sigma} \delta_{\varrho\sigma}$$

costanti arbitrarie, essendo $\gamma_{i\varrho\sigma}$ *il più piccolo dei numeri* $\alpha_{i,\varrho}, \beta_{i,\sigma}$, *e* $\delta_{\varrho\sigma}$ *il grado del* m. c. d. *del* ϱ^{esimo} *divisore elementare completo di* $A - E\omega$ *e del* σ^{esimo} *di* $B - E\omega$. — Si hanno per il numero N anche le espressioni

$$N = \sum_1^\nu{}_i g_i \sum_1^{q_i}{}_\sigma (h^{(i)} + h_1^{(i)} + \ldots + h^{(i)}_{\beta_{i,\sigma}-1}) = \sum_1^\nu{}_i q_i \sum_1^{p_i}{}_\varrho (k^{(i)} + k_1^{(i)} + \ldots + k^{(i)}_{\alpha_{i,\varrho}-1}) =$$

$$= \sum_1^\nu{}_i g_i (h^{(i)} k^{(i)} + h_1^{(i)} k_1^{(i)} + \ldots + h^{(i)}_{\beta_{i,1}-1} k^{(i)}_{\beta_{i,1}-1}) = \sum_1^\nu{}_i g_i (h^{(i)} k^{(i)} + h_1^{(i)} k_1^{(i)} + \ldots + h^{(i)}_{\alpha_{i,1}-1} k^{(i}_{\alpha}$$

essendo $h^{(i)}=p_i$, $h_1^{(i)}$, $h_2^{(i)}$,... i numeri di PREDELLA per il divisore P_i relativi alla matrice A, $k^{(i)}=q_i$, $k_1^{(i)}$, $k_2^{(i)}$,... quelli relativi a B.

15. — Supponiamo ora che A e B siano dello stesso ordine; la matrice incognita X è allora anch'essa quadrata e dello stesso ordine che A e B, e ci possiamo quindi domandare sotto quali condizioni esisteranno soluzioni X a determinante diverso da 0. Se questo accade le due matrici A e B sono simili, e i divisori elementari di $A-E\omega$ sono quindi eguali a quelli di $B-E\omega$ [1]). Ma supponiamo viceversa che questa condizione sia soddisfatta; allora nell'equazione (38) la matrice B_0 non è che la forma normale di A, e quindi effettivamente, per il n. 13, la soluzione generale Y, e perciò ancora la soluzione generale X della (26), avrà il determinante non identicamente nullo. Si ha così il seguente teorema, caso particolare di un teorema di WEIERSTRASS: [2])

Condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione (26) *ammetta soluzioni a determinante diverso da* 0, *cioè perchè due matrici* A *e* B *siano simili, è che le due matrici* $A-E\omega$, $B-E\omega$ *abbiano gli stessi divisori elementari.*

La più generale matrice X *che trasforma la* A *nella matrice simile* B, *cioè per la quale si ha*

$$X^{-1}AX=B,$$

si ottiene determinando la soluzione generale della $AX=XB$, *e imponendo poi alle costanti arbitrarie la condizione* $|X|\neq 0$. *Essa può ottenersi quindi con operazioni razionali dagli elementi delle due matrici* A *e* B, *nel modo che risulta da ciò che sopra è stato detto, e dipende, linearmente ed omogeneamente, da*

$$N=\sum_i g_i(\alpha_{i,1}+3\alpha_{i,2}+5\alpha_{i,3}+\ldots)=n_0+2(n_1+n_2+\ldots+n_n)$$

parametri arbitrari, avendo i simboli g_i, $\alpha_{i,\varrho}$, n_r *il significato detto precedentemente.*

---

[1]) V., ad es., MUTH, *Op. cit.*, p. 252.

[2]) Per la dimostrazione di questo teorema di WEIERSTRASS (sul quale ritorneremo in seguito), e le notizie ad esso relative, si veda la Memoria più volte citata del sig. prof. NICOLETTI.

Le matrici permutabili con una matrice data.

16. — Facendo in particolare, nell'equazione (26), $B = A$ si ottiene da ciò che precede una risoluzione razionale del problema di *determinare tutte le matrici permutabili con una data matrice* A [1]. Basta per questo, secondo ciò che abbiamo visto, trovare (col metodo del n. 13) la soluzione generale dell'equazione

$$\text{(36)}' \qquad AU = UA_0;$$

se U_1 è una soluzione particolare di questa medesima equazione, con $|U_1| \neq 0$, ed U quella generale, la soluzione generale della

$$\text{(40)} \qquad AX = XA$$

si ha poi ponendo

$$X = UU_1^{-1}.$$

Si può anche, invece di determinare la soluzione generale della (36)', determinare quella della

$$\text{(41)} \qquad A_0 Y = YA_0;$$

se Y è questa soluzione si ha

$$\text{(42)} \qquad X = U_1 Y U_1^{-1};$$

facendo infatti la trasformazione $X = U_1 Y U_1^{-1}$ si passa dalla (40) alla (41), e viceversa.

Il numero delle costanti arbitrarie da cui dipende la più generale matrice permutabile con una matrice assegnata A, è dato evidentemente da

$$N = \sum_i g_i (\alpha_{i,1} + 3\alpha_{i,2} + 5\alpha_{i,3} + \ldots) = n_0 + 2(n_1 + n_2 + \ldots + n_n),$$

---

[1] Una risoluzione di questo problema, che presuppone però il teorema fondamentale dell'Algebra, è in Voss, *Ueber die mit einer bilinearen Form vertauschbaren bilinearen Formen* [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der K. bayer. Akad. der Wiss., Bd. XIX (1889), pp. 283-300].

avendo i simboli g_i, $\alpha_{i,\varrho}$, n_r i significati precedentemente definiti, per la matrice A.

17. — Si osservi ora che ogni potenza di A, e più generalmente un aggregato lineare qualunque di potenze di A, è permutabile con A stessa, ma non ogni matrice permutabile con A si potrà in generale esprimere sotto tale forma; vogliamo ricercare appunto le condizioni perchè ogni soluzione della (40) sia un aggregato lineare di potenze di A.

Ricordiamo anzitutto che se indichiamo con $\psi(\omega)$ il quoziente del determinante $|A-E\omega|$ per il m. c. d dei suoi minori di ordine $n-1$, se poniamo cioè, coi simboli adoperati nei n.[i] precedenti

$$\psi(\omega) = P_1^{\alpha_{1,1}} P_2^{\alpha_{2,1}} \ldots P_m^{\alpha_{m,1}},$$

si ha identicamente

$$\psi(A) = 0,$$

mentre le potenze

$$A^0 = E, \ A, \ A^2, \ldots, \ A^{g_1\alpha_{1,1}+g_2\alpha_{2,1}+\ldots+g_m\alpha_{m,1}-1}$$

non sono legate da nessuna relazione lineare a coefficienti numerici [1]). Ne segue che ogni potenza di A, e quindi ogni aggregato lineare di tali potenze, si esprime linearmente, in modo facilmente determinabile, per le prime $g_1\alpha_{1,1}+g_2\alpha_{1,2}+\ldots+g_m\alpha_{m,1}$ potenze ora indicate; ed essendo queste indipendenti, vediamo che gli aggregati lineari di potenze di A danno precisamente e soltanto $g_1\alpha_{1,1}+g_2\alpha_{2,1}+$ $+\ldots+g_m\alpha_{m,1}$ soluzioni linearmente indipendenti della (40). D'altra parte il numero delle soluzioni linearmente indipendenti di questa equazione è

$$\nu=\sum_1^m{}_i\, g_i(\alpha_{i,1}+3\alpha_{i,2}+5\alpha_{i,3}+\ldots)=g_1\alpha_{1,1}+g_2\alpha_{2,1}+\ldots+g_m\alpha_{m,1}+\sum_1^m{}_i\, g_i(3\alpha_{i,2}+5\alpha_{i,3}+\ldots);$$

---

[1]) Per la dimostrazione *razionale* di questo ben noto teorema V. FROBENIUS, *Ueber vertauschbare Matrizen* [Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, zu Berlin, 1896, XXVI, pp. 601-614], p. 606. Cfr. anche FROBENIUS, *L. S.*, pp. 10-11, MUTH, *Op. cit.*, pp. 34-35; la dimostrazione ivi data è però trascendente.

perchè quindi ognuna di tali soluzioni soddisfi alla condizione voluta occorre e basta che sia $\alpha_{i,2}=\gamma_{i,3}=\ldots=0$ $(i=1,2\ldots m)$. Abbiamo così:

Condizione necessaria e sufficiente perchè ogni matrice permutabile con A *sia un aggregato lineare di potenze di* A, *è che ad ogni divisore primo di* $|A-E\omega|$ *corrisponda un solo divisore elementare della matrice* $A-E\omega$; od in altre parole che i minori d'ordine $n-1$ di questa matrice non ammettano alcun divisore (variabile) comune.

Per una matrice *generica* tale condizione è soddisfatta, e si ritrova così un teorema della Memoria del sig. Molien, *Ueber Systeme höherer complexer Zahlen* [Math. Annalen, Bd. XLI (1893), pp. 83-156; p. 122]. — Vediamo anche che i due fatti che una matrice A abbia il massimo numero n di potenze linearmente indipendenti, e che le matrici permutabili con essa siano tutte aggregati lineari delle sue potenze, si presentano simultaneamente.

Avremo in seguito occasione di vedere a quali sistemi di valori delle costanti arbitrarie che figurano nella soluzione generale (42) dell'equazione (40), corrispondano gli aggregati lineari di potenze di A.

Altro metodo di risoluzione dell'equazione $AX=XB$.

18. — Prendiamo di nuovo a considerare l'equazione (26), e vediamo come si possa dare un'altra espressione della sua soluzione generale, note che siano due particolari matrici che riducano rispettivamente le A, B alle loro forme normali A_0, B_0.

Siano, adoperando le stesse notazioni del n. 14, $P_i^{\alpha_{i,1}} \ldots P_i^{\alpha_{i,p_i}}$ $(i=1,2,\ldots,m)$ i divisori elementari di $A-E\omega$, nel solito campo di razionalità R, e $Q_j^{\beta_{j,1}},\ldots, Q_j^{\beta_{j,q_j}}$ $(j=1,2,\ldots,\mu)$ quelli di $B-E\omega$, e indichiamo con $A_{0,i}$ $(i=1,2,\ldots,m)$ la matrice normale relativa ai divisori elementari $P_i^{\alpha_{i,1}},\ldots, P_i^{\alpha_{i,p_i}}$, con $B_{0,j}$ $(j=1,2,\ldots,\mu)$ quella relativa ai $Q_j^{\beta_{j,1}},\ldots, Q_j^{\beta_{j,q_j}}$. Siano poi

$$P_1=Q_1\ ,\ P_2=Q_2\ ,\ldots,\ P_\nu=Q_\nu$$

i divisori primi comuni alle due funzioni $|A-E\omega|$, $|B-E\omega|$. Indichiamo con U, V due particolari matrici che riducano A, B rispettivamente alle loro forme normali

$$A_0 = \begin{Bmatrix} A_{0,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{0,2} & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & A_{0,m} \end{Bmatrix}, \quad B_0 = \begin{Bmatrix} B_{0,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{0,2} & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & B_{0.\mu} \end{Bmatrix},$$

cioè due matrici per le quali si abbia

$$U^{-1}AU = A_0\,,$$

$$V^{-1}BV = B_0\,;$$

ponendo allora

(43) $$X = UYV^{-1}\,,$$

dalla (26) si deduce

(44) $$A_0 Y = YB_0\,,$$

mentre viceversa se Y soddisfa a questa equazione, la X data dalla (43) soddisfa alla (26); ricercando dunque, come ora faremo, la più generale soluzione della (44), avremo dalla (43) la più generale soluzione della (26).

Poniamo perciò

$$Y = \begin{Bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & ,\dots, & Y_{1\mu} \\ Y_{21} & Y_{22} & ,\dots, & Y_{2\mu} \\ . & . & . & . \\ Y_{m1} & Y_{m2} & ,\dots, & Y_{m\mu} \end{Bmatrix},$$

dove Y_{ij} è una matrice incognita di $g_i(\alpha_{i,1}+\dots+\alpha_{i,p_i})$ righe e $\gamma_j(\beta_{j,1}+\dots+\beta_{j,q_j})$ colonne, avendo indicato con g_i il grado di P_i, con γ_j quello di Q_j; la (44) si scinde allora nelle $m\mu$ equazioni

(45) $$A_{0,i}Y_{ij} = Y_{ij}B_{0,j}\,, \quad (i=1\,,2\,,\dots,m\,;\, j=1\,,2\,,\dots,\mu)\,;$$

ma se in esse facciamo $i \neq j$, oppure $i=j>\nu$, le due funzioni

$|A_{0,i} - E\omega|$, $|B_{0,j} - E\omega|$ non hanno divisori comuni; si ha dunque

$$Y_{ij} = 0 \qquad (i \neq j),$$
$$Y_{ii} = 0 \qquad (i > \nu),$$

e ponendo per brevità

$$Y_{ii} = Y_i \qquad (i = 1, 2, \dots, \nu),$$

rimangono le ν equazioni

$$A_{0,i} Y_i = Y_i B_{0,i} \qquad (i = 1, 2, \dots, \nu), \tag{46}$$

ciascuna delle quali contiene una delle matrici incognite Y_i; risolvendo ciascuna di esse si ha poi la soluzione generale della (44) nella forma

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & Y_2 & \dots & 0 & 0 & .. & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & Y_\nu & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & .. & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Consideriamo ora una qualunque delle equazioni (46), e procediamo su di essa in modo analogo a quello tenuto per la (44). Indichiamo con $A_{0,i}^{(\rho)}$ $(\rho = 1, 2, \dots, p_i)$ la matrice normale relativa al divisore elementare $P_i^{\alpha_{i,\rho}}$, con $B_{0,i}^{(\sigma)}$ $(\sigma = 1, 2, \dots, q_i)$ quella relativa a $P_i^{\beta_{i,\sigma}}$, e poniamo

$$Y_i = \begin{pmatrix} Y_{11}^{(i)} & , & Y_{12}^{(i)} & , \dots, & Y_{1q_i}^{(i)} \\ Y_{21}^{(i)} & , & Y_{22}^{(i)} & , \dots, & Y_{2q_i}^{(i)} \\ . & . & . & . & . \\ Y_{p_i 1}^{(i)} & , & Y_{p_i 2}^{(i)} & , \dots, & Y_{p_i q_i}^{(i)} \end{pmatrix}, \tag{48}$$

essendo $Y_{\rho\sigma}^{(i)}$ una matrice (incognita) di $g_i \alpha_{i,\rho}$ righe e $g_i \beta_{i,\sigma}$ colonne. Anche qui ciascuna delle equazioni (46) risulta equivalente al sistema di $p_i\, q_i$ equazioni

$$A^{(\rho)}_{0,i}\, Y^{(i)}_{\rho\sigma} = Y^{(i)}_{\rho\sigma}\, B^{(\sigma)}_{0,i} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, p_i\, ;\ \sigma = 1, 2, \ldots, q_i)\,, \tag{49}$$

ognuna delle quali contiene l'unica matrice incognita $Y^{(i)}_{\rho\sigma}$.

Basta dunque studiare una qualunque delle equazioni (49); dalla soluzione generale di ciascuna di esse si dedurrà mediante le formule (48) e (47) la soluzione generale della (44).

Consideriamo dunque una qualunque delle (49), e supponiamo, per fissare le idee, che sia $\alpha_{i,\rho} \leq \beta_{i,\sigma}$; ricordando il modo nel quale sono state formate le $A^{(\rho)}_{0,i}$, $B^{(\sigma)}_{0,i}$ (V. n. 11), si vede subito allora che quando i assume, come supponiamo, uno dei valori $1, 2, \ldots, \nu$, si ha

$$B^{(\sigma)}_{0,i} = \begin{pmatrix} M & N \\ 0 & A^{(\rho)}_{0,i} \end{pmatrix}$$

essendo M, N due certe matrici, la prima delle quali quadrata e di ordine $g_i\,(\beta_{i,\sigma} - \alpha_{i,\rho})$; si soddisfa dunque evidentemente alla corrispondente equazione (49) ponendo

$$Y^{(i)}_{\rho\sigma} = (0\ ,\ Z^{(i)}_{\rho\sigma})$$

dove $Z^{(i)}_{\rho\sigma}$ è una matrice quadrata di ordine $g_i\,\alpha_{i,\rho}$, soluzione dell'equazione

$$A^{(\rho)}_{0,i}\, Z^{(i)}_{\rho\sigma} = Z^{(i)}_{\rho\sigma}\, A^{(\rho)}_{0,i}\ ;$$

poichè anzi esistono precisamente $g_i\,\alpha_{i,\rho}$ matrici $Z^{(i)}_{\rho\sigma}$ linearmente indipendenti che soddisfano a questa equazione, avremo pure $g_i\,\alpha_{i,\rho}$ matrici $Y^{(i)}_{\rho\sigma}$ linearmente indipendenti, della forma considerata. Ma l'equazione (49) ammette appunto soltanto $g_i\,\alpha_{i,\rho}$ soluzioni linearmente indipendenti; ne segue che in ogni soluzione della (49) sono nulle le prime $g_i\,(\beta_{i,\sigma} - \alpha_{i,\rho})$ colonne, e la soluzione medesima è quindi della forma suddetta.

Se si fosse invece supposto $\alpha_{i,\rho} \geq \beta_{i,\sigma}$, si sarebbe trovato analogamente che la soluzione generale della corrispondente equazione

(49) ha nulle le ultime $g_i(\alpha_{i,\varrho}-\beta_{i,\sigma})$ righe, e la matrice quadrata costituita dalle righe residue è la più generale matrice permutabile con la $B_{0,i}^{(\sigma)}$ [1]).

Sapendosi ora, per il n. 16, determinare la più generale matrice permutabile con una matrice assegnata, sono così completamente caratterizzate le soluzioni della (49). Per esprimere la cosa in generale si indichi con $C_{0,i}^{(\varrho,\sigma)}$ quella delle due matrici $A_{0,i}^{(\varrho)}$, $B_{0,i}^{(\sigma)}$ che è di ordine minore, ossia la matrice normale relativa al divisore elementare $P_i^{\gamma_{i\varrho\sigma}}$, e si osservi che tale matrice $C_{0,i}^{(\varrho,\sigma)}$ è manifestamente nelle condizioni del teorema del n. 17; abbiamo così:

La soluzione generale dell'equazione (44) *si ottiene dalle formule* (47), (48), *nell'ultima delle quali ogni matrice* $Y_{\varrho\sigma}^{(i)}$ *ha nulle le prime* $g_i(\beta_{i,\sigma}-\alpha_{i,\varrho})$ *colonne, o le ultime* $g_i(\alpha_{i,\varrho}-\beta_{i,\sigma})$ *righe, secondo che è* $\beta_{i,\sigma}\geq\alpha_{i,\varrho}$, $\alpha_{i,\varrho}\geq\beta_{i,\sigma}$, *mentre la matrice quadrata* $Z_{\varrho\sigma}^{(i)}$ *formata con le rimanenti* $\gamma_{i\varrho\sigma}$ *righe o colonne è la più generale matrice permutabile con* $C_{0,i}^{(\varrho,\sigma)}$ *ed è quindi data dalla formula*

$$Z_{\varrho\sigma}^{(i)}=a_{i\varrho\sigma}^{(0)}E+a_{i\varrho\sigma}^{(1)}C_{0,i}^{(\varrho,\sigma)}+a_{i\varrho\sigma}^{(2)}C_{0,i}^{(\varrho,\sigma)2}+\ldots+a_{i\varrho\sigma}^{(g_i\gamma_{i\varrho\sigma}-1)}C_{0,i}^{(\varrho,\sigma)g_i\gamma_{i\varrho\sigma}-1},$$

dove le $a_{i\varrho\sigma}^{(0)}$, $a_{i\varrho\sigma}^{(1)}$, ... *indicano costanti arbitrarie.*

---

[1]) I ragionamenti ora fatti provano più generalmente, con poche modificazioni subito evidenti, che se $B_0^{(\sigma)}$ è la matrice normale relativa a un certo divisore elementare P^{β_σ}, e P^{α_1}, P^{α_2}, ..., ($\alpha_1\geq\alpha_2\geq\ldots$), sono i divisori elementari, relativi al divisore P, di una certa matrice $A-E\omega$, ed è $\alpha_1\leq\beta_\sigma$, nella più generale soluzione X dell'equazione $AX=XB_0^{(\sigma)}$ sono nulle le prime $g(\beta_\sigma-\alpha_1)$ colonne, essendo g il grado di P; e che nella più generale soluzione Y della $B_0^{(\sigma)}Y=YA$ sono invece nulle le ultime $g(\beta_\sigma-\alpha_1)$ righe. Per quest'ultima proprietà converrà scrivere $B_0^{(\sigma)}$ nella forma $\begin{pmatrix}A_0^{(\sigma)} & N\\ 0 & M\end{pmatrix}$. — La prima di queste proposizioni risulta direttamente anche dal metodo esposto nel n. 11 per la risoluzione della $AX=XB_0$, ricordando quanto abbiamo osservato relativamente alla formula (30) del n. 10. — È poi chiaro come ambedue queste osservazioni siano applicabili all'equazione (49) e diano appunto le proprietà enunciate nel testo.

Osserviamo ancora che ogni matrice $Z^{(i)}_{\varrho\sigma}$ è della forma

$$\begin{pmatrix} \overline{Z}_1 & \overline{Z}_2 & \overline{Z}_3 & \dots & \overline{Z}_{\gamma_{i\varrho\sigma}} \\ 0 & \overline{Z}_1 & \overline{Z}_2 & \dots & \overline{Z}_{\gamma_{i\varrho\sigma}-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \overline{Z}_1 \end{pmatrix},$$

dove ogni $\overline{Z}_1, \overline{Z}_2, \dots, \overline{Z}_{\gamma_{i\varrho\sigma}}$ è di ordine g_i; tale infatti è la forma di $C^{(\varrho,\sigma)}_{0,i}$, ed è evidente d'altra parte che il prodotto e la somma di due o più matrici di questa forma ha ancora la medesima forma.

19. — Le considerazioni precedenti danno in particolare un altro metodo per determinare la più generale matrice Y permutabile con una matrice data A_0 di forma normale; si ottiene così anche (cfr. n. 16), mediante la formula (42), la più generale matrice permutabile con una matrice qualunque A, nota che sia una particolare matrice U_1 che riduce A alla sua forma normale A_0.

È facile anzi, da ciò che precede, trovare un'espressione della soluzione generale Y della $A_0 Y = Y A_0$, nella quale siano messi in evidenza gli aggregati lineari di potenze di A_0. Sia infatti Y una soluzione della detta equazione, e si abbia, mantenendo tutte le notazioni del n.° precedente:

$$(47)' \qquad Y = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Y_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & Y_m \end{pmatrix},$$

$$(48)' \qquad Y_i = \begin{pmatrix} Y^{(i)}_{11}, & Y^{(i)}_{12}, & \dots & Y^{(i)}_{1p_i} \\ Y^{(i)}_{21}, & Y^{(i)}_{22}, & \dots & Y^{(i)}_{2p_i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y^{(i)}_{p_i1}, & Y^{(i)}_{p_i2}, & \dots & Y^{(i)}_{p_ip_i} \end{pmatrix}, \quad (i=1,2,\dots,m).$$

Ciascuna delle m matrici $Y^{(i)}_{11}$ $(i=1,2,\dots,m)$ soddisfa alla corrispondente equazione

$$A^{(1)}_{0,i}\, Y^{(i)}_{11} = Y^{(i)}_{11}\, A^{(1)}_{0,i}\,;$$

si ha dunque

$$\begin{pmatrix} A^{(1)}_{0,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A^{(1)}_{0,2} & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & A^{(1)}_{0,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^{(1)}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Y^{(2)}_{11} & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & Y^{(m)}_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y^{(1)}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Y^{(2)}_{11} & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & Y^{(m)}_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{(1)}_{0,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A^{(1)}_{0,2} & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & A^{(1)}_{0,m} \end{pmatrix}$$

e poichè la matrice

$$(50) \qquad \begin{pmatrix} A^{(1)}_{0,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A^{(1)}_{0,2} & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & A^{(1)}_{0,m} \end{pmatrix}$$

si trova evidentemente nelle condizioni del teorema del n. 17, la

$$\begin{pmatrix} Y^{(1)}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Y^{(2)}_{11} & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & Y^{(m)}_{11} \end{pmatrix}$$

risulta un aggregato lineare di potenze della matrice (50). Le potenze indipendenti di tale matrice essendo in numero di $\alpha = g_1\alpha_{1,1} + g_2\alpha_{2,1} + \dots + g_m\alpha_{m,1}$, vediamo dunque che esiste un sistema di valori $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{\alpha-1}$, ed uno solo, per il quale si ha, per ogni valore di i da 1 ad m,

$$Y^{(i)}_{11} = \sum_{0}^{\alpha-1}{}_r\, \lambda_r\, A^{(1)^r}_{0,i}\,.$$

Indichiamo d'altra parte con $\overline{Y}$ quella matrice che si ottiene dalla più generale matrice permutabile con A_0, facendovi $Y^{(i)}_{11} = 0$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, il che individua le costanti che entrano nella $Y^{(i)}_{11}$, e lasciando completamente arbitrarie le costanti relative alle altre matrici parziali. I valori λ_r sopra determinati sono allora tali che, per la matrice Y considerata, la differenza $Y - \sum_{0}^{\alpha-1}{}_r \lambda_r A_0^r$ è della forma $\overline{Y}$.

Abbiamo così che per ogni matrice Y permutabile con A_0, esiste una ed una sola $\overline{Y}$, ed uno ed un solo sistema di valori $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\alpha-1}$, pei quali si ha

$$(51) \qquad Y = \sum_{0}^{\alpha-1}{}_r\, \lambda_r\, A_0^r + \overline{Y};$$

e viceversa, presi ad arbitrio i λ_r e la $\overline{Y}$, la matrice Y definita da questa formula è permutabile con A_0. È poi evidente che ogni matrice della forma $\overline{Y}$ (non nulla) *non* è un aggregato di potenze di A_0; eguagliando infatti ad $\overline{Y}$ un tale aggregato $\Sigma \mu_r A_0^r$, si ottiene $\Sigma \mu_r A_{0,i}^{(1)r} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, e quindi $\Sigma \mu_r A_0^r = 0$, onde $\mu_0 = \mu_1 = \ldots = \mu_{\alpha-1} = 0$.

La formula (51) *mette dunque in evidenza, come volevamo, le potenze della matrice* A_0 *nell'espressione della più generale matrice permutabile con* A_0 *stessa;* ricordando la (42) (n. 16) possiamo aggiungere che *se* U_1 *è una particolare matrice che riduce* A *alla sua forma normale, la formula*

$$X = \sum_{0}^{\alpha-1}{}_r\, \lambda_r A^r + U_1 \overline{Y} U_1^{-1}$$

compie per la matrice A *lo stesso ufficio che la* (51) *per la* A_0.

Le caratteristiche delle soluzioni dell'equazione AX=XB.

20. - La forma data al n. 18 per la soluzione generale dell'equazione $AX = XB$ permette di risolvere la questione seguente. Per ogni sistema di valori delle costanti arbitrarie che entrano nella soluzione generale X della suddetta equazione, la X stessa avrà una certa caratteristica, e questa caratteristica potrà variare col sistema di valori scelto; quali saranno le varie caratteristiche che verrà ad avere la X, quando le costanti arbitrarie variano comunque *nel considerato campo di razionalità* R? In particolare, quale sarà la massima caratteristica delle soluzioni della $AX = XB$?

Dimostriamo, riguardo a ciò, il teorema seguente:

Mantenendo tutte le notazioni del n. 18, e dicendo inoltre π_i *il più piccolo dei numeri* p_i, q_i $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$, *la condizione ne-*

cessaria e sufficiente perchè esistano, nel campo di razionalità R, *soluzioni della* $AX = XB$, *aventi una certa caratteristica* r, *è che questo numero* r *sia della forma*

$$r = l_1 g_1 + l_2 g_2 + \dots + l_\nu g_\nu ,$$

dove ogni l_i *è un numero intero che soddisfa alla limitazione*

$$0 \leq l_i \leq \gamma_{i11} + \gamma_{i22} + \dots + \gamma_{i\pi_i \pi_i} \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, \nu).$$

In particolare la massima caratteristica delle soluzioni della $AX = XB$ *è data da*

$$\sum_1^\nu {}_i (\gamma_{i11} + \gamma_{i22} + \dots + \gamma_{i\pi_i \pi_i}) g_i = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + \dots$$

L'ultima proprietà è evidentemente indipendente dal campo di razionalità che si considera.

Per maggior chiarezza dividiamo in due parti la dimostrazione di questo teorema, dimostrandolo dapprima per una qualunque delle equazioni (49).

1.° Si tratta di provare in tal caso che *le caratteristiche delle varie soluzioni della* (49) *sono precisamente i multipli di* g_i

$$0 \ , \ g_i \ , \ 2g_i \ , \dots , \ \gamma_{i\varrho\sigma} g_i \ ,$$

l'ultimo dei quali rappresenta la massima caratteristica.

Quest'ultima asserzione è evidente: adoperando tutte le notazioni del suddetto n. 18, la $Z^{(i)}_{\varrho\sigma}$ dovendo solo esser permutabile con $C^{(\varrho,\sigma)}_{0,i}$, può infatti scegliersi a determinante diverso da 0, e quindi di caratteristica $\gamma_{i\varrho\sigma} g_i$, e d'altra parte la $Y^{(i)}_{\varrho\sigma}$ ha la medesima caratteristica della $Z^{(i)}_{\varrho\sigma}$ in quanto che differisce da essa solo per l'aggiunta di righe o colonne di elementi nulli.

Si vede pure facilmente che esistono soluzioni della (49) (nel campo R) la cui caratteristica è $l g_i$ $(0 \leq l < \gamma_{i\varrho\sigma})$. Si indichi perciò con $C^{(l)}_{0,i}$ la matrice normale relativa al divisore elementare P^l_i, e si osservi che, per la forma che hanno le matrici normali, può scriversi

$$C_{0,i}^{(\varrho,\sigma)} = \begin{pmatrix} C_{0,i}^{(l)} & N \\ 0 & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & N' \\ 0 & C_{0,i}^{(l)} \end{pmatrix},$$

essendo le M, N, N' opportune matrici; se allora indichiamo con $Z_l^{(i)}$ una qualunque matrice permutabile con $C_{0,i}^{(l)}$ vediamo subito che può soddisfarsi all'equazione

$$C_{0,i}^{(\varrho,\sigma)} Z_{\varrho\sigma}^{(i)} = Z_{\varrho\sigma}^{(i)} C_{0,i}^{(\varrho,\sigma)},$$

ossia alla

$$\begin{pmatrix} C_{0,i}^{(l)} & N \\ 0 & M \end{pmatrix} Z_{\varrho\sigma}^{(i)} = Z_{\varrho\sigma}^{(i)} \begin{pmatrix} M & N' \\ 0 & C_{0,i}^{(l)} \end{pmatrix},$$

ponendo

$$Z_{\varrho\sigma}^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & Z_l^{(i)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se scegliamo quindi, come è possibile, la $Z_l^{(i)}$ a determinante diverso da 0, otteniamo appunto una soluzione $Z_{\varrho\sigma}^{(i)}$ di caratteristica lg_i.

Rimane dunque, per l'equazione (49), da dimostrare solo che ogni sua soluzione (nel campo R) ha necessariamente una caratteristica multipla di g_i. — Cominciamo dal provare ciò per il caso che sia $\alpha_\varrho = \beta_\sigma = 1$, cioè per un'equazione del tipo

$$HW = WH,$$

dove si è posto

$$H = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_g & -a_{g-1} & -a_{g-2} & \dots & -a_1 \end{Bmatrix},$$

essendo

$$P = \omega^g + a_1 \omega^{g-1} + \dots + a_{g-1}\omega + a_g$$

un polinomio primo in R, e W è la matrice incognita.

La risoluzione di questa equazione si ottiene, secondo il n. 11, per mezzo della soluzione più generale del sistema di congruenze

$$\sum_{1}^{g}{}_{j}\, c_{ij}\, W_j \equiv 0 \pmod{P} \quad , \quad (i = 1,2,\ldots,g)$$

dove si è posto

$$(c_{ij}) = D = H - E\omega \quad , \quad (i,j = 1,2,\ldots,g).$$

Occorre quindi anzitutto considerare un sistema canonico di soluzioni per le righe di $H - E\omega$, sistema che si riduce in questo caso ad una soluzione sola, nella quale una almeno delle $W_1, W_2, \ldots, W_g$ non sia divisibile per P; una tale soluzione può determinarsi, ad es., col metodo ricordato ai n.[i] 9 e 10, e indichiamola con $\overline{W}_1, \overline{W}_2, \ldots, \overline{W}_g$. La soluzione più generale del considerato sistema di congruenze è allora, secondo la formula (30),

$$W_j \equiv M(\omega)\, \overline{W}_j \pmod{P} \qquad (j = 1,2,\ldots,g)$$

dove $M(\omega)$ è un polinomio arbitrario di grado $g-1$, e se vogliamo che la soluzione stessa appartenga ad R, i coefficienti di $M(\omega)$ debbono pure appartenere ad R. Se ora è, ad es. $\overline{W}_s \not\equiv 0 \pmod{P}$, è anche $M(\omega)\,\overline{W}_s \not\equiv 0 \pmod{P}$, eccetto che si abbia identicamente $M(\omega) = 0$; ne segue che ogni soluzione del considerato sistema di congruenze, che non sia la soluzione nulla, è una soluzione canonica per le righe di $H - E\omega$, e quindi (n. 13) la corrispondente soluzione dell'equazione $HW = WH$ ha il determinante diverso da 0. Questa equazione non ammette dunque effettivamente, nel campo di razionalità R, che soluzioni di caratteristica 0 o di caratteristica g.

Ritornando all'equazione (49), è facile ora dimostrare, per induzione, che ogni soluzione dell'equazione

$$C_{0,i}^{(\varrho,\sigma)}\, Z_{\varrho\sigma}^{(i)} = Z_{\varrho\sigma}^{(i)}\, C_{0,i}^{(\varrho,\sigma)}$$

(e quindi ogni soluzione della (49)) ha una caratteristica multipla di g_i. — Ogni tale matrice $Z_{\varrho\sigma}^{(i)}$ è infatti, per l'ultima osservazione del n. 18, della forma

$$Z_{\varrho\sigma}^{(i)} = \begin{pmatrix} \overline{Z}_1 & \overline{Z}_2 & \overline{Z}_3 & \dots & \overline{Z}_{\gamma_{i\varrho\sigma}} \\ 0 & \overline{Z}_1 & \overline{Z}_2 & \dots & \overline{Z}_{\gamma_{i\varrho\sigma}-1} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \overline{Z}_1 \end{pmatrix}$$

dove ogni $\overline{Z}_1, \overline{Z}_2, \dots, \overline{Z}_{\gamma_{i\varrho\sigma}}$ è una matrice dell'ordine g_i; dall'equazione a cui soddisfa $Z_{\varrho\sigma}^{(i)}$ segue allora evidentemente

$$H\overline{Z}_1 = \overline{Z}_1 H,$$

e quindi o $|\overline{Z}_1| \neq 0$ o $\overline{Z}_1 = 0$. Nel primo caso è anche $|Z_{\varrho\sigma}^{(i)}| \neq 0$, e quindi la cosa è conforme all'enunciato; nel secondo caso poi la matrice residua

$$\begin{pmatrix} \overline{Z}_2 & \overline{Z}_3 & \dots & \overline{Z}_{\gamma_{i\varrho\sigma}} \\ 0 & \overline{Z}_2 & \dots & \overline{Z}_{\gamma_{i\varrho\sigma}-1} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \overline{Z}_2 \end{pmatrix}$$

risulta manifestamente, per osservazioni fatte poco fa, permutabile con la matrice normale relativa ai divisori elementari $P_i^{\gamma_{i\varrho\sigma}-1}$; se dunque ammettiamo che per quest'ultima matrice il teorema valga, esso vale sempre.

Da ciò che abbiamo detto risulta anche che ogni soluzione dell'equazione (49) è del tipo $\begin{pmatrix} 0 & Z_l^{(i)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dove $Z_l^{(i)}$ è permutabile con la matrice normale relativa al divisore elementare P_i^l $(l \leq \gamma_{i\varrho\sigma})$, *ed ha il determinante diverso da* 0.

2.° Passiamo ora a dimostrare il teorema in questione per una delle equazioni (46)

(46) $$A_{0,i} Y_i = Y_i B_{0,i};$$

quando tale dimostrazione sarà fatta, la formula (47) mostra subito che la proprietà in discorso vale per l'equazione $A_0 Y = Y B_0$, e quindi evidentemente per la $AX = XB$.

Ricordiamo la formula (48) che scriveremo omettendo per brevità l'indice i nelle matrici $Y^{(i)}_{\varrho\sigma}$; essa è

$$(48)'' \qquad Y_i = \begin{Bmatrix} Y_{11} \,, & Y_{12} \,, & \ldots & Y_{1q_i} \\ Y_{21} \,, & Y_{22} \,, & \ldots & Y_{2q_i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_{p_i 1} \,, & Y_{p_i 2} \,, & \ldots & Y_{p_i q_i} \end{Bmatrix},$$

ed ogni $Y_{\varrho\sigma}$ soddisfa alla relazione $A^{(\varrho)}_{0,i} Y_{\varrho\sigma} = Y_{\varrho\sigma} B^{(\sigma)}_{0,i}$.

Si vede subito, intanto, che esistono effettivamente soluzioni della (46) aventi una qualunque caratteristica prefissata $l g_i$ con $0 \leq l \leq \gamma_{i11} + \ldots + \gamma_{i\pi_i\pi_i}$; basta infatti prendere $Y_{\varrho\sigma} = 0$ per $\varrho \neq \sigma$, e scegliere poi le $Y_{11}, Y_{22}, \ldots, Y_{\pi_i\pi_i}$ in modo che abbiano convenienti caratteristiche (necessariamente multiple di g_i).

Dimostriamo ora che ogni soluzione della (46) ha una caratteristica multipla di g_i.

Procederemo anche qui per induzione, ammettendo che la proprietà valga per un'equazione del medesimo tipo (46), ma nella quale i divisori elementari relativi alle matrici note del primo e del secondo membro, in luogo di essere rispettivamente in numero di p_i e q_i, siano rispettivamente in numero di $p_i - 1$, $q_i - 1$. Poichè il procedimento che seguiremo dimostrerà anche che la proprietà enunciata vale quando uno qualunque dei numeri p_i e q_i è uguale ad 1, la cosa risulterà dimostrata in generale.

Supponiamo dunque dapprima che uno dei due numeri, ad es. q_i, possa anche essere uguale ad 1, mentre sia $p_i > 1$.

Consideriamo una qualunque soluzione (48)'' della nostra equazione (46), e sia $\lambda_{\varrho\sigma} g_i$ la caratteristica della matrice parziale $Y_{\varrho\sigma}$ ($\varrho = 1, 2, \ldots, p_i$; $\sigma = 1, 2, \ldots, q_i$); in ogni tale matrice $Y_{\varrho\sigma}$ sono allora nulle, come abbiamo osservato poco fa, le prime $g_i(\beta_{i,\sigma} - \lambda_{\varrho\sigma})$ colonne e le ultime $g_i(\alpha_{i,\varrho} - \lambda_{\varrho\sigma})$ righe, e la matrice residua $Z^{(i)}_{\lambda_{\varrho\sigma}}$

ha il determinante diverso da 0, ed è permutabile con la matrice normale relativa al divisore elementare $P_i^{\lambda_{\varrho\sigma}}$. Sia $\lambda_{rs}=\lambda$ il massimo dei $p_i q_i$ numeri $\lambda_{\varrho\sigma}$, e corrispondentemente ad ogni $Y_{\varrho\sigma}$ $(\rho=1,2,\dots,p_i\,;\ \sigma=1,2,\dots,q_i)$ consideriamo la seguente matrice quadrata, di ordine λg_i,

$$Z'_{\varrho\sigma}=\begin{pmatrix}0 & Z^{(i)}_{\lambda_{\varrho\sigma}}\\ 0 & 0\end{pmatrix};$$

ogni tale $Z'_{\varrho\sigma}$ è evidentemente permutabile con la matrice normale relativa al divisore elementare P_i^{λ}, e si ha, per $\rho=r,\sigma=s$, $|Z'_{rs}|\neq 0$. È chiaro inoltre, per ciò che or ora abbiamo ricordato, che la matrice

$$Y'_i=\begin{pmatrix} Z'_{11}, & Z'_{12}, & \dots, & Z'_{1q_i}\\ Z'_{21}, & Z'_{22}, & \dots, & Z'_{2q_i}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ Z'_{p_i1}, & Z'_{p_i2}, & \dots, & Z'_{p_iq_i}\end{pmatrix}$$

si ottiene dalla Y_i sopprimendo od aggiungendo semplicemente delle linee nulle, onde essa ha la stessa caratteristica della Y_i; basterà quindi in luogo della Y_i considerare tale matrice Y'_i.

Sottragghiamo ora, nella Y'_i, da ognuna delle matrici parziali

$$(Z'_{\varrho1}, Z'_{\varrho2},\dots, Z'_{\varrho q_i})\qquad (\rho=1,2,\dots,r-1,r+1,\dots,p_i)$$

l'altra

$$(Z'_{r1}, Z'_{r2},\dots, Z'_{rq_i})$$

moltiplicata per $Z'^{-1}_{rs} Z'_{\varrho s}$; con questo la caratteristica rimane inalterata, e la nuova matrice che si ottiene è

$$Y'^*_i=\begin{pmatrix} Z'^*_{1,1} & \dots & Z'^*_{1,s-1} & 0 & Z'^*_{1,s+1} & \dots & Z'^*_{1,q_i}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ Z'^*_{r-1,1} & \dots & Z'^*_{r-1,s-1} & 0 & Z'^*_{r-1,s+1} & \dots & Z'^*_{r-1,q_i}\\ Z'^*_{r,1} & \dots & Z'^*_{r,s-1} & Z'_{r,s} & Z'^*_{r,s+1} & \dots & Z'^*_{r,q_i}\\ Z'^*_{r+1,1} & \dots & Z'^*_{r+1,s-1} & 0 & Z'^*_{r+1,s+1} & \dots & Z'^*_{r+1,q_i}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ Z'^*_{p_i,1} & \dots & Z'^*_{p_i,s-1} & 0 & Z'^*_{p_i,s+1} & \dots & Z'^*_{p_i,q_i}\end{pmatrix},$$

avendo posto

$$Z'^{*}_{\varrho\sigma} = Z'_{\varrho\sigma} - Z'_{r\sigma} Z'^{-1}_{rs} Z'_{\varrho s}$$

$$(\varrho = 1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, p_i\,;\ \sigma = 1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, q_i).$$

Si vede quindi intanto che nel caso che sia $q_i = 1$ la matrice Y'^{*}_{i}, che si riduce alla

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ Z'_{rs} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix},$$

ha la caratteristica $\geq g_i$, onde in tal caso la proprietà in questione è dimostrata. Sia dunque $q_i > 1$.

Poichè ogni matrice $Z'_{\varrho\sigma}$ è permutabile con la matrice normale relativa al divisore elementare $P_i^{\lambda\gamma_i}$, matrice normale che indicheremo con $C^{(\lambda)}_{0,i}$, segue evidentemente che altrettanto accade per ogni matrice $Z'^{*}_{\varrho\sigma}$, onde si ha

$$C^{(\lambda)}_{0,i} Z'^{*}_{\varrho\sigma} = Z'^{*}_{\varrho\sigma} C^{(\lambda)}_{0,i},$$

$$(\varrho = 1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, p_i\,;\ \sigma = 1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, q_i).$$

Indicando allora con C_1, C_2 due matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} C^{(\lambda)}_{0,i} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & C^{(\lambda)}_{0,i} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & C^{(\lambda)}_{0,i} \end{pmatrix},$$

ma nella prima delle quali le matrici $C^{(\lambda)}_{0,i}$ che vi compaiono siano

$p_i - 1$, nella seconda $q_i - 1$, si ha infine che la matrice

$$Y'^{**}_i = (Z'^{*}_{\varrho\sigma})$$

$$(\varrho = 1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, p_i\,;\ \sigma = 1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, q_i)$$

soddisfa all' equazione

$$C_1 Y'^{**}_i = Y'^{**}_i C_2 .$$

Poichè quest'equazione è appunto del tipo (46), ma i divisori elementari di $C_1 - E\omega$, $C_2 - E\omega$ sono rispettivamente $p_i - 1$, $q_i - 1$, segue di qui che, per la fatta ipotesi, la caratteristica di Y'^{**}_i è multipla di g_i; e poichè quella della Y'^{*}_i, e quindi quella della Y_i si ottiene da questa aggiungendovi la caratteristica di Z'_{rs}, anch'essa è multipla di g_i, come volevamo provare.

Rimane infine da dimostrare che la massima caratteristica delle soluzioni Y_i della (46) è data da $(\gamma_{i11} + \ldots + \gamma_{i\pi_i\pi_i}) g_i$. Si osservi perciò che per determinare tale massima caratteristica può supporsi di operare su una soluzione Y_i della (46), per la quale la Y_{11} abbia la massima caratteristica γ_{i11}, onde il numero λ della dimostrazione superiore sarà uguale appunto a γ_{i11}. Il procedimento stesso di sopra dimostra allora, sempre operando per induzione, che la caratteristica massima di Y_i è data appunto da $\gamma_{i11} g_i + (\gamma_{i22} + \ldots + \gamma_{i\pi_i\pi_i}) g_i$.

Il teorema enunciato è così completamente dimostrato.

21. — Dal teorema del n.° precedente seguono subito le condizioni necessarie e sufficienti perchè esistano soluzioni della (26) aventi la massima caratteristica compatibile col numero delle loro righe e delle loro colonne. — Supponiamo, per fissare le idee, che l'ordine di A sia minore od eguale a quello di B; poichè l'ordine di A dà il numero delle righe della soluzione X della (26), e l'ordine di B quello delle colonne, vediamo che la condizione necessaria e sufficiente perchè il fatto voluto si verifichi è che la massima caratteristica delle soluzioni X sia uguale appunto all'ordine di A, ossia che si abbia, con le notazioni precedenti

$$\sum_1^{\nu}{}_i\, g_i (\gamma_{i11} + \cdots + \gamma_{i\pi_i\pi_i}) = \sum_1^{m}{}_i\, g_i (a_{i,1} + \ldots + a_{i,p_i}) .$$

Poichè è

$$\nu \leq m \ , \ \pi_i \leq p_i \ , \ \gamma_{i\varrho} \leq \alpha_{i,\varrho} \ , \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu ; \rho = 1, 2, \ldots, \pi_i)$$

questo porta evidentemente che sia

$$\nu = m \ , \ \pi_i = p_i \ , \ \gamma_{i\varrho} = \alpha_{i,\varrho} \ , \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu ; \rho = 1, 2, \ldots, p_i) ;$$

ne segue che tutti i divisori primi distinti di $|A - E\omega|$, devono dividere $|B - E\omega|$, e che si deve avere poi

$$p_i \leq q_i \ , \ \alpha_{i,\varrho} \leq \beta_{i,\varrho} \ , \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu ; \rho = 1, 2, \ldots, p_i).$$

Supposte, inversamente, soddisfatte queste condizioni, si ha manifestamente

$$\sum_1^\nu {}_i \, g_i (\gamma_{i1} + \ldots + \gamma_{i\pi_i \pi_i}) = \sum_1^m {}_i \, g_i (\alpha_{i,1} + \ldots + \alpha_{i,p_i}),$$

e si verifica quindi il fatto voluto. — Considerazioni analoghe valgono per il caso che l'ordine di B sia minore od uguale a quello di A; abbiamo così:

Condizione necessaria e sufficiente perchè esistano soluzioni della (26) *aventi la massima caratteristica compatibile col numero delle loro righe e delle loro colonne, è che, se l'ordine di* A *è* $\leq$ *(oppure* $\geq$*) a quello di* B, *tutti i divisori primi distinti di* $|A - E\omega|$ *(oppure di* $|B - E\omega|$*) dividano* $|B - E\omega|$ *(risp.* $|A - E\omega|$*), e che per ogni tale divisore il numero dei divisori elementari della matrice* $A - E\omega$ *(risp.* $B - E\omega$*) sia minore od uguale a quello relativo a* $B - E\omega$ *(risp.* $A - E\omega$*), e gli esponenti dei primi siano ordinatamente minori od eguali a quelli dei secondi.*

Se l'ordine di A è uguale a quello di B, segue di qui che la condizione perchè esistano soluzioni della (26) a determinante diverso da 0 è che sia

$$\alpha_{i,\varrho} = \beta_{i,\varrho} \ , \quad (i = 1, 2, \ldots, m ; \rho = 1, 2, \ldots, p_i)$$

e si ritrova così il teorema (di Weierstrass) di cui al n. 15.

Esempio numerico.

22. — Diamo ora un esempio della teoria svolta nei n.[i] precedenti, risolvendo l'equazione

$$\begin{Bmatrix} -7 & 10 & 6 \\ -8 & 10 & 6 \\ 3 & -2 & -1 \end{Bmatrix} X = X \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 6 & -2 & 3 \end{Bmatrix}$$

nel campo dei numeri razionali. — Indichiamo con A la matrice nota del primo membro, con B quella del secondo; si trova immediatamente

$$|A-E\omega| = -\omega^3+2\omega^2-\omega+2 = -(\omega^2+1)(\omega-2)$$
$$|B-E\omega| = -\omega^5+3\omega^4-2\omega^3+6\omega^2-\omega+3 = -(\omega^2+1)^2(\omega-3);$$

l'equazione ammette dunque soluzioni. Ponendo inoltre

$$C = |A-E\omega| = |c_{ij}| \ , \quad (i, j = 1, 2, 3)$$
$$D = |B-E\omega| = |d_{rs}| \ , \quad (r, s = 1, 2, 3, 4, 5)$$

si ha

$$\frac{\partial C}{\partial c_{31}} = 6\omega \ , \ \frac{\partial D}{\partial d_{51}} = 1 \ ;$$

onde vediamo che i divisori elementari, nel campo razionale, di $A-E\omega$ sono ω^2+1, $\omega-2$, quelli di $B-E\omega$ $(\omega^2+1)^2$, $\omega-3$; di più i due minori $\frac{\partial C}{\partial c_{31}}$, $\frac{\partial D}{\partial d_{51}}$ sono *regolari* risp. per le due matrici.

È dunque

$$\nu=1 \ , \ p_1=1 \ , \ q_1=1 \ , \ \pi_1=1 \ , \ g_1=2 \ , \ \alpha_1=1 \ , \ \beta_1=2 \ , \ N=2 \ ;$$

esistono quindi ∞^2 soluzioni, ed ognuna di esse ha, *con le costanti razionali*, o la caratteristica 0 o la caratteristica 2.

La forma normale di B è

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

ed occorre determinare una particolare matrice V per la quale sia $V^{-1}BV = B_0$. Si calcolino perciò (cfr. n.[i] 9 e 10) i seguenti minori di D:

$$\frac{\partial D}{\partial d_{51}} = 1, \quad \frac{\partial D}{\partial d_{52}} = \omega, \quad \frac{\partial D}{\partial d_{53}} = \omega^2, \quad \frac{\partial D}{\partial d_{54}} = \omega^3, \quad \frac{\partial D}{\partial d_{55}} = \omega^4,$$

e si ponga

$$\left.\begin{aligned} \overline{X}_1^{(1)} &\equiv 1 \\ \overline{X}_2^{(1)} &\equiv \omega \\ \overline{X}_3^{(1)} &\equiv \omega^2 \\ \overline{X}_4^{(1)} &\equiv \omega^3 \\ \overline{X}_5^{(1)} &\equiv \omega^4 \end{aligned}\right\} (\text{mod. } (\omega^2+1)^2), \qquad \left.\begin{aligned} \overline{X}_1^{(2)} &\equiv 1 \\ \overline{X}_2^{(2)} &\equiv \omega \\ \overline{X}_3^{(2)} &\equiv \omega^2 \\ \overline{X}_4^{(2)} &\equiv \omega^3 \\ \overline{X}_5^{(2)} &\equiv \omega^4 \end{aligned}\right\} (\text{mod. } \omega - 3)$$

ossia

$$\left.\begin{aligned} \overline{X}_1^{(1)} &\equiv 1 \\ \overline{X}_2^{(1)} &\equiv \omega \\ \overline{X}_3^{(1)} &\equiv (\omega^2+1) - 1 \\ \overline{X}_4^{(1)} &\equiv \omega(\omega^2+1) - 1 \\ \overline{X}_5^{(1)} &\equiv -2(\omega^2+1) + 1 \end{aligned}\right\} (\text{mod. } (\omega^2+1)^2), \quad \left.\begin{aligned} \overline{X}_1^{(2)} &\equiv 1 \\ \overline{X}_2^{(2)} &\equiv 3 \\ \overline{X}_3^{(2)} &\equiv 9 \\ \overline{X}_4^{(2)} &\equiv 27 \\ \overline{X}_5^{(2)} &\equiv 81 \end{aligned}\right\} (\text{mod. } \omega - 3);$$

si trova così

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 27 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 81 \end{pmatrix}.$$

Indicando allora con Y la soluzione generale dell'equazione

$$AY = YB_0 ,$$

si ha

$$X = YV^{-1} ,$$

onde occorre determinare Y. L'ultima colonna della matrice Y è di elementi nulli, e se indichiamo con Y_1 la matrice delle prime quattro colonne e poniamo

$$B_1 = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Bmatrix} ,$$

la Y_1 soddisfarà all'equazione

$$AY_1 = Y_1 B_1 ,$$

la risoluzione della quale si riduce alla ricerca della soluzione generale delle congruenze

$$\sum_{1}^{3}{}_j\, c_{ij} X_j \equiv 0 \pmod{(\omega^2+1)^2} , \quad (i = 1 , 2 , 3)$$ [1].

Per ottenere tale soluzione si osservi che è

$$\frac{\partial C}{\partial c_{31}} = 6\omega ,$$

$$\frac{\partial C}{\partial c_{32}} = 6\omega - 6 ,$$

$$\frac{\partial C}{\partial c_{33}} = \omega^2 - 3\omega + 10 \equiv - 3\omega + 9 \pmod{\omega^2+1} ,$$

onde avremo un particolare sistema canonico per le righe di C

---

[1]) Può anche ricordarsi che, per le osservazioni fatte in una nota al n. 18, le prime due colonne della Y_1 debbono essere nulle, come conferma il calcolo che qui facciamo; la matrice delle altre due colonne si potrebbe poi evidentemente determinare mediante le congruenze stesse sopra scritte, considerandole invece rispetto al modulo ω^2+1.

ponendo

$$\left.\begin{aligned}\overline{X}_1 &\equiv 6\omega \\ \overline{X}_2 &\equiv 6\omega - 6 \\ \overline{X}_3 &\equiv -3\omega + 9\end{aligned}\right\} \pmod{\omega^2+1} ;$$

la soluzione più generale delle congruenze suddette è data allora da

$$\left.\begin{aligned}X_1 &\equiv (\omega^2+1)(a\omega+b)\overline{X}_1 \\ X_2 &\equiv (\omega^2+1)(a\omega+b)\overline{X}_2 \\ X_3 &\equiv (\omega^2+1)(a\omega+b)\overline{X}_3\end{aligned}\right\} \pmod{(\omega^2+1)^2},$$

ossia da

$$\left.\begin{aligned}X_1 &\equiv (\omega^2+1)\{6\,b\omega - 6a\} \\ X_2 &\equiv (\omega^2+1)\{6(b-a)\omega - 6(a+b)\} \\ X_3 &\equiv (\omega^2+1)\{(9a-3b)\omega + 9b + 3a\}\end{aligned}\right\} \pmod{(\omega^2+1)^2},$$

essendo le a, b costanti arbitrarie. Prendendo per nuove costanti arbitrarie $\alpha = \frac{1}{3}a$, $\beta = \frac{1}{3}b$, si ha quindi:

$$Y = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & -2\alpha & 2\beta & 0 \\ 0 & 0 & -2(\alpha+\beta) & 2(\beta-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+3\beta & 3\alpha-\beta & 0 \end{Bmatrix};$$

la

$$X = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & -2\alpha & 2\beta & 0 \\ 0 & 0 & -2(\alpha+\beta) & 2(\beta-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+3\beta & 3\alpha-\beta & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 27 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 81 \end{Bmatrix}^{-1}$$

dà allora la soluzione generale dell'equazione proposta, che con semplici calcoli numerici potrebbe facilmente scriversi in modo esplicito.

Riguardo infine alle caratteristiche può verificarsi, sull'espressione data per Y, che con valori razionali delle a e delle b non si può far assumere alla Y stessa che la caratteristica 2 oppure la caratteristica 0; si trova infatti

$$\begin{vmatrix} -2\alpha & 2\beta \\ -2(\alpha+\beta) & 2(\beta-\alpha) \end{vmatrix} = 4(\alpha^2+\beta^2)\,.$$

Caso del campo totale di razionalità.

23. — La teoria precedentemente svolta vale in particolare se si prende per campo di razionalità R il campo di tutti i numeri reali e complessi, o più generalmente un campo nel quale le funzioni caratteristiche che debbono considerarsi si decompongano in divisori lineari.

In tale caso la matrice di forma normale, relativa a un divisore elementare $(\omega-\omega_1)^{\alpha_1}$, è, come subito si vede, la matrice di ordine α_1

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \omega_1 \end{pmatrix}.$$

Procedendo come fu indicato in generale, si ottiene la riduzione di una matrice a forma normale, e la risoluzione dell'equazione $AX=XB$, come pure la determinazione della più generale matrice permutabile con una matrice assegnata.

Il teorema del n. 20 dice poi che, nel campo di razionalità che ora consideriamo, esistono soluzioni dell'equazione $AX=XB$ che hanno una qualsiasi caratteristica inferiore o uguale alla massima, la quale si determina con la medesima regola esposta nel detto teorema. Si vede quindi in altre parole, che se, *in un certo campo di razionalità* R, r_1 ed r_2 sono due numeri della forma $l_1 g_1 + l_2 g_2 + \dots + l_\nu g_\nu$ (V. n. 20), e fra essi non vi è compreso alcun altro numero della forma medesima, il sistema di equazioni che si ottiene annullando tutti i minori di ordine r_2 della soluzione generale della $AX=XB$, e riguardando come incognite le costanti arbitrarie, è tale che le sue soluzioni *razionali* annullano anche tutti i minori di ordine $r_2-1, r_2-2, \ldots, r_2-(r_2-r_1-1)=r_1+1$, mentre una soluzione delle equazioni medesime, che *non* annulli uno almeno di questi minori, esiste solo in un opportuno campo di razionalità più ampio del campo dato R, ed è quindi *irrazionale* rispetto a quest'ultimo.

Consideriamo ora, nel campo di razionalità di tutti i numeri reali e complessi, l'espressione della soluzione generale dell'equazione

$$A_0 Y = Y B_0 ,$$

essendo le A_0, B_0 di forma normale, alla quale equazione può ridursi, come sappiamo, la $AX=XB$, quando si supponga che A_0 sia la forma normale di A, B_0 quella di B. — Se $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ sono le radici comuni ad $|A-E\omega|=0$, $|B-E\omega|=0$, e $(\omega-\omega_i)^{\alpha_{i,\varrho}}$ $(\rho=1,2,\ldots,p_i)$ i divisori elementari di $A-E\omega$, relativi ad ω_i, $(\omega-\omega_i)^{\beta_{i,\sigma}}$ $(\sigma=1,2,\ldots,q_i)$ quelli di $B-E\omega$, basta, per le formule (47), (48) del n. 18, risolvere ognuna delle equazioni

$$(52)\quad \begin{pmatrix} \omega_i & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_i & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \omega_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \omega_i \end{pmatrix} Y^{(i)}_{\varrho\sigma} = Y^{(i)}_{\varrho\sigma} \begin{pmatrix} \omega_i & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_i & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \omega_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \omega_i \end{pmatrix},$$

dove la matrice nota del primo membro è di ordine $\alpha_{i,\varrho}$, quella del secondo di ordine $\beta_{i,\sigma}$.

Sia, ad es., $\alpha_{i,\varrho} \geq \beta_{i,\sigma}$; la $Y^{(i)}_{\varrho\sigma}$ è allora, per l'ultima osservazione del medesimo n. 18, della forma

$$Y^{(i)}_{\varrho\sigma} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_{\beta_{i,\sigma}} \\ 0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_{\beta_{i,\sigma}-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

e si vede inoltre che le $c_1, c_2, \ldots, c_{\beta_{i,\sigma}}$ possono prendersi affatto ad arbitrio; ciò segue facilmente dal citato teorema del n. 18, e può anche verificarsi osservando che le $\beta_{i,\sigma}$ matrici che si deducono dalla $Y^{(i)}_{\varrho\sigma}$ ora scritta facendo uguale a 1 una delle costanti, e uguali a 0 le altre, soddisfano effettivamente all'equazione (52). Cose analoghe valgono per il caso che sia $\alpha_{i,\varrho} \leq \beta_{i,\sigma}$.

Ma si può anche, in luogo di ricorrere ai risultati generali del n. 18, discutere direttamente l'equazione (52) [1]. Supporremo anzi più generalmente che la (52) sia del tipo

$$(53)\quad \begin{pmatrix} \omega_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \omega_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \omega_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \ldots & z_{1\beta} \\ z_{21} & z_{22} & \ldots & z_{2\beta} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ z_{\alpha 1} & z_{\alpha 2} & \ldots & z_{\alpha\beta} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \ldots & z_{1\beta} \\ z_{21} & z_{22} & \ldots & z_{2\beta} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ z_{\alpha 1} & z_{\alpha 2} & \ldots & z_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \omega_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \omega_2 \end{pmatrix},$$

con ω_1 eventualmente diverso da ω_2.

Eseguendo intanto effettivamente i prodotti, si hanno le $\alpha\beta$ equazioni.

$$\omega_1 z_{h,k} + z_{h+1,k} = z_{h,k-1} + z_{h,k}\,\omega_2 \quad (h = 1, 2, \ldots, \alpha; k = 1, 2, \ldots, \beta),$$

ossia

$$z_{h,k}(\omega_1 - \omega_2) = z_{h,k-1} - z_{h+1,k},$$

avendo posto

$$z_{\alpha+1,k} = z_{h,0} = 0, \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha; k = 1, 2, \ldots, \beta).$$

---

[1]) Cfr. il procedimento che ora seguiremo con quello adoperato dal sig. Voss, nella memoria citata al n. 16, per determinare la più generale matrice permutabile con una matrice data.

Sia ora $\omega_1 \neq \omega_2$; supponendo che per un certo valore di h e per qualunque k da 1 a β si abbia $z_{h+1,k} = 0$, si ricava

$$z_{h,k}\,(\omega_1 - \omega_2) = z_{h,k-1}\,,$$

$$z_{h,k}\,(\omega_1 - \omega_2)^2 = z_{h,k-2}\,,\ \text{ecc.},$$

onde

$$z_{h,k}\,(\omega_1 - \omega_2)^k = z_{h,0} = 0\,,$$

e quindi

$$z_{h,k} = 0 \qquad (k = 1\,,\,2\,,\ldots,\,\beta)\,.$$

Ma si ha ora effettivamente $z_{\alpha+1,k} = 0$ $(k = 1\,,\,2\,,\ldots,\beta)$; dal ragionamento precedente si ottiene allora $z_{\alpha,k} = 0$ $(k = 1\,,\,2\,,\ldots,\beta)$, e quindi successivamente $z_{\alpha-1,k} = z_{\alpha-2,k} = \ldots = z_{1,k} = 0$ $(k = 1\,,\,2\,,\ldots,\beta)$; dunque la (53) ammette in tal caso l'unica soluzione identicamente nulla [1]).

Sia invece $\omega_1 = \omega_2$; è allora

$$z_{h,k-1} = z_{h+1,k}$$

cioè ogni elemento è uguale a quello della riga e della colonna precedente; inoltre si ha di qui

$$z_{h+1,1} = z_{h,0} = 0 \qquad (h = 1\,,\,2,\ldots,\,\alpha - 1),$$

$$z_{\alpha,k-1} = z_{\alpha+1,k} = 0 \qquad (k = 2\,,\,3,\ldots,\,\beta),$$

cioè sono nulli tutti gli elementi della prima colonna, eccetto eventualmente il primo, e tutti quelli dell'ultima riga, eccetto eventualmente l'ultimo. La soluzione generale dell'equazione (53) è dunque

---

[1]) Viene così dimostrato nuovamente che se l'equazione $AX = XB$ ammette soluzioni (non nulle) le due funzioni $|A - E\omega|$, $|B - E\omega|$ hanno divisori comuni. Infatti la matrice Y soluzione della $A_0\,Y = Y\,B_0$, può evidentemente scomporsi, senza fare uso di questo teorema, ed in modo analogo a quello adoperato al principio del n. 18, in tante matrici, ciascuna delle quali soddisfa ad un'equazione del tipo (53). Le considerazioni che seguono dimostrano poi di nuovo la sufficienza della suddetta condizione.

questa:

$$\text{per } \alpha \leqq \beta\,, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & c_1 & c_2 & \dots & c_\alpha \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_1 & \dots & c_{\alpha-1} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & c_1 \end{pmatrix},$$

$$\text{per } \alpha \geqq \beta\,, \quad Z = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_\beta \\ 0 & c_1 & \dots & c_{\beta-1} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & c_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

le c_1, $c_2,\dots$, c_α (o c_β) essendo costanti arbitrarie, come appunto avevamo visto.

Tratteremo infine un esempio proponendoci di determinare tutte le matrici permutabili con la

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & 5 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

In questo esempio, il campo stesso dei numeri razionali soddisfa alla condizione che in esso la funzione $|A - E\omega|$ si scompone in divisori lineari; si trova inoltre facilmente, con trasformazioni sulle righe e sulle colonne, [1]) che i divisori elementari di $A - E\omega$ sono

$$(\omega + 1)^2, \quad (\omega - 2)^2, \quad (\omega - 2)\,.$$

[1]) Cfr. M., p. 292.

La forma normale di A è dunque

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

se poi consideriamo la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

si verifica subito che è

$$AU = UA_0$$

ossia

$$A_0 = U^{-1} AU$$ [1].

La più generale matrice permutabile con A_0 si ottiene ora, per il n. 19, e per quanto abbiamo visto sopra, aggiungendo ad un aggregato lineare arbitrario di E, A_0, A_0^2, A_0^3 la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \gamma \end{pmatrix},$$

essendo le α, β, γ costanti arbitrarie; la più generale matrice per-

---

[1]) La matrice U si può determinare nel modo detto in principio di questo Capitolo; si vedano i calcoli in M., pp. 292-294.

mutabile con A può dunque scriversi intanto così:

$$a\,\mathrm{E}+b\,\mathrm{A}+c\,\mathrm{A}^2+d\,\mathrm{A}^3+\mathrm{UMU}^{-1},$$

essendo a, b, c, d costanti arbitrarie. Non rimane dunque che a calcolare la matrice UMU^{-1}, il che si fa facilmente; assumendo, in luogo delle costanti arbitrarie α, β, γ, le altre u, v, w legate alle prime dalle relazioni

$$-3\alpha=w, \qquad -\beta=3u, \qquad \beta+3\gamma=-3v,$$

si trova infine che la più generale matrice permutabile con A è data da

$$a\mathrm{E}+b\mathrm{A}+c\mathrm{A}^2+d\mathrm{A}^3+\begin{pmatrix} u & v & -u & u+v & -v \\ 0 & w & 0 & w & -w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u & v+w & -u & u+v+w & -v-w \end{pmatrix},$$

essendo le a, b, c, d, u, v, w costanti arbitrarie.

Applicazioni alla teoria delle forme bilineari.

24. — Le proprietà svolte in questo Capitolo ci fanno ritrovare, *per via razionale*, alcuni teoremi dati da Frobenius in L. S.

Supponiamo per semplicità che le matrici che consideriamo siano tutte quadrate di ordine n; anzi, ricordando le osservazioni fatte in principio di questo lavoro, parleremo, in luogo di matrici, di forme bilineari e sostituzioni lineari omogenee.

Una forma bilineare A si dice che viene *trasformata* in un'altra B quando esistono due sostituzioni lineari S, T *non degeneri* (cioè con $|\mathrm{S}|\neq 0$, $|\mathrm{T}|\neq 0$) per le quali si ha $\mathrm{B}=\mathrm{SAT}$ [1]). Può darsi in particolare che due sostituzioni S e T trasformino A in sè stessa, così che sia

$$\mathrm{A}=\mathrm{SAT}; \tag{54}$$

[1]) V. le osservazioni ora ricordate.

vogliamo ora appunto ricercare a quali condizioni debbono soddisfare S e T perchè possano trasformare in se stessa una certa forma A, cioè perchè sia risolubile la (54) riguardata come un'equazione rispetto ad A.

Essendo $|S| \neq 0$, la (54) può scriversi

$$S^{-1} A = AT,$$

e la condizione richiesta è quindi che le due funzioni $|S^{-1} - E\omega|$, $|T - E\omega|$ abbiano divisori comuni. Ma si può esprimere la cosa in altro modo, mediante le ben note osservazioni seguenti, che si enunciano di solito in forma irrazionale.

Premettiamo che essendo $P = \omega^g + a_1 \omega^{g-1} + \ldots + a_{g-1} \omega + a_g$ un polinomio qualunque, chiameremo, per brevità, *polinomio inverso di* P il polinomio

$$Q(\omega) = \omega^g P\left(\frac{1}{\omega}\right) = a_g \omega^g + a_{g-1} \omega^{g-1} + \ldots + a_1 \omega + 1,$$

od un altro che differisca da questo per una costante moltiplicativa.

Essendo ora

$$S^{-1} - E\omega = S^{-1}(E - S\omega),$$

vediamo intanto che le due matrici $S^{-1} - E\omega$ ed $E - S\omega$ hanno gli stessi divisori elementari. Si ha d'altra parte

$$E - S\omega = -\omega\left(S - E\frac{1}{\omega}\right);$$

se quindi consideriamo la matrice $S - E\omega$, e diciamo $M(\omega)$ un suo qualunque minore di ordine $n-r$, $N(\omega)$ il *corrispondente* minore di $E - S\omega$, vediamo che è

$$N(\omega) = (-1)^{n-r} \omega^{n-r} M\left(\frac{1}{\omega}\right),$$

ossia che $N(\omega)$ è il polinomio inverso di $M(\omega)$. Ciascuna delle due matrici $S^{-1} - E\omega$, $S - E\omega$ ha dunque per divisori elementari i polinomi inversi dei divisori elementari dell'altra.

Ne segue in particolare che se P divide una delle due funzioni $|S - E\omega|$, $|S^{-1} - E\omega|$, il polinomio inverso di P divide l'altra.

Ricordando allora ciò che abbiamo detto poco fa, vediamo che: *Condizione necessaria e sufficiente perchè due sostituzioni lineari non degeneri* S *e* T *siano atte a trasformare in sè una forma bilineare è che esista almeno un divisore* P *di* $|S - E\omega|$, *ed uno* Q *di* $|T - E\omega|$ *che siano polinomi inversi l'uno del l'altro* [1]).

Le forme bilineari che vengono trasformate in sè dalle S, T si determinano poi razionalmente col metodo esposto nei n.i precedenti. Se inoltre indichiamo con $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ tutti quei divisori di $|S - E\omega|$, primi in un determinato campo di razionalità R, che contenga gli elementi di S e di T, i cui polinomi inversi $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\nu$ dividono $|T - E\omega|$, con $P_i^{\alpha_{i,\varrho}} (\rho = 1, 2, \ldots, p_i)$ i divisori elementari di $S - E\omega$ relativi a P_i, con $Q_i^{\beta_{i,\sigma}} (\sigma = 1, 2, \ldots, q_i)$ quelli di $T - E\omega$ relativi a Q_i, possiamo dire, con tutte le solite notazioni, che *esistono, nel campo* R, *forme bilineari trasformate in sè dalle* S, T, *aventi per caratteristica uno qualunque assegnato dei numeri*

$$r = l_1 g_1 + l_2 g_2 + \ldots + l_\nu g_\nu \qquad (0 \leq l_i \leq \gamma_{i11} + \gamma_{i22} + \ldots + \gamma_{i\pi_i\pi_i})$$

e non ne esistono aventi altre caratteristiche. — In particolare la caratteristica di una forma trasformata in sè dalle S, T *non supera il numero*

$$\sum_1^\nu {}_i (\gamma_{i11} + \ldots + \gamma_{i\pi_i\pi_i}) g_i = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + \ldots,$$

e questo limite massimo è effettivamente raggiunto [2]).

---

[1]) Cfr. FROBENIUS, *L. S.*, p. 32; MUTH, *Op. cit.*, p. 163.

[2]) Cfr. FROBENIUS, *L. S.*, p. 32, e MUTH, *Op. cit.*, p. 163, dove viene assegnato come limite superiore delle dette caratteristiche il grado del m. c. d. di $|S^{-1} - E\omega|$, $|T - E\omega|$, che può non essere raggiunto. Si vede anzi che la condizione necessaria e sufficiente perchè sia raggiunto è che si abbia $p_i \geq q_i$, $\alpha_{i,\sigma} \geq \beta_{i,\sigma}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu\,;\ \sigma = 1, 2, \ldots, q_i)$, oppure $p_i \leq q_i$, $\alpha_{i,\varrho} \leq \beta_{i,\varrho}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu\,;\ \rho = 1, 2, \ldots, p_i)$.

Se si vuole che sia $|A'| \neq 0$, si ha poi evidentemente, per le osservazioni fatte poco fa sui divisori elementari di $S^{-1} - E\omega$:

Condizione necessaria e sufficiente perchè le due sostituzioni lineari non degeneri S *e* T *siano atte a trasformare in sè una forma bilineare ordinaria, è che ad ogni divisore elementare* P^a *di una delle due matrici* $S - E\omega$, $T - E\omega$ *ne corrisponda uno* Q^a *dell'altra, avente lo stesso esponente e la cui base* Q *sia il polinomio inverso di* P [1]).

25. — Indicando con T' la sostituzione trasposta della T, si supponga in particolare che sia $S = T'$, cioè che le due sostituzioni lineari S, T siano *cogredienti.* Le cose suddette portano allora che la condizione perchè esista una forma A per la quale sia $A = T'AT$, è che la funzione $|T - E\omega|$ ammetta due divisori P, Q (uguali o distinti) che siano inversi l'uno dell'altro. Ma è facile vedere che se questa condizione è soddisfatta la funzione $|T - E\omega|$ ammette certamente un divisore *reciproco* (cioè che coincide col suo inverso): se infatti è $P = Q$, tale è il divisore P stesso; se è $P \neq Q$ può anzitutto supporsi evidentemente che P e Q siano primi (nel campo R), ed allora la $|T - E\omega|$ ammette anche il divisore $D = PQ$, che è manifestamente reciproco. Poichè inversamente è chiaro che se la $|T - E\omega|$ ammette un divisore reciproco, la condizione sopra ricordata è verificata, abbiamo che

Condizione necessaria e sufficiente perchè due sostituzioni lineari cogredienti non degeneri T', T *possano trasformare in sè una forma bilineare, è che la funzione* $|T - E\omega|$ *ammetta un divisore reciproco* [2]).

Il divisore reciproco di grado più elevato si determina razionalmente come m. c. d. di $|T - E\omega|$ e $|T^{-1} - E\omega|$; quando queste funzioni sono prime fra loro, non può aversi, per nessuna matrice A non nulla, $A = T'AT$. I numeri che indicano le caratteristiche delle varie forme A, appartenenti al campo di razionalità R, che vengono trasformate in sè dalle T', T si determinano nel modo indicato sopra

---

[1]) Cfr. FROBENIUS, *L. S.*, p. 31; MUTH. *Op. cit.*, p. 161.

[2]) Cfr. FROBENIUS, *L. S.*, p. 35; MUTH. *Op. cit.*, p. 164.

in generale; così si determina pure la massima di tali caratteristiche [1]).

Abbiamo poi:

Condizione necessaria e sufficiente perchè due sostituzioni lineari cogredienti non degeneri T', T *possano trasformare in sè una forma bilineare ordinaria, è che ad ogni divisore elementare di* $T - E\omega$ *ne corrisponda un altro di questa stessa matrice, eventualmente coincidente col primo, che abbia eguale esponente e base inversa* [2]).

L'equazione $AX = XB + C$. Il sistema $AX = YA_1$, $BX = YB_1$, e il teorema di Weierstrass.

26. — In luogo dell'equazione $AX = XB$ si potrebbe considerare l'equazione più generale

$$AX = XB + C, \tag{26, a}$$

dove C è una matrice qualunque di n righe ed n' colonne, essendo n l'ordine di A, n' quello di B. Ci limiteremo, riguardo a questa equazione, ad osservare che, essendo essa equivalente ad un sistema di nn' equazioni lineari (numeriche) in nn' incognite, avrà una ed una sola soluzione allora e solo allora che la corrispondente equazione omogenea $AX = XB$ abbia l'unica soluzione $X = 0$; si ha così che: *Condizione necessaria e sufficiente perchè la* (26, *a*) *ammetta una ed una sola soluzione è che le due funzioni* $|A - E\omega|$, $|B - E\omega|$ *siano prime fra loro.* Quando queste due funzioni abbiano divisori comuni, la (26, *a*) o non avrà soluzioni o ne avrà infinite; in que-

[1]) Cfr. Frobenius, *L. S.*, p. 35; Muth. *Op. cit.*, p. 164. Osserviamo anche qui che nei luoghi ora citati viene assegnato, come limite superiore, il grado g del suddetto m. c. d. P di $|T - E\omega|$, $|T^{-1} - E\omega|$; perchè tal limite sia effettivamente raggiunto occorre e basta che presa una qualunque coppia P_i, P_j di divisori di P, inversi l'uno dell'altro, i corrispondenti divisori elementari soddisfino alle condizioni osservate in nota al n.º precedente.

[2]) Cfr. Frobenius, *L. S.*, p. 34; Muth. *Op. cit.*, p. 164.

st'ultimo caso si ottiene evidentemente la soluzione generale, aggiungendo ad una sua soluzione particolare la soluzione generale della $AX = XB$.

27. — Consideriamo infine, in luogo di una sola equazione del tipo (26), un sistema di due equazioni lineari omogenee in due matrici incognite, del tipo

$$\left.\begin{aligned} AX &= YA_1 \\ BX &= YB_1 \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

dove A, B hanno lo stesso ordine, come pure A_1, B_1; supponiamo di più $|B| \neq 0$, $|B_1| \neq 0$. La seconda di queste equazioni dà

$$XB_1^{-1} = B^{-1}Y;$$

ponendo allora

$$XB_1^{-1} = B^{-1}Y = Z, \tag{56}$$

dalla prima delle (55) si deduce

$$B^{-1}AZ = ZA_1 B_1^{-1}; \tag{57}$$

se quindi il sistema (55) ammette soluzioni, ne ammette anche la (57), considerata come un'equazione nella matrice incognita Z, e perciò le due funzioni $|B^{-1}A - E\omega|$, $|A_1 B_1^{-1} - E\omega|$ *non* sono prime fra loro. Se viceversa questo accade, la (57) ammette soluzioni, e definendo le X, Y mediante le (56), si ottengono evidentemente soluzioni del sistema (55).

Si ha ora

$$B^{-1}A - E\omega = B^{-1}(A - B\omega),$$
$$A_1 B_1^{-1} - E\omega = (A_1 - B_1\omega)B_1^{-1},$$

e quindi le due matrici $B^{-1}A - E\omega$ ed $A - B\omega$ hanno gli stessi divisori elementari, come pure le altre due $A_1 B_1^{-1} - E\omega$ e $A_1 - B_1\omega$. È chiaro inoltre che (nel caso che A ed A_1, come pure B e B_1, abbiano lo stesso ordine) se il sistema (55) ammette soluzioni con $|X| \neq 0$, $|Y| \neq 0$, la (57) ne ammette con $|Z| \neq 0$, e viceversa. Possiamo dunque dire:

Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema (55) *ammetta soluzioni è che le due funzioni* $|A - B\omega|$, $|A_1 - B_1\omega|$ *non siano prime fra loro.*

Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema (55) *ammetta soluzioni coi determinanti diversi da* 0, [1]) *è che le due matrici* $A - B\omega$, $A_1 - B_1\omega$ *abbiano gli stessi divisori elementari.*

Quest'ultima proprietà non è che il teorema di WEIERSTRASS sull'equivalenza di due fasci non degeneri di forme bilineari, già citato al n. 15. È noto infatti che due fasci di forme bilineari in due serie di n variabili

$$A(x\ ,\ y) - \omega\, B(x\ ,\ y) = \sum_{i,k}^{n}{}_{1} (a_{ik} - \omega b_{ik})\, x_i\, y_k$$

$$A_1(x'\ , y') - \omega\, B_1(x'\ , y') = \sum_{i,k}^{n}{}_{1} (a'_{ik} - \omega b'_{ik})\, x'_i\, y'_k$$

si dicono *equivalenti* se esistono due trasformazioni lineari non degeneri ed indipendenti da ω, una delle x nelle x', l'altra delle y nelle y', che portino una forma qualunque del primo fascio $A - \omega B$ in quella del secondo $A_1 - \omega\, B_1$ che corrisponde al medesimo valore di ω. Ora perchè questo accada è necessario e sufficiente che per certe matrici P, Q, indipendenti da ω, a determinante diverso da 0, si abbia

$$P\,(A - \omega B)\, Q = A_1 - \omega B_1\,,$$

qualunque sia il valore di ω, e per questo occorre e basta che sia

$$PAQ = A_1\,, \quad PBQ = B_1\,,$$

od infine che il sistema (55) ammetta la soluzione $X = Q$, $Y = P^{-1}$, con $|X| \neq 0$, $|Y| \neq 0$. Se inoltre supponiamo che i due determinanti $|A - \omega\, B|$, $|A_1 - \omega\, B_1|$ non siano identicamente nulli, potremo con una trasformazione lineare sulla variabile ω, ridurci al caso che siano soddisfatte le condizioni $|B| \neq 0$, $|B_1| \neq 0$. Il teorema superiore può dunque anche enunciarsi:

Condizione necessaria e sufficiente perchè due fasci di forme

---

[1]) Si osservi che se in una soluzione del sistema (55) una delle due matrici X, Y ha il determinante diverso da 0, per la seconda equazione del sistema medesimo lo ha diverso da 0 anche l'altra.

bilineari, i cui determinanti non siano identicamente nulli, in due serie di n variabili, siano equivalenti, è che le loro matrici abbiano gli stessi divisori elementari.

Questo è appunto il teorema di Weierstrass.

Ritornando al sistema (55) ricordiamo che, per le (56), l'espressione della sua soluzione generale si ha ponendo

$$X = ZB_1, \quad Y = BZ,$$

dove Z è la soluzione generale della (57). Abbiamo così:

Se $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ *sono i divisori, primi in un campo di razionalità* R *che contenga gli elementi di* A, B, A_1, B_1, *comuni alle due funzioni* $|A - B\omega|$, $|A_1 - B_1\omega|$, *ed adottiamo per essi tutte le notazioni adoperate al n. 14 per il caso nel quale era* $B = E$, $B_1 = E$, *la soluzione generale del sistema* (55) *dipende da*

$$N = \sum_1^\nu {}_i \sum_1^{p_i} {}_\varrho \sum_1^{q_i} {}_\sigma \, g_i \gamma_{i\varrho\sigma} = \sum_{\varrho,\sigma} \delta_{\varrho\sigma}$$

parametri arbitrari.

Nel caso che le due matrici $A - B\omega$, $A_1 - B_1\omega$ *abbiano gli stessi divisori elementari, il numero dei parametri arbitrari si può rappresentare con*

$$N = n_0 + 2\,(n_1 + n_2 + \ldots + n_n)$$

essendo n_r *il grado rispetto ad* ω *del* m. c. d. *dei minori di ordine* $n - r$ *delle due matrici* $A - B\omega$, $A_1 - B_1\omega$. (Cfr. n. 15).

Da altrettanti parametri arbitrari dipendono le soluzioni a determinante diverso da 0, *e quindi le sostituzioni che trasformano il fascio di forme bilineari* $A - \omega B$ *nel fascio* $A_1 - \omega B_1$ [1]; le soluzioni dette si hanno infatti imponendo l'unica condizione di disuguaglianza $|Z| \neq 0$.

Si ha ancora evidentemente: *Due matrici* X, Y *di una stessa soluzione hanno ugual caratteristica. Perchè esistano, nel campo* R, *soluzioni del sistema aventi una certa caratteristica r è necessario*

---

[1]) Cfr. M., p. 322.

e sufficiente che r sia della forma

$$r = l_1 g_1 + l_2 g_2 + \dots + l_\nu g_\nu$$

con

$$0 \leq l_i \leq \gamma_{i\,11} + \dots + \gamma_{i\,\pi_i \pi_i}\,, \qquad (i = 1, 2, \dots, \nu).$$

La massima caratteristica delle soluzioni è dunque

$$\sum_1^\nu {}_i\, (\gamma_{i11} + \dots + \gamma_{i\pi_i\pi_i}) g_i = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + \dots .$$

Capitolo III.

L' equazione $X^m = A$.

Soluzioni di $X^m = A$ in un campo di razionalità assegnato.

28. — Proponiamoci ora di risolvere l'equazione

$$X^m = A \tag{58}$$

essendo A una matrice quadrata di ordine n, ed m un numero intero e positivo qualunque. Nel caso che sia $|A| \neq 0$, Frobenius ha determinato alcune soluzioni dell'equazione (58) che si esprimono come aggregati lineari di potenze di A; precisamente se $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\mu$ sono le radici distinte dell'equazione $|A - E\omega| = 0$, si trova, con questo metodo del Frobenius, una soluzione della (58) per ogni sistema di valori di $\sqrt[m]{\omega_1}, \sqrt[m]{\omega_2}, \ldots, \sqrt[m]{\omega_\mu}$, così che vengono a determinarsi m^μ soluzioni della (58) [1]). Noi studieremo questa equazione senza imporre alle soluzioni la condizione di essere aggregati lineari di

---

[1]) Frobenius. *Ueber die cogredienten Transformationen der bilinearen Formen* [Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, zu Berlin, 1896, XXVI, pp. 7-16], pp. 9-10. Questo procedimento è riportato anche in Muth. *Op. cit.,* pp. 37-40; viene esposto per il caso $m = 2$, ma si riconosce facilmente che esso è generale. Si veda anche Sylvester, *Sur les puissances et les racines de substitutions linéaires* [Comptes rendus ecc., t. XCIV (1882, 1.° sem.), pp. 55-58]; in tale lavoro (almeno per il caso in cui le radici di $|A - E\omega| = 0$ siano tutte distinte) si ritrovano, sotto forma diversa, le stesse soluzioni date da Frobenius, e si osserva inoltre che vi sono dei casi in cui l'equazione (58) ammette

potenze di A, nè alla A la condizione $|A| \neq 0$. Troveremo in particolare, che le soluzioni date dal FROBENIUS sono *tutte* quelle che possono esprimersi come aggregati lineari di potenze di A, e che nel caso che sia $|A|=0$ non esistono soluzioni della $X^m=A$ che godano di questa proprietà.

Sia R un certo campo di razionalità che contenga gli elementi di A, e cominciamo dal ricercare in generale sotto quali condizioni la (58) ammette soluzioni appartenenti a questo campo R.

Osserviamo anzitutto che si ha, identicamente rispetto alla matrice X,

$$X^m - E\omega^m = (X - E\omega)(X^{m-1} + X^{m-2}\omega + \ldots + X\omega^{m-2} + E\omega^{m-1}),$$

onde segue in particolare che il determinante $|X^m - E\omega^m|$ è divisibile per $|X - E\omega|$. Se quindi X è una soluzione della (58), appartenente ad R, il determinante $|A - E\omega^m|$ ammetterà nel campo R un divisore di grado *n*, cioè il divisore $|X - E\omega|$. Siano inoltre $Q_1^{e_1}, Q_2^{e_2}, \ldots, Q_k^{e_k}$ i divisori elementari di $X - E\omega$ nel campo R (essendo i $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ uguali o distinti) ed X_0 la forma normale, adoperata nel Cap. precedente, della matrice X, la quale è pienamente determinata dai divi-

---

infinite soluzioni. Del SYLVESTER si vedano anche i seguenti lavori nei quali tratta di equazioni fra matrici, di grado maggiore dell'unità:

Sur les équations monothétiques [Comptes rendus ecc., t. IC (1884, 2.º sem.), pp. 13-15].

Sur la solution explicite de l'équation quadratique de Hamilton en quaternions ou en matrices du second ordre [Ibid., pp. 555-558].

Sur les conditions de l'existence de racines égales dans l'équation du second ordre de Hamilton et sur une méthode générale pour résoudre une équation unilatérale de n' importe quel degré en matrices d'un ordre quelconque [Ibid. pp. 621-630].

On the trinomial unilateral quadratic equation in matrices of the second order [The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, XX (1885), pp. 305-312].

Anche in queste memorie si considera sempre il caso che le soluzioni che si ricercano siano esprimibili razionalmente (con coefficienti numerici) per mezzo delle matrici date, ma non viene enunciato alcun criterio, almeno relativamente semplice, per riconoscere quando tale caso si presenti.

sori elementari $Q_1^{e_1}, Q_2^{e_2}, \ldots, Q_k^{e_k}$; esisterà una matrice P, con $|P| \neq 0$, tale che si abbia

$$X = P^{-1} X_0 P ,$$

e quindi

$$P^{-1} X_0^m P = A ,$$

onde le matrici X_0^m ed A debbono essere simili.

Supponiamo, viceversa, che il determinante $|A - E\omega^m|$ ammetta, nel campo di razionalità R, un divisore $\varphi(\omega)$ di grado *n*, il quale possa scomporsi, in un modo conveniente, in un prodotto di potenze di fattori primi in R, uguali o distinti:

$$\varphi(\omega) = Q_1^{e_1} Q_2^{e_2} \ldots Q_k^{e_k} ,$$

così che la potenza *m* esima della matrice di forma normale X_0 relativa ai divisori elementari $Q_1^{e_1}, Q_2^{e_2}, \ldots, Q_k^{e_k}$ sia simile ad A; esiste allora una matrice P, a determinante diverso da 0, per la quale si ha

$$(59) \qquad P^{-1} X_0^m P = A ,$$

e ponendo quindi

$$(60) \qquad X = P^{-1} X_0 P ,$$

$$X^m = A.$$

Si ha così il seguente teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè, in un determinato campo R *di razionalità, che contenga gli elementi di* A, *l'equazione* $X^m = A$, *dove* A *è una matrice quadrata di ordine n, ammetta soluzioni, è che il determinante* $|A - E\omega^m|$ *abbia, in* R, *un divisore di grado n, i cui fattori primi, uguali o distinti, possano aggrupparsi in un certo modo* $Q_1^{e_1}, Q_2^{e_2}, \ldots, Q_k^{e_k}$, *in guisa che la potenza m esima della matrice* X_0 *di forma normale, che ha questi divisori elementari, sia simile ad* A.

Otteniamo così un numero finito di matrici normali X_0, e per ognuna di esse, risolvendo la (59), abbiamo, mediante la (60), le soluzioni corrispondenti della (58). Si ha dunque il modo di determinare, operando nel campo R, tutte le soluzioni che la $X^m = A$

ammette in questo campo. Dicendo che due matrici appartengono ad una medesima *classe* quando sono simili, vediamo che le soluzioni della $X^m = A$ si distribuiscono in un numero finito di classi, e le soluzioni di ogni classe dipendono, di solito, da costanti arbitrarie.

29. — A complemento del teorema del n° precedente faremo ancora le osservazioni seguenti:

1.° Siano $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ i fattori primi distinti di $|A - E\omega|$, e sia precisamente $|A - E\omega| = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_\mu^{\alpha_\mu}$, così che sarà $|A - E\omega^m| = P_1^{\alpha_1}(\omega^m)\, P_2^{\alpha_2}(\omega^m) \ldots P_\mu^{\alpha_\mu}(\omega^m)$; imaginiamo di scomporre ogni $P_i(\omega^m)$ nei suoi fattori primi in R, e consideriamo la matrice N di forma normale i cui divisori elementari sono tutti i divisori primi (uguali o distinti) di $|A - E\omega^m|$; avremo in particolare $|A - E\omega^m| = |N - E\omega|$, e la matrice N sarà di ordine nm. È allora evidente (per la forma delle matrici normali) che se consideriamo un qualunque divisore $\varphi(\omega)$, di ordine n, di $|A - E\omega^m|$, o di $|N - E\omega|$, $\varphi(\omega) = Q_1^{e_1} Q_2^{e_2} \ldots Q_k^{e_k}$ (i $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ essendo uguali o distinti) ed è X_0 la matrice normale relativa ai divisori elementari $Q_1^{e_1}, Q_2^{e_2}, \ldots, Q_k^{e_k}$, il determinante $|N^m - E\omega|$ è divisibile per $|X_0^m - E\omega|$.

D'altra parte essendo σ una variabile e $\psi(\sigma)$ un certo polinomio, si ha

$$|N^m - E\sigma^m| = |N - E\sigma|\,\psi(\sigma) = |A - E\sigma^m|\,\psi(\sigma),$$

ed è quindi, essendo χ un altro polinomio,

$$\psi(\sigma) = \chi(\sigma^m),$$

e ponendo $\sigma^m = \omega$

$$|N^m - E\omega| = |A - E\omega|\,\chi(\omega).$$

Il polinomio $|N^m - E\omega|$ è dunque divisibile per $|X_0^m - E\omega|$ e per $|A - E\omega|$, comunque sia formata (nel modo detto) la matrice X_0; perchè sia soddisfatta la condizione enunciata nel teorema di sopra, deve accadere, in particolare, che questi due divisori $|X_0^m - E\omega|$ ed $|A - E\omega|$ siano uguali, e coincidano inoltre i divisori elementari delle due matrici $X_0^m - E\omega$, $A - E\omega$.

2.° Per determinare le matrici X_0 di cui nel teorema, possiamo evidentemente operare, anzichè sull'equazione (58), sulla

$$(58)' \qquad Y^m = A_0\,,$$

essendo A_0 la matrice di forma normale relativa ad A; se è infatti $U^{-1}AU = A_0$, si passa dalla (58)' alla (58) mediante la trasformazione

$$Y = U^{-1} X U\,.$$

Si osservi anche che una soluzione X della (58) è permutabile con A, poichè è $X^{m+1} = AX = XA$. In particolare ogni soluzione Y della (58)' è permutabile con A_0; ne segue (cfr. n. 18) che Y è della forma

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Y_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & Y_\mu \end{pmatrix},$$

dove ogni Y_i soddisfa all'equazione

$$(58)'' \qquad Y_i^m = A_{0,i}\,,$$

essendo $A_{0,i}$ quella parte di A_0 relativa al divisore P_i.

Ciascuna matrice X_0, essendo la forma normale di una soluzione Y, deve dunque essere della forma

$$X_0 = \begin{pmatrix} X_{0,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_{0,2} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & X_{0,\mu} \end{pmatrix},$$

dove ogni $X_{0,i}$ è una matrice normale di ordine $g_i\alpha_i$ (se g_i è il grado di P_i), ed è precisamente la forma normale di una classe di soluzioni della corrispondente equazione (58)''. Se consideriamo allora il divisore $\varphi = Q_1^{e_1} Q_2^{e_2} \dots Q_k^{e_k}$ (di cui nel teorema precedente) relativo alla matrice X_0, e poniamo $\varphi_i = |X_{0,i} - E\omega|$, possiamo scrivere $\varphi = \varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_\mu$; ma ogni φ_i divide, per la (58)'', $|A_{0,i} - E\omega^m| = P_i^{\alpha_i}(\omega^m)$, e d'altra parte due qualunque dei polinomi $P_i(\omega^m)$ sono primi fra loro, poichè il loro m. c. d. non potrebbe contenere altre potenze di ω che quelle con esponenti multipli di m, ed ammetterebbero quindi divisori comuni anche i due corrispondenti $P_i(\omega)$; abbiamo dunque:

Se $P_1(\omega), P_2(\omega), \ldots, P_\mu(\omega)$ *sono i divisori primi distinti di* $|A - E\omega|$, $g_1, g_2, \ldots, g_\mu$ *i loro gradi, ed è* $|A - E\omega| = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_\mu^{\alpha_\mu}$, *il divisore di grado* n, $Q_1^{e_1} Q_2^{e_2} \ldots Q_k^{e_k}$, *del polinomio* $P_1^{\alpha_1}(\omega^m) \ldots P_\mu^{\alpha_\mu}(\omega^m)$, *di cui nell'enunciato di sopra, deve ammettere con ognuno dei polinomi* $P_i^{\alpha_i}(\omega^m)$ *un* m. c. d. *di grado uguale a* $g_i \alpha_i$.

Questa osservazione limita ancora il numero dei suddetti divisori di grado n, che possono soddisfare alla condizione voluta.

Soluzioni di $X^m = A$ nel campo totale di razionalità.

30. — Supponiamo ora che il campo di razionalità in cui si opera sia il campo di tutti i numeri reali e complessi.

Osserviamo anzitutto che in tal caso si determinano facilmente i divisori elementari di $X_0^m - E\omega$, essendo, per il momento, X_0 una qualunque matrice, che possiamo supporre di forma normale. Siano infatti $(\omega - x_1)^{e_1}, (\omega - x_2)^{e_2}, \ldots, (\omega - x_k)^{e_k}$ i divisori elementari di $X_0 - E\omega$, essendo le $x_1, x_2, \ldots, x_k$ uguali o distinte, e indichiamo, per brevità, con X_i la matrice normale relativa a $(\omega - x_i)^{e_i}$:

$$X_i = \begin{pmatrix} x_i & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & x_i & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & x_i \end{pmatrix}.$$

Si trova immediatamente

$$X_i^m = \begin{pmatrix} x_i^m & \binom{m}{1} x_i^{m-1} & \binom{m}{2} x_i^{m-2} & \dots\dots & \binom{m}{e_i - 1} x_i^{m-e_i+1} \\ 0 & x_i^m & \binom{m}{1} x_i^{m-1} & \dots\dots & \binom{m}{e_i - 2} x_i^{m-e_i+2} \\ 0 & 0 & x_i^m & \dots\dots & \binom{m}{e_i - 3} x_i^{m-e_i+3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots & x_i^m \end{pmatrix},$$

e quindi intanto, se è $x_i \neq 0$, la matrice $X_i^m - E\omega$ ha un solo divisore elementare uguale a $(\omega - x_i^m)^{e_i}$. Se invece è $x_i = 0$, si ponga $e_i = q_i m + r_i$ $(0 \leq r_i < m)$; si vede subito allora (ad es. con trasformazioni sulle righe e sulle colonne) che, se è $e_i \geq m$, la $X_i^m - E\omega$ ha m divisori elementari, dei quali $m - r_i$ uguali ad ω^{q_i}, ed r_i uguali ad ω^{q_i+1}, mentre se è $e_i < m$ la $X_i^m - E\omega$ stessa ha e_i divisori elementari uguali ad ω [1]). Con queste osservazioni sarebbe facile vedere come deve essere scelto il divisore $\varphi(\omega)$ di grado n, di cui sopra abbiamo parlato; ma allo stesso risultato possiamo, in questo caso, giungere più direttamente nel modo seguente.

Perchè la (58) ammetta soluzioni (nel campo che ora consideriamo) è intanto necessario che gli eventuali divisori elementari della $A - E\omega$ eguali a potenze di ω soddisfino alle condizioni che risultano da ciò che poco fa abbiamo osservato, siano cioè tali che, escludendone un numero conveniente di uguali ad ω, quelli che rimangono possano distribuirsi in λ gruppi di m divisori ciascuno,

---

1) Per il caso delle radici diverse da 0 cfr. FROBENIUS, *L. S.*, p. 25. Riguardo alla questione più generale di determinare (nel campo di razionalità di tutti i numeri reali e complessi) i divisori elementari di $f(A) - E\omega$, dove f indica una qualunque funzione razionale, si veda MUTH, *Ueber rationale Functionen bilinearer Formen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. CXXV (1903), pp. 282-292]; questo teorema di MUTH comprende ciò che abbiamo osservato sopra. Giungendo a risolvere l'analoga questione in un campo di razionalità qualunque, almeno per il caso delle potenze, si potrebbe forse dare al teorema del n.° 28 un enunciato più semplice.

così che il gruppo j^{esimo} $(j=1,2,\dots,\lambda)$ contenga $m-r_j$ divisori uguali ad una certa potenza ω^{q_j} di ω, ed r_j uguali a ω^{q_j+1}. Supponiamo ora, viceversa, che questo accada, e dimostriamo che in tal caso l'equazione (58) ammette soluzioni (nel campo di razionalità che consideriamo).

Siano perciò $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega^{\nu}$ le radici distinte e diverse da 0 dell'equazione $|A-E\omega|=0$, e $(\omega-\omega_i)^{\alpha_{i,\varrho}}$ $(\rho=1,2,\dots,p_i)$ i divisori elementari di $A-E\omega$ relativi ad ω_i $(i=1,2,\dots,\nu)$, e indichiamo con $x_{i,1}, x_{i,2},\dots, x_{i,p_i}$ p_i radici m^{esime} comunque scelte, eguali o distinte, di ω_i. Consideriamo la matrice X_0 di forma normale, relativa ai divisori elementari seguenti:

$$(\omega-x_{i,1})^{\alpha_{i,1}}\,,\ (\omega-x_{i,2})^{\alpha_{i,2}}\,,\dots,\ (\omega-x_{i,p_i})^{\alpha_{i,p_i}}\,,\quad (i=1,2,\dots,\nu)\,,$$
$$\omega^{q_1m+r_1}\,,\ \omega^{q_2m+r_2}\,,\dots,\ \omega^{q_\lambda m+r_\lambda}\,,\ \omega^{\varepsilon_1},\omega^{\varepsilon_2},\dots,\omega^{\varepsilon_l}\,,$$

dove gli esponenti ε_s sono scelti con le sole condizioni che sia

$$0\leq\varepsilon_s<m\ (s=1,2,\dots,l)\,,\ \text{e}\ \varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_l=n-\sum_{1}^{\nu}{}_i\sum_{1}^{p_i}{}_\varrho\,\alpha_{i,\varrho}-\sum_{1}^{\lambda}{}_j(q_jm+r_j)\,;$$

per le osservazioni fatte in principio di questo numero, è manifesto che la X_0^m e la A sono due matrici simili; per il n. 28 esistono allora effettivamente soluzioni della $X^m=A$, simili ad X_0, e si ottengono dalla (60) dove P rappresenta la soluzione generale della (59). Abbiamo dunque:

Condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione $X^m=A$ *sia risolubile (nel campo di tutti i numeri reali e complessi) è che gli esponenti dei divisori elementari della matrice* $A-E\omega$, *relativi al divisore* ω *si possano disporre, prescindendo eventualmente da alcuni di quelli eguali all'unità, in gruppi di* m *numeri ciascuno, così che in ogni gruppo si abbiano al massimo due soli esponenti distinti, e questi differiscano di una unità. La determinazione di tutte le soluzioni si fa poi nel modo che risulta dalle osservazioni di sopra e da quelle del n. 28.*

La condizione relativa al divisore ω enunciata in questo teorema può esprimersi anche nel modo che ora andiamo a dire.

Supponiamo che tale condizione sia soddisfatta, e siano ω^{β}, $\omega^{\beta+1}$ due divisori elementari di $A-E\omega$; essi potranno far parte simultaneamente di uno o più dei gruppi suddetti; ma se esistono due di tali gruppi, è evidente che ai $\beta, \beta+1$ che compaiono in essi si può dare un altro aggruppamento, sempre soddisfacente alle condizioni del teorema, e tale che uno dei nuovi gruppi contenga o tutti β o tutti $\beta+1$, e l'altro possa contenere così degli uni come degli altri; si può quindi sempre supporre (per ricercare quando è che le indicate condizioni sono soddisfatte) che per ogni coppia $\beta, \beta+1$ dei suddetti esponenti, che differiscano fra loro di una unità, ci sia al più un solo gruppo che contenga simultaneamente l'uno e l'altro numero, e questo infatti supporremo.

Premesso ciò, se H è il numero dei divisori elementari di $A-E\omega$ uguali a potenze di ω, e poniamo $H=\lambda m+\varepsilon$ $(0\leq\varepsilon<m)$, vi saranno certamente, per il teorema di sopra, almeno ε divisori elementari uguali ad ω, e possiamo evidentemente supporre, per formare i gruppi di cui nel teorema, di prescindere precisamente da ε di tali divisori. Trascuriamo dunque questi ε divisori, e degli $H-\varepsilon=\lambda m$ che così rimangono ve ne siano τ_1 uguali, ad es., a ω^{β_1}, τ_2 uguali a $\omega^{\beta_2}, \dots, \tau_s$ uguali a ω^{β_s} $(\beta_1<\beta_2<\dots<\beta_s)$. Consideriamo ora le somme

$$\sigma_1=\tau_1\,,\ \sigma_2=\tau_1+\tau_2\,,\ \sigma_3=\tau_1+\tau_2+\tau_3\,, \dots\,,$$

e siano $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_t}$ $(i_1<i_2<\dots<i_t)$ quelle *non* multiple di m, poniamo inoltre $\sigma_i\equiv r_i$ (mod. m) $(0\leq r_i<m)$. I β_{i_1} non saranno allora in numero multiplo di m, ed esiste quindi un gruppo formato con β_{i_1} e con β_{i_1+1}; sarà dunque $\beta_{i_1+1}=\beta_{i_1}+1$ e $\tau_{i_1+1}\geq m-r_{i_1}$. Sia ora $i_1+1<i_2$; la somma σ_{i_1+1} essendo in tal caso multipla di m, i β_{i_1}, β_{i_1+1} costituiscono interamente un certo numero di gruppi; possiamo quindi ripetere per i β_{i_2} il ragionamento fatto per i β_{i_1} e troviamo analogamente $\beta_{i_2+1}=\beta_{i_2}+1$; se poi è $i_1+1=i_2$ si ha $\beta_{i_1+2}=\beta_{i_1+1}+1$, e quindi, anche in questo caso, $\beta_{i_2+1}=\beta_{i_2}+1$; si ha poi ancora $\tau_{i_2+1}\geq m-r_{i_2}$. Così seguitando troveremo anche

$$\beta_{i_3+1}=\beta_{i_3}+1\quad,\quad \beta_{i_4+1}=\beta_{i_4}+1\,,\ \text{ecc.},$$
$$\tau_{i_3+1}\geq m-r_{i_3}\quad,\quad \tau_{i_4+1}\geq m-r_{i_4}\,,\ \text{ecc.},$$

ed invertendo i ragionamenti ora fatti possiamo evidentemente dire che *con tutte le notazioni ora adoperate la condizione del teorema di sopra equivale a questo che debba essere*

$$\beta_{i_1+1}=\beta_{i_1}+1 \ , \ \beta_{i_2+1}=\beta_{i_2}+1 \ , \ldots , \ \beta_{i_t+1}=\beta_{i_t}+1 \ ,$$

$$\tau_{i_1+1}\geq m-r_{i_1} \ , \ \tau_{i_2+1}\geq m-r_{i_2} \ , \ldots , \ \tau_{i_t+1}\geq m-r_{i_t} \ .$$

Questo criterio può servire a riconoscere facilmente se più numeri $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ soddisfano alla voluta condizione.

Le caratteristiche delle soluzioni di $X^m = A$.

31. — Supponiamo ora che, in un certo campo di razionalità R, l'equazione $X^m = A$ sia risolubile, e determiniamo, in questo campo, le caratteristiche delle sue varie soluzioni; basta evidentemente determinare le caratteristiche delle varie matrici X_0. Si osservi anzitutto che, come si vede immediatamente, la caratteristica di una tale matrice X_0 è data da $n-\overline{\overline{H}}$, essendo $\overline{\overline{H}}$ il numero dei divisori elementari di $X_0 - E\omega$ relativi al divisore ω [1]; occorrerà quindi determinare i vari valori che può assumere $\overline{\overline{H}}$.

Sia H il numero dei divisori elementari di $A - E\omega$ relativi al divisore ω, e poniamo come sopra

$$H=\lambda m+\varepsilon \ , \quad (0\leq\varepsilon<m) \ ;$$

sia poi H' il numero dei divisori elementari di $A - E\omega$ *uguali ad* ω, così che sarà, per il teorema del n.º precedente, [2] $H'\geq\varepsilon$, e poniamo

$$\mu=\left[\frac{H'-\varepsilon}{m}\right] \ ^{3)}.$$

---

[1]) Cfr la mia nota: *Sulla caratteristica del prodotto di due matrici* [l. c.] p. 256.

[2]) Si osservi che la discussione fatta in questo teorema per i divisori elementari relativi ad ω vale manifestamente in qualunque campo di razionalità.

[3]) Ricordiamo che essendo α un numero positivo qualunque si suole indicare con $[\alpha]$ il massimo numero intero contenuto in esso.

Ogni aggruppamento degli H divisori suddetti, che soddisfi alle condizioni del n.° precedente, si ottiene evidentemente prendendo un certo numero $\lambda' m + \varepsilon$ $(0 \leq \lambda' \leq \mu)$ degli H′ divisori elementari uguali ad ω, formando con questi un certo numero di gruppi, in modo che in ogni gruppo vi siano meno di m divisori, e formando infine $\lambda - \lambda'$ gruppi, in modo opportuno, coi $(\lambda - \lambda')m$ divisori che rimangono; il numero di tutti i gruppi così formati è appunto il numero $\overline{\overline{\mathrm{H}}}$.

Ora è chiaro che il numero dei gruppi soddisfacenti alla condizione voluta, che si possono formare coi detti $\lambda' m + \varepsilon$ divisori uguali ad ω varia dal minimo $\dfrac{\lambda' m + \varepsilon}{m-1}$ o $\left[\dfrac{\lambda' m + \varepsilon}{m-1}\right] + 1$, secondo che è $\lambda' m + \varepsilon \equiv 0 \pmod{m-1}$ o no, al massimo $\lambda' m + \varepsilon$; il minimo ora detto può d'altra parte rappresentarsi in ambedue i casi con l'espressione

$$\left[\frac{\lambda' m + \varepsilon + m - 2}{m-1}\right] = \lambda' + \left[\frac{\lambda' + \varepsilon + m - 2}{m-1}\right];$$

ne segue che il numero totale dei gruppi sopra considerati, cioè il numero $\overline{\overline{\mathrm{H}}}$, varia dal minimo $\lambda + \left[\dfrac{\lambda' + \varepsilon + m - 2}{m-1}\right]$ al massimo $\lambda + \lambda'(m-1) + \varepsilon$. *Le caratteristiche delle soluzioni della* $X^m = A$, *corrispondenti al considerato valore* λ', *sono dunque date dai numeri*

$$(61)\qquad n-\lambda-\varepsilon-\lambda'(m-1)\ ,\ n-\lambda-\varepsilon-\lambda'(m-1)+1, \ldots, n-\lambda-\left[\frac{\lambda'+\varepsilon+m-2}{m-1}\right].$$

Facendo successivamente $\lambda' = 0, 1, \ldots, \mu$ otteniamo tutti i numeri che danno le caratteristiche delle soluzioni della $X^m = A$.

Si osservi ora che confrontando la serie dei numeri (61) corrispondente ad un certo valore λ' e la serie medesima corrispondente a $\lambda' + 1$, il minimo ed il massimo della seconda serie sono rispettivamente minori del minimo e del massimo della prima serie; vogliamo però dimostrare che fra una serie e l'altra non vi è compreso alcun numero intero, cioè che il minimo della serie corrispondente a λ' è minore od uguale al massimo della serie corrispondente a $\lambda'+1$, aumentato di una unità, ossia, in simboli,

$$(62) \qquad n-\lambda-\varepsilon-\lambda'(m-1) \leq n-\lambda-\left[\frac{\lambda'+\varepsilon+m-1}{m-1}\right]+1 .$$

Da questa disuguaglianza infatti si deduce

$$\left[\frac{\lambda'+\varepsilon+m-1}{m-1}\right] \leq \varepsilon+\lambda'(m-1)+1 .$$

ossia

$$(63) \qquad \frac{\lambda'+\varepsilon+m-1}{m-1} < \varepsilon+\lambda'(m-1)+2 ,$$

e viceversa dalla (63) si ottiene la (62); la (63) medesima può poi scriversi

$$\lambda'+\varepsilon < \varepsilon(m-1)+\lambda'(m-1)^2+m-1 ,$$

che è evidentemente soddisfatta.

Vediamo dunque che i numeri che si ottengono dalla serie (61) facendovi successivamente $\lambda'=0, 1, \ldots, \mu$ sono tutti i numeri compresi (gli estremi inclusi) fra il più piccolo dei numeri della serie corrispondente a $\lambda'=\mu$, ed il più grande della serie corrispondente a $\lambda'=0$, cioè fra i numeri

$$P=n-\lambda-\varepsilon-\mu(m-1) , \qquad Q=n-\lambda-\left[\frac{\varepsilon+m-2}{m-1}\right].$$

Esprimiamo ora questi due numeri per mezzo di H e di H′. Per il numero Q si ha evidentemente

$$\begin{aligned} Q&=n-\lambda & &\text{per } \varepsilon=0, \\ Q&=n-\lambda-1 & &\text{per } \varepsilon>0, \end{aligned}$$

e quindi in ambedue i casi

$$Q=n-\left[\frac{H+m-1}{m}\right].$$

Per il numero P cominciamo dal porre

$$\begin{aligned} H'&=lm+\tau & &(0\leq\tau<m), \\ H'-\varepsilon&=\mu m+\sigma & &(0\leq\sigma<m); \end{aligned}$$

poichè si ha ancora $H' - \varepsilon = lm + \tau - \varepsilon$, avremo

$$(64) \qquad \mu m + \sigma = lm + \tau - \varepsilon \qquad (0 \leq \sigma < m),$$

e converrà quindi distinguere i due casi $\tau \geq \varepsilon$, $\tau < \varepsilon$. — Nel primo caso la (64) dà $\sigma = \tau - \varepsilon$, $\mu = l$; inoltre, se è $\tau = \varepsilon$ si ha $H - H' = (\lambda - l)m$, e quindi $\lambda - l = \dfrac{H - H'}{m}$; se invece è $\tau > \varepsilon$ si ha $H - H' = (\lambda - l)m - (\tau - \varepsilon)$, ossia $\left[\dfrac{H - H'}{m}\right] = \lambda - l - 1$, o infine $\lambda - l = \left[\dfrac{H - H' + m - 1}{m}\right]$, la quale si riduce, per $\tau = \varepsilon$, alla $\lambda - l = \dfrac{H - H'}{m}$ di poco fa.

Si ha dunque *per* $\tau \geq \varepsilon$

$$\begin{aligned} P &= n - \lambda - \varepsilon - l(m-1) = n - (\lambda - l) - \varepsilon - \lambda m + \lambda m - lm = \\ &= n - (\lambda - l) + (\lambda - l)m - H = n + (\lambda - l)(m-1) - H = \\ &= n - H + (m-1)\left[\frac{H - H' + m - 1}{m}\right]. \end{aligned}$$

Se poi è $\tau < \varepsilon$, la (64) dà $\sigma = m + \tau - \varepsilon$, $\mu = l - 1$, e da $H - H' = (\lambda - l)m + \varepsilon - \tau$ si deduce $\lambda - l = \left[\dfrac{H - H'}{m}\right] = \left[\dfrac{H - H' + m - 1}{m}\right] - 1$; è quindi per $\tau < \varepsilon$

$$\begin{aligned} P &= n - \lambda - \varepsilon - (l-1)(m-1) = n - \lambda - \varepsilon - l(m-1) + m - 1 = \\ &= n + (\lambda - l)(m-1) - H + m - 1 = n + (\lambda - l + 1)(m-1) - H = \\ &= n - H + (m-1)\left[\frac{H - H' + m - 1}{m}\right], \end{aligned}$$

come nel caso $\tau \geq \varepsilon$. — Osservando infine che se H_1 è il numero dei divisori elementari di $A - E\omega$ relativi al divisore ω e con esponente maggiore dell'unità, cioè il secondo numero di Predella, si ha $H - H' = H_1$, possiamo enunciare il teorema:

Se H, H_1 *sono i primi due numeri di* Predella *per la matrice* $A - E\omega$ *e per il divisore* ω, *le caratteristiche delle soluzioni* *della* $X^m = A$ *sono date dai numeri*

$$n - H + (m-1)\left[\frac{H_1 + m - 1}{m}\right],$$

$$n - H + (m-1)\left[\frac{H_1 + m - 1}{m}\right] + 1, \ldots, n - \left[\frac{H + m - 1}{m}\right],$$

essendo n *l'ordine della matrice* A.

Si osservi che $n - H$ è la caratteristica di A; indicandola con c, la serie delle dette caratteristiche può scriversi

$$c + (m-1)\left[\frac{H_1 + m - 1}{m}\right],$$

$$c + (m-1)\left[\frac{H_1 + m - 1}{m}\right] + 1, \ldots, c + H - \left[\frac{H + m - 1}{m}\right].$$

Le soluzioni singolari di $X^m = A$.

32. — Nei ragionamenti che seguono supporremo senz'altro di operare nel campo di razionalità di tutti i numeri reali e complessi; alcuni dei risultati che otterremo potranno però (come vedremo) essere applicati in un campo di razionalità arbitrario, che contenga gli elementi di A; in un tale campo rimarranno valide anzi anche alcune parti delle dimostrazioni.

Abbiamo visto al n. 28 che le soluzioni dell' equazione $X^m = A$ si distribuiscono in un numero finito di classi, e che le soluzioni di ogni classe dipendono, almeno generalmente, da costanti arbitrarie. Vogliamo ora appunto esaminare se esistano delle classi che contengono soltanto un numero finito di soluzioni.

Ricordiamo perciò che la soluzione generale della classe corrispondente ad una matrice normale X_0, determinata nel modo che sopra abbiamo detto, si ottiene dalla formula

$$X = P^{-1} X_0 P \tag{60}$$

dove P è la più generale matrice che soddisfa alla

$$P^{-1} X_0^m P = A; \tag{59}$$

occorre quindi in primo luogo ricercare qual' è la condizione perchè a due soluzioni della (59) corrisponda, per la (60), una medesima matrice X.

Se P_1 e P_2 sono due tali soluzioni, avremo per esse

$$P_2^{-1} X_0 P_2 = P_1^{-1} X_0 P_1 ,$$

ossia

$$X_0 P_2 P_1^{-1} = P_2 P_1^{-1} X_0 ,$$

e ponendo

$$P_2 P_1^{-1} = U ,$$

(65) $$U^{-1} X_0 U = X_0 .$$

Se inversamente la P_1 è una soluzione della (59), ed U una soluzione qualunque della (65), la matrice

$$P_2 = UP_1$$

soddisfa manifestamente alla (59); dunque da una soluzione qualunque della (59) si hanno tutte le altre soluzioni di questa medesima equazione *che danno la stessa matrice* X, moltiplicando a sinistra la considerata soluzione per la matrice più generale che trasforma X_0 in se stessa.

Osserviamo in secondo luogo che da una soluzione particolare P_1 della (59) si ha la soluzione generale della medesima equazione ponendo

$$P = VP_1 ,$$

dove V è la più generale matrice che trasforma in sè stessa la X_0^m, cioè per la quale si ha

(66) $$V^{-1} X_0^m V = X_0^m ;$$

infatti da

$$P^{-1} X_0^m P = P_1^{-1} X_0^m P_1$$

segue

$$P_1 P^{-1} X_0^m P P_1^{-1} = X_0^m ,$$

onde appunto, ponendo

$$PP_1^{-1} = V ,$$

si ottiene

$$V^{-1} X_0^m V = X_0^m$$

e

$$P = VP_1 ;$$

e viceversa.

Premesso ciò, si osservi che ogni matrice che trasforma in sè X_0 trasforma in sè anche X_0^m, ma, in generale, non viceversa; si supponga però dapprima che anche questo accada, cioè che ogni matrice che trasforma in sè X_0^m, trasformi in sè pure X_0. Considerata allora una particolare soluzione P_1 della (59), da ciò che abbiamo detto sopra risulta subito che alla soluzione più generale $P = VP_1$ dell'equazione medesima corrisponde, per la (60), sempre la medesima matrice X; la classe corrispondente ad X_0 è costituita dunque, in tal caso, da una sola soluzione.

Si supponga invece che esista almeno una soluzione V_1 della (66) che non sia soluzione della (65), ed essendo U una soluzione qualunque di quest'ultima, si consideri la matrice $U + \lambda V_1$ la quale soddisfa pure alla (66), ove si escludano i valori λ che annullano il determinante $|U + \lambda V_1|$. È facile vedere che alle due matrici

$$U_1 = U + \lambda_1 V_1 , \qquad U_2 = U + \lambda_2 V_1$$

dove λ_1 e λ_2 sono due valori distinti qualunque che soddisfano alla detta disuguaglianza, non può corrispondere, per la (60), una medesima matrice X; perchè infatti ciò accadesse, dovrebbe aversi, per una certa soluzione $\overline{U}$ della (65),

$$\overline{U} U_1 = U_2 ,$$

ossia ponendo $\lambda_3 = \lambda_2 - \lambda_1$,

$$\overline{U} U_1 = U_1 + \lambda_3 V_1$$

onde

$$\lambda_3 V_1 = (\overline{U} - E) U_1 ,$$

e quindi $\lambda_3 = 0$, perchè altrimenti anche la V_1 soddisfarebbe alla (65). Esistono dunque in questo secondo caso, infinite soluzioni della $X^m = A$ appartenenti alla classe corrispondente ad X_0.

Vediamo perciò intanto che ogni classe di soluzioni dell'equazione $X^m = A$ o contiene infinite matrici, o ne contiene una sola; si verifica il primo od il secondo caso, secondo che, per la corrispondente matrice X_0, le matrici permutabili con la X_0 stessa non sono, o sono, tutte quelle permutabili con la X_0^m.

33. — Data allora una qualunque matrice, che possiamo supporre ridotta a forma normale ed indicare ancora con X_0, ricerchiamo quali sono le condizioni perchè le matrici permutabili con X_0 siano tutte quelle permutabili con X_0^m.

Siano $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ le radici distinte di $|X_0 - E\omega| = 0$, e $(\omega - x_i)^{\alpha_{i,1}}$, $(\omega - x_i)^{\alpha_{i,2}}, \ldots, (\omega - x_i)^{\alpha_{i,p_i}}$ i divisori elementari di $X_0 - E\omega$ corrispondenti alla radice x_i $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$; il numero delle costanti arbitrarie che entrano nella più generale matrice permutabile con X_0 è dato allora (V. n. 16) da

$$N = \sum_1^\mu {}_i \, (\alpha_{i,1} + 3\alpha_{i,2} + 5\alpha_{i,3} + \ldots + (2p_i - 1)\alpha_{i,p_i}),$$

ed in modo simile si calcola il numero analogo, che indicheremo con N', per la matrice X_0^m; dobbiamo appunto ricercare le condizioni perchè sia $N' = N$. Se una delle x_i è nulla, ad ogni divisore elementare della $X_0 - E\omega$ relativo ad essa corrispondono m divisori elementari della $X_0^m - E\omega$, e si vede quindi che è $N' > N$. Sia dunque ogni x_i diversa da 0, cioè $|X_0| \neq 0$; i divisori elementari di $X_0^m - E\omega$ sono allora $(\omega - x_i^m)^{\alpha_{i,\varrho}}$ $(i = 1, 2, \ldots, \mu;\ \varrho = 1, 2, \ldots, p_i)$, e se quindi due qualunque x_i^m sono distinte, risulta $N' = N$, mentre se è, ad es., $x_1^m = x_2^m$, si ha evidentemente $N' > N$.

Abbiamo dunque:

La condizione necessaria e sufficiente perchè le matrici permutabili con una matrice X_0 *siano tutte quelle permutabili con* X_0^m, *è che sia* $|X_0| \neq 0$, *e che le potenze* m^{esime} *delle radici distinte di* $|X_0 - E\omega| = 0$ *siano pure tutte distinte.*

Osserviamo ancora che questo criterio è completamente razionale; se infatti è Q_j un qualunque divisore primo di $|X_0 - E\omega|$, in un campo di razionalità arbitrario, che contenga gli elementi di X_0, ed H_j la corrispondente matrice di forma normale, l'equazione

$|H_j^m - E\omega| = 0$ ha per radici le potenze m^{esime} di quelle di $Q_j(\omega) = 0$, onde basta verificare, il che si fa razionalmente, che, per ogni detto divisore Q_j, l'equazione corrispondente $|H_j^m - E\omega| = 0$ ha tutte le radici distinte.

34. — Ricordando ora ciò che sopra abbiamo detto, vediamo che quando sia $|A| = 0$ *non esisteranno* certamente classi di soluzioni della $X^m = A$ costituite da un'unica matrice; se poi è $|A| \neq 0$, queste classi sono quelle e quelle sole per le quali la corrispondente matrice X_0 è tale che le potenze m^{esime} di due radici distinte qualunque di $|X_0 - E\omega| = 0$ siano pure distinte. E poichè, in generale, per $|A| \neq 0$, i divisori elementari di ogni matrice $X_0 - E\omega$ si ottengono da quelli di $A - E\omega$ sostituendo in ognuno di essi al corrispondente valore della radice ω_i un valore qualunque di $\sqrt[m]{\omega_i}$, vediamo che le X_0 che danno luogo ad una soluzione sola si otterranno precisamente prendendo uno stesso valore di $\sqrt[m]{\omega_i}$ per tutti i divisori elementari corrispondenti ad ω_i. Possiamo così dire:

Ogni classe di soluzioni dell'equazione $X^m = A$ *o contiene infinite soluzioni o ne contiene una sola. Perchè, nel campo di razionalità di tutti i numeri reali e complessi, esistano classi che si riducano ad una sola soluzione è necessario e sufficiente che sia* $|A| \neq 0$, *e se* μ *è il numero delle radici distinte di* $|A - E\omega| = 0$, *il numero di tali classi è* m^μ.

Dalle cose ora viste segue facilmente la condizione perchè la matrice A ammetta un numero finito di radici m^{esime}; è necessario e sufficiente per questo che *ogni matrice* X_0 venga *necessariamente* ad essere formata nel modo che poco fa abbiamo detto per quelle matrici X_0 che danno luogo ad un'unica soluzione della $X^m = A$; e per questo occorre e basta evidentemente che la matrice $A - E\omega$ ammetta, per ogni radice ω_i, un solo divisore elementare. Questa condizione equivale all'altra che non esista alcun divisore (variabile) comune a tutti i minori di ordine $n-1$ della matrice $A - E\omega$; la proprietà ottenuta può dunque enunciarsi in modo affatto indipendente dal campo di razionalità considerato, nel modo che segue:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una matrice A *am-*

metta un numero finito di radici m^{esime}, è che sia $|A| \neq 0$ e che ad ogni divisore primo di $|A - E\omega|$ (in un qualunque campo di razionalità, che contenga gli elementi di A) corrisponda un solo divisore elementare di $A - E\omega$. — Se μ è il numero delle radici distinte di $|A - E\omega| = 0$, il numero delle radici m^{esime} di A, nel campo di razionalità di tutti i numeri reali e complessi, è m^{μ}.

Si può notare che una matrice generica si trova nel caso di quest'ultimo teorema.

35. — Andiamo ora a caratterizzare in altro modo le soluzioni della $X^m = A$, uniche della propria classe, che abbiamo considerato nei n.i precedenti, e che potrebbero dirsi le *soluzioni singolari* della nostra equazione, in quanto che non si ottengono da alcuna soluzione con costanti arbitrarie, particolarizzando i valori delle costanti medesime.

Sia, come precedentemente, X_0 la matrice normale corrispondente ad una di queste soluzioni; avremo, per ciò che abbiamo visto, $|A| \neq 0$, e se $(\omega - \omega_i)^{\alpha_{i,\rho}}$ $(i = 1, 2, \dots, \mu;\ \rho = 1, 2, \dots, p_i)$ sono i divisori elementari di $A - E\omega$, e quindi anche di $X_0^m - E\omega$, quelli di $X_0 - E\omega$ saranno $(\omega - x_i)^{\alpha_{i,\rho}}$ $(i = 1, 2, \dots, \mu;\ \rho = 1, 2, \dots, p_i)$, essendo $x_i^m = \omega_i$. Il numero delle potenze linearmente indipendenti, tanto della matrice X_0 come della X_0^m, è uguale allora (cfr. n. 17) al numero delle potenze indipendenti della A, è dato cioè da

$$\bar{\alpha} = \alpha_{1,1} + \alpha_{2,1} + \dots + \alpha_{\mu,1};$$

ne segue che le prime $\bar{\alpha}$ potenze $X_0^{sm} = PA^s P^{-1}$ $(s = 0, 1, \dots, \bar{\alpha} - 1)$ della X_0^m costituiscono un sistema *completo* di potenze linearmente indipendenti *della matrice* X_0, e quindi una potenza qualunque di X_0, in particolare la X_0 stessa, sarà esprimibile per mezzo di un aggregato delle suddette potenze X_0^{sm} $(s = 0, 1, \dots, \bar{\alpha} - 1)$. Avremo dunque, per certi coefficienti λ_s,

$$X_0 = \sum_{0}^{\bar{\alpha}-1}{}_s \lambda_s X_0^{sm},$$

e se P è una soluzione della (59), otteniamo

$$X = P^{-1} X_0 P = \sum_{0}^{\bar{\alpha}-1}{}_s \lambda_s P^{-1} X_0^{sm} P = \sum_{0}^{\bar{\alpha}-1}{}_s \lambda_s A^s,$$

ossia *ogni soluzione* X, *unica della propria classe, è esprimibile come aggregato lineare di potenze di* A.

Supponiamo viceversa che questo accada, e si abbia quindi, per certi coefficienti λ_s

$$X = \sum_0^{\bar{\alpha}-1}{}_s \lambda_s A^s .$$

Se allora è $X = P_1^{-1} X_0 P_1$, abbiamo

$$X_0 = P_1 X P_1^{-1} = \sum_0^{\bar{\alpha}-1}{}_s \lambda_s P_1 A^s P_1^{-1} ,$$

onde per la (59)

$$X_0 = \sum_0^{\bar{\alpha}-1}{}_s \lambda_s X_0^{sm} ,$$

e quindi per qualunque matrice P che soddisfi alla (59) medesima

$$P^{-1} X_0 P = \sum_0^{\bar{\alpha}-1}{}_s \lambda_s (P^{-1} X_0^m P)^s = \sum_0^{\bar{\alpha}-1}{}_s \lambda_s A^s = X .$$

La soluzione X è dunque unica della propria classe. Abbiamo così:

Le soluzioni della $X^m = A$ *che sono uniche della propria classe sono tutte e sole quelle che possono esprimersi come aggregati lineari di potenze di* A. *Nel campo di razionalità di tutti i numeri reali e complessi, esse sono dunque (cfr. n.° precedente) in numero di* m^μ.

Vediamo inoltre che *se l'equazione* $X^m = A$ *ammette (in un determinato campo di razionalità) un numero finito di soluzioni, esse sono tutte aggregati lineari di potenze di* A.

Il fatto che una matrice A ammetta un numero finito di radici (di un ordine arbitrario) si presenta dunque insieme con gli altri due fatti (cfr. n. 17) che la A possegga il numero massimo n di potenze linearmente indipendenti, e che ogni matrice permutabile con essa sia un aggregato lineare delle sue potenze; e per il medesimo n. 17 tutto ciò accade allora e solo allora che ad ogni divisore primo di $|A - E\omega|$ corrisponde un solo divisore elementare di $A - E\omega$.

36. — Abbiamo visto che se $X = \sum_s \lambda_s A^s$ è una delle soluzioni della $X^m = A$ sopra considerate, i coefficienti λ_s sono quelli stessi che compaiono nella formula $X_0 = \sum_s \lambda_s X_0^{sm}$; essi si determinano quindi razionalmente *quando sia nota la matrice* X_0, e poichè, per i n. 32 e 33, si può giudicare in modo razionale se ad una certa matrice X_0 corrisponde o no una sola soluzione della $X^m = A$, abbiamo così il modo di calcolare, operando in un determinato campo di razionalità R, i coefficienti λ_s delle soluzioni $X = \sum \lambda_s A^s$ che appartengono ad R. – Calcoliamo ora effettivamente i λ_s relativi ad una matrice X_0, nel campo di razionalità di tutti i numeri reali e complessi.

Adoperando le stesse notazioni di sopra, si riconosce intanto facilmente che la relazione $X_0 = \sum_0^{\bar{\alpha}-1}{}_s \lambda_s X_0^{sm}$ equivale al seguente sistema di $\bar{\alpha} = \alpha_{1,1} + \alpha_{2,1} + \ldots + \alpha_{\mu,1}$ equazioni lineari nelle $\bar{\alpha}$ incognite λ_s:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_0^{\bar{\alpha}-1}{}_s \lambda_s x_i^{sm} = x_i \\ \sum_0^{\bar{\alpha}-1}{}_s \binom{sm}{1} \lambda_s x_i^{sm-1} = 1 \\ \sum_0^{\bar{\alpha}-1}{}_s \binom{sm}{2} \lambda_s x_i^{sm-2} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sum_0^{\bar{\alpha}-1}{}_s \binom{sm}{\alpha_{i,1}-1} \lambda_s x_i^{sm-\alpha_{i,1}+1} = 0 \end{array}\right\} , \quad (i = 1, 2, \ldots, \mu).$$

Indichiamo ora con $\chi(\omega)$ il polinomio

$$\chi(\omega) = \sum_0^{\bar{\alpha}-1}{}_s \lambda_s \omega^s = \lambda_0 + \lambda_1 \omega + \ldots + \lambda_{\bar{\alpha}-1} \omega^{\bar{\alpha}-1},$$

e con $\chi'(\omega)$, $\chi''(\omega)$, ... le sue successive derivate (rispetto ad ω), e poniamo

$$\omega = x^m ;$$

il sistema di equazioni precedente può scriversi allora

$$\left.\begin{array}{ll} \chi(\omega_i) & = x_i \\ \left(\dfrac{d\chi}{dx}\right)_{x=x_i} & = 1 \\ \left(\dfrac{d^2\chi}{dx^2}\right)_{x=x_i} & = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \left(\dfrac{d^{\alpha_{i,1}-1}\chi}{dx^{\alpha_{i,1}-1}}\right)_{x=x_i} & = 0 \end{array}\right\} \quad (i=1,2,\ldots,\mu),$$

e poichè si ha

$$\chi'(\omega) = \frac{d\chi}{dx}\frac{dx}{d\omega},$$

$$\chi''(\omega) = \frac{d^2\chi}{dx^2}\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \frac{d\chi}{dx}\frac{d^2x}{d\omega^2},\ldots,$$

le medesime equazioni divengono infine, come facilmente si vede,

$$\chi(\omega_i) = x_i\,,\quad \chi'(\omega_i) = \left(\frac{dx}{d\omega}\right)_{x=x_i\,,\,\omega=\omega_i},\quad \chi''(\omega_i) = \left(\frac{d^2x}{d\omega^2}\right)_{x=x_i\,,\,\omega=\omega_i},\ldots$$

$$\ldots,\chi^{(\alpha_{i,1}-1)}(\omega_i) = \left(\frac{d^{(\alpha_{i,1}-1}x}{d\omega^{\alpha_{i,1}-1}}\right)_{x=x_i\,,\,\omega=\omega_i},$$

$$(i=1,2,\ldots,\mu).$$

Queste condizioni individuano, come è noto, un polinomio $\chi(\omega)$, di grado $\bar{\alpha}-1$, per il quale si ha appunto, come volevamo,

$$X_0 = \chi(X_0^m).$$

Facendo questo per ognuna delle m^μ matrici X_0 alle quali corrisponde una sola soluzione della $X^m = A$, otteniamo così m^μ polinomi, che determinano le soluzioni singolari dell'equazione medesima. Questi polinomi sono appunto quelli trovati da Frobenius, per il caso $m=2$, nella Memoria citata in una nota al principio di questo Capitolo.

Le costanti arbitrarie essenziali che compaiono nelle soluzioni di $X^m = A$.

37. — Consideriamo una classe di soluzioni della nostra equazione $X^m = A$, che contenga infinite soluzioni, e sia X_0 la corrispondente matrice normale. La soluzione generale X della classe si ha, come sappiamo, dalla formula

$$X = P^{-1} X_0 P\,, \tag{60}$$

dove P è la più generale matrice che soddisfa all'equazione

$$P^{-1} X_0^m P = A\,; \tag{59}$$

la considerata soluzione X contiene quindi, in modo razionale, un certo numero di costanti arbitrarie; queste costanti non sono però tutte *essenziali,* in quanto che, come già è stato osservato al n. 32, una medesima matrice X corrisponde a infinite matrici P. Ci proponiamo ora appunto di ricercare quante siano le costanti essenziali, e di vedere come possa ottenersi l'espressione della soluzione generale della classe considerata in funzione *razionale* delle sole costanti essenziali. Opereremo, per fare questa ricerca, in un campo di razionalità R prefissato (che contenga gli elementi di A), onde X_0 sarà una delle matrici normali nel campo R, che si determinano col procedimento indicato ai n.^{i} 28 e 29.

Indichiamo con $U_1, U_2, \ldots, U_k$ un sistema completo di soluzioni linearmente indipendenti (cfr. n. 16) dell'equazione

$$X_0 U = U X_0\,; \tag{65'}$$

poichè ognuna di esse soddisfa anche alla

$$X_0^m V = V X_0^m\,, \tag{66'}$$

potremo indicare un sistema completo di soluzioni linearmente indipendenti di quest'ultima al modo seguente:

$$U_1, U_2, \ldots, U_k\,;\ V_1, V_2, \ldots, V_h\,;$$

con ciò la soluzione più generale della (65)' è data da

$$U = \sum_{1}^{k}{}_i \, \sigma_i U_i \,,$$

è quella della (66)' da

$$V = \sum_{1}^{k}{}_r \, \mu_r U_r + \sum_{1}^{h}{}_s \, \lambda_s V_s \,,$$

le σ_i, μ_r, λ_s essendo costanti arbitrarie, soddisfacenti soltanto, per il nostro scopo, alle condizioni $|\Sigma \sigma_i U_i| \neq 0$, $|\Sigma \mu_r U_r + \Sigma \lambda_s V_s| \neq 0$. Poniamo inoltre

$$U^* = \sum_{1}^{k}{}_r \, \mu_r U_r \,, \quad V^* = \sum_{1}^{h}{}_s \, \lambda_s V_s$$

così che avremo

$$V = U^* + V^* = \sum_{1}^{k}{}_r \, \mu_r U_r + \sum_{1}^{h}{}_s \, \lambda_s V_s \,. \tag{67}$$

Se allora P_1 è una soluzione particolare della (59), la più generale matrice che soddisfa alla (59) medesima si ottiene (V. n. 32) prendendo $P = VP_1$, e la soluzione generale della $X^m = A$, appartenente alla classe considerata, è data quindi, per la (60), da

$$X = (VP_1)^{-1} X_0 (VP_1) = \tag{68}$$

$$= \left\{ \left(\sum_{1}^{k}{}_r \, \mu_r U_r + \sum_{1}^{h}{}_s \, \lambda_s V_s \right) P_1 \right\}^{-1} X_0 \left\{ \left(\sum_{1}^{k}{}_r \, \mu_r U_r + \sum_{1}^{h}{}_s \, \lambda_s V_s \right) P_1 \right\} ,$$

con le μ_r, λ_s arbitrarie (ma non tutte essenziali).

Poniamo ora nella (67) in luogo della matrice $U^* = \Sigma \mu_r U_r$ la matrice E, che è manifestamente del tipo $\Sigma \mu_r U_r$, consideriamo cioè la matrice

$$\overline{V} = \overline{\lambda} E + \overline{V}^* = \overline{\lambda} E + \sum_{1}^{h}{}_j \, \overline{\lambda}_j V_j \,, \tag{67'}$$

avendo posto $\overline{V}^* = \overset{h}{\underset{1}{\Sigma}}{}_j \, \overline{\lambda}_j V_j$, ed essendo le $\overline{\lambda}$, $\overline{\lambda}_j$, $h+1$ parametri arbitrari; essa è una particolare soluzione della (66)' (contenente $h+1$ costanti arbitrarie), e se quindi supponiamo che le $\overline{\lambda}$, $\overline{\lambda}_j$ soddisfino alla disuguaglianza $|\overline{V}| \neq 0$ e poniamo

$$\overline{X} = (\overline{V} P_1)^{-1} X_0 (\overline{V} P_1) = \left\{ (\overline{\lambda} E + \sum_{1}^{h}{}_j \, \overline{\lambda}_j V_j) P_1 \right\}^{-1} X_0 \left\{ (\overline{\lambda} E + \sum_{1}^{h}{}_j \, \overline{\lambda}_j V_j) P_1 \right\},$$

abbiamo manifestamente infinite soluzioni della $X^m = A$. Ma diamo inoltre alle $\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_j$ un sistema di valori $\bar{\lambda}^{(0)}, \bar{\lambda}_j^{(0)}$ che annullino il determinante $|\bar{V}|$, e supponiamo che se nell'espressione ora scritta della $\bar{X}$ facciamo tendere le $\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_j$ rispettivamente a $\bar{\lambda}^{(0)}, \bar{\lambda}_j^{(0)}$, l'espressione medesima tenda ad una matrice limite finita $\bar{X}^{(0)}$ [1]); anche la matrice $\bar{X}^{(0)}$ soddisfa evidentemente, per la continuità delle funzioni razionali, all'equazione $X^m = A$; essa però può non essere simile ad X_0 [2]). Noi supporremo dunque che *nell'espressione* (68)', *le* $\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_j$ *possano assumere anche valori pei quali sia* $|\bar{\lambda}E + \sum_1^h{}_j \bar{\lambda}_j V_j| = 0$, *purchè la matrice* $\bar{X}$ *data dalla* (68)' *medesima rimanga finita e simile ad* X_0, *e dimostreremo, in primo luogo, che la* $\bar{X}$ *definita dalla* (68)', *con le* $\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_j$ *arbitrarie (nel senso detto), dà precisamente la soluzione generale della* $X^m = A$ *della classe considerata;* dimostreremo cioè che presi comunque dei valori μ_r, λ_s (soddisfacenti alla condizione $|V| \neq 0$) è possibile scegliere dei valori $\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_j$ pei quali la $\bar{X}$ data (nel senso indicato) dalla (68)' risulti uguale alla X data dalla (68).

Consideriamo perciò certi valori μ_r, λ_s e la V corrispondente, e supponiamo che, oltre soddisfare alla condizione $|V| \neq 0$, *soddisfino anche all'altra*

$$|U^*| \neq 0. \tag{69}$$

La più generale soluzione della (66)' che, introdotta nella (68), dà luogo alla stessa matrice X che la V considerata, è data, per il n. 32, da

$$UV = U(U^* + V^*) = \sum_1^h{}_i \sigma_i U_i \left(\sum_1^h{}_r \mu_r U_r + \sum_1^h{}_s \lambda_s V_s \right)$$

con le σ_i arbitrarie, soggette all'unica condizione $|U| \neq 0$. Questa

---

[1]) Con questo intendiamo evidentemente che ogni elemento della matrice secondo membro della (68)' abbia un limite finito, che sarà l'elemento corrispondente della $\bar{X}^{(0)}$.

[2]) Vedremo di ciò un esempio al n. 47.

matrice UV soddisfacendo alla (64)′ sarà della forma

$$(70) \qquad \mathrm{UV} = \sum_1^k{}_t \mathrm{A}_t \mathrm{U}_t + \sum_1^h{}_\tau \mathrm{B}_\tau \mathrm{V}_\tau ,$$

ed è facile calcolare i coefficienti A_t, B_τ; ponendo infatti

$$\mathrm{U}_i \mathrm{U}_r = \sum_1^k{}_t \varepsilon_{irt} \mathrm{U}_t ,$$

$$\mathrm{U}_i \mathrm{V}_s = \sum_1^k{}_t \alpha_{ist} \mathrm{U}_t + \sum_1^h{}_\tau \beta_{is\tau} \mathrm{V}_\tau ,$$

si ottiene subito

$$\mathrm{A}_t = \sum_1^k{}_{i,r} \sigma_i \mu_r \varepsilon_{irt} + \sum_1^k{}_i \sum_1^h{}_s \sigma_i \lambda_s \alpha_{ist} ,$$

$$\mathrm{B}_\tau = \sum_1^k{}_i \sum_1^h{}_s \sigma_i \lambda_s \beta_{is\tau} ,$$

e ordinando rispetto alle σ_i

$$(71) \qquad \mathrm{A}_t = \sum_1^k{}_i \left\{ \sum_1^k{}_r \mu_r \varepsilon_{irt} + \sum_1^h{}_s \lambda_s \alpha_{ist} \right\} \sigma_i ,$$

$$(72) \qquad \mathrm{B}_\tau = \sum_1^k{}_i \left(\sum_1^h{}_s \lambda_s \beta_{is\tau} \right) \sigma_i .$$

Si consideri ora il prodotto

$$\left(\sum_1^k{}_i x_i \mathrm{U}_i\right) \mathrm{U}^* = \left(\sum_1^k{}_i x_i \mathrm{U}_i\right)\left(\sum_1^k{}_r \mu_r \mathrm{U}_r\right) = \sum_1^k{}_t \left(\sum_1^k{}_{i,r} x_i \mu_r \varepsilon_{irt}\right) \mathrm{U}_t ,$$

e si osservi che per essere $|\mathrm{U}^*| \neq 0$ le indeterminate x_i debbono potersi scegliere in modo che le k espressioni $\sum\limits_{i,r} x_i \mu_r \varepsilon_{irt}$ $(t = 1, 2, \ldots, k)$ assumano k valori prefissati ad arbitrio; questo porta che si abbia $|\sum_1^k{}_r \mu_r \varepsilon_{irt}| \neq 0$, $(i, t = 1, 2, \ldots, k)$. Se dunque consideriamo il determinante

$$(73) \qquad \Delta = \left| \sum_1^k{}_r \mu_r \varepsilon_{irt} + \sum_1^h{}_s \lambda_s \alpha_{ist} \right| , \qquad (i, t = 1, 2, \ldots, k) ,$$

vediamo che esso, pensato come funzione delle μ_r, λ_s, non è identicamente nullo, *e noi imporremo alle* μ_r, λ_s *che consideriamo l'altra condizione*

$$(74) \qquad \Delta = \left| \sum_1^k {}_r\, \mu_r\, \varepsilon_{irt} + \sum_1^h {}_s\, \lambda_s\, \alpha_{ist} \right| \neq 0 .$$

Dalla (71) vediamo allora che possono scegliersi le σ_i, ed in un solo modo, così che le A_t assumano valori fissati a piacere, e noi sceglieremo quei valori $A_t^{(0)}$ pei quali è

$$\sum_1^k {}_t\, A_t^{(0)} U_t = E ;$$

indicheremo con $\overline{\sigma}'_i$ i valori delle σ_i che così si ottengono dalle (71); le $\overline{\sigma}'_i$ saranno perciò quelle funzioni razionali fratte delle μ_r, λ_s, aventi tutte per denominatore il determinante Δ, che risultano *individuate* dalle equazioni

$$(75) \qquad \sum_1^k {}_i \left\{ \sum_1^k {}_r\, \mu_r\, \varepsilon_{irt} + \sum_1^h {}_s\, \lambda_s\, \alpha_{ist} \right\} \overline{\sigma}'_i = A_t^{(0)} , \qquad (t = 1, 2, \ldots, k) .$$

Indichiamo con $\overline{\sigma}_i$ i rispettivi numeratori, così che avremo $\overline{\sigma}'_i = \frac{\overline{\sigma}_i}{\Delta}$ e con $\overline{\mathrm{U}}$ la corrispondente soluzione della (65)':

$$\overline{U} = \sum_1^k {}_i\, \overline{\sigma}'_i\, U_i = \frac{1}{\Delta} \sum_1^k {}_i\, \overline{\sigma}_i\, U_i ;$$

ed imponiamo alle μ_r, λ_s *la nuova condizione*

$$(76) \qquad |\overline{U}| \neq 0 \qquad \textit{ossia} \qquad \left| \sum_1^k {}_i\, \overline{\sigma}_i\, U_i \right| \neq 0 .$$

Per quel che abbiamo ricordato poco fa è chiaro allora che alla matrice $\overline{U}V$ corrisponde quella medesima soluzione della $X^m = A$ che corrisponde alla matrice V; si ha cioè

$$(77) \qquad X = (\overline{U} V P_1)^{-1} X_0 (\overline{U} V P_1) ,$$

dove la X del primo membro si intende che sia quella definita dalla (68).

Dalle formule (70), (71), (72) otteniamo ora, in seguito alle (75),

$$\overline{\mathrm{U}}\mathrm{V} = \mathrm{E} + \sum_{1}^{h}{}_{\tau}\, \overline{\mathrm{B}}'_{\tau}\mathrm{V}_{\tau}\,,$$

essendo

$$\overline{\mathrm{B}}'_{\tau} = \frac{1}{\Delta}\sum_{1}^{k}{}_{i}\left(\sum_{1}^{h}{}_{s}\,\lambda_s\beta_{is\tau}\right)\overline{\sigma}_i\,;$$

e se poniamo

$$\overline{\mathrm{B}}_{\tau} = \sum_{1}^{k}{}_{i}\left(\sum_{1}^{h}{}_{s}\,\lambda_s\beta_{is\tau}\right)\overline{\sigma}_i\,, \tag{78}$$

saranno le $\overline{\mathrm{B}}_{\tau}$ funzioni razionali intere delle $\mu_r\,, \lambda_s$, ed avremo

$$\overline{\mathrm{U}}\mathrm{V} = \mathrm{E} + \frac{1}{\Delta}\sum_{1}^{h}{}_{\tau}\,\overline{\mathrm{B}}_{\tau}\mathrm{V}_{\tau}\,.$$

Dalla (77) si deduce allora

$$\mathrm{X} = \left\{\left(\Delta\mathrm{E} + \sum_{1}^{h}{}_{\tau}\,\overline{\mathrm{B}}_{\tau}\mathrm{V}_{\tau}\right)\mathrm{P}_1\right\}^{-1}\mathrm{X}_0\left\{\left(\Delta\mathrm{E} + \sum_{1}^{h}{}_{\tau}\,\overline{\mathrm{B}}_{\tau}\mathrm{V}_{\tau}\right)\mathrm{P}_1\right\}, \tag{79}$$

nella quale la X del primo membro è la matrice funzione delle $\mu_r\,, \lambda_s$ data dalla (68), e le $\Delta\,, \overline{\mathrm{B}}_{\tau}$ del secondo membro sono definite dalle (73) e (78).

Se confrontiamo ora la (79) con la (68)′ vediamo che dalla formula (68)′ si ottiene la stessa matrice X che dalla (68), quando i parametri $\overline{\lambda}\,, \overline{\lambda}_j$ della (68)′ si scelgano in funzione dei parametri $\mu_r\,, \lambda_s$ della (68) al modo seguente.

$$\left\{\begin{aligned} \overline{\lambda} &= \Delta = \left|\sum_{1}^{k}{}_{r}\,\mu_r\varepsilon_{irt} + \sum_{1}^{h}{}_{s}\,\lambda_s\alpha_{ist}\right| \\ \overline{\lambda}_j &= \overline{\mathrm{B}}_j = \sum_{1}^{k}{}_{i}\left(\sum_{1}^{h}{}_{s}\,\lambda_s\beta_{isj}\right)\overline{\sigma}_i \end{aligned}\right. \tag{80}$$

essendo le $\overline{\sigma}_i$ le funzioni razionali intere delle μ_r e delle $\lambda_s\,, \overline{\sigma}_i = \Delta\overline{\sigma}'_i$, e le $\overline{\sigma}'_i$ definite dalle (75). Ciò dimostra appunto, sotto le ipotesi (69), (74) e (76), quello che avevamo affermato.

Occorre ora togliere le tre ipotesi (69), (74) e (76).

Consideriamo per questo il determinante

$$\left| \Delta E + \sum_1^h{}_\tau \overline{B}_\tau V_\tau \right|$$

nel quale le $\Delta, \overline{B}_\tau$ sono le funzioni definite dalle (73) e (78); si ha

$$\left| \Delta E + \sum_1^h{}_\tau \overline{B}_\tau V_\tau \right| = \Delta^n \left| E + \sum_1^h{}_\tau \frac{\overline{B}_\tau}{\Delta} V_\tau \right| = \Delta^n |\overline{U}| \, |V|$$

e quindi

$$\left| \Delta E + \sum_1^h{}_\tau \overline{B}_\tau V_\tau \right| = \left| \sum_1^k{}_i \overline{\sigma}_i U_i \right| |V| ,$$

e questa relazione, nella quale $\Delta, \overline{B}_\tau, \overline{\sigma}_i, V$ sono le funzioni delle μ_r, λ_s sopra definite, vale, per il principio di identità delle funzioni razionali intere, indipendentemente dalle ipotesi fatte.

Indicando allora con le notazioni $\left\{ \left(\sum_1^k{}_r \mu_r U_r + \sum_1^h{}_s \lambda_s V_s \right) P_1 \right\}_0$, $\left\{ \left(\Delta E + \sum_1^h{}_\tau \overline{B}_\tau V_\tau \right) P_1 \right\}_0$ le matrici *aggiunte* rispettivamente delle matrici $\left\{ \left(\sum_1^k{}_r \mu_r U_r + \sum_1^h{}_s \lambda_s V_s \right) P_1 \right\}$, $\left\{ \left(\Delta E + \sum_1^h{}_\tau \overline{B}_\tau V_\tau \right) P_1 \right\}$, e mettendo nel primo membro della (79) l'espressione (68), potremo scrivere la (79) medesima al modo seguente:

$$(81) \quad \frac{1}{|V| \cdot |P_1|} \left\{ \left(\sum_1^k{}_r \mu_r U_r + \sum_1^h{}_s \lambda_s V_s \right) P_1 \right\}_0 X_0 \left\{ \left(\sum_1^k{}_r \mu_r U_r + \sum_1^h{}_s \lambda_s V_s \right) P_1 \right\} =$$

$$= \frac{1}{|V| \cdot |P_1|} \cdot \frac{1}{\left| \sum_1^k{}_i \overline{\sigma}_i U_i \right|} \left\{ \left(\Delta E + \sum_1^h{}_\tau \overline{B}_\tau V_\tau \right) P_1 \right\}_0 X_0 \left\{ \left(\Delta E + \sum_1^h{}_\tau \overline{B}_\tau V_\tau \right) P_1 \right\} ,$$

e questa relazione, sebbene dimostrata sotto le ipotesi di sopra, sarà, per il principio di identità delle funzioni razionali intere, una relazione *identica rispetto alle* μ_r, λ_s *considerate come variabili;* ogni elemento della matrice $\left\{ \left(\Delta E + \sum_1^h{}_\tau \overline{B}_\tau V_\tau \right) P_1 \right\}_0 X_0 \left\{ \left(\Delta E + \sum_1^h{}_\tau \overline{B}_\tau V_\tau \right) P_1 \right\}$ sarà cioè divisibile per la funzione delle μ_r e delle λ_s, $\left| \sum_1^k{}_i \overline{\sigma}_i U_i \right|$.

Sia ora $\mu_r^{(0)}, \lambda_s^{(0)}$ un particolare sistema di valori delle μ_r, λ_s, pei quali le condizioni (69), (74) e (76) possano anche non esser verificate, e siano $\overline{\lambda}^{(0)}, \overline{\lambda}_j^{(0)}$ i valori delle $\overline{\lambda}, \overline{\lambda}_j$ ad essi corrispondenti per le formule (80); considerando la matrice $\overline{X}$, funzione delle $\overline{\lambda}, \overline{\lambda}_j$, definita dalla (68)', e ponendo in essa per le $\overline{\lambda}, \overline{\lambda}_j$ le espressioni (80), dalla formula (81) otteniamo evidentemente, in ogni caso,

$$\lim_{\mu_r = \mu_r^{(0)}, \lambda_s = \lambda_s^{(0)}} \overline{X} = X^{(0)},$$

avendo indicato con $X^{(0)}$ la matrice determinata dalla (68) per $\mu_r = \mu_r^{(0)}, \lambda_s = \lambda_s^{(0)}$; essendo la $\overline{X}$ funzione razionale, e quindi continua, delle $\overline{\lambda}, \overline{\lambda}_j$, si deduce di qui

$$\lim_{\overline{\lambda} = \overline{\lambda}^{(0)}, \overline{\lambda}_j = \overline{\lambda}_j^{(0)}} \overline{X} = X^{(0)};$$

ciò che avevamo enunciato è così dimostrato affatto in generale.

Nell'espressione (68)' della soluzione generale della $X^m = A$, della classe considerata, compaiono $h+1$ costanti, ma è chiaro che solo dai loro h rapporti dipende la X; vogliamo ora dimostrare che queste h costanti sono effettivamente *essenziali*, e con ciò la questione propostaci in principio di questo n.° sarà risoluta.

Ricordiamo perciò di aver dimostrato poco sopra che considerata una matrice V data dalla (67), nella quale le μ_r, λ_s soddisfino a tutte le suddette condizioni di disuguaglianza, esiste *una ed una sola* soluzione $U = \overline{U}$ della (65)' per la quale la matrice $\overline{U}V$ venga ad essere della forma

$$\overline{U}V = E + \sum_1^h{}_\tau \overline{\lambda}'_\tau V_\tau,$$

con opportuni valori delle $\overline{\lambda}'_\tau$, od in altri termini esiste una ed una sola matrice della forma

$$E + \sum_1^h{}_\tau \overline{\lambda}'_\tau V_\tau$$

che dia luogo alla stessa soluzione X che la V considerata. — Si abbiano allora due particolari matrici V della forma $\overline{\mathrm{V}}$

$$\overline{\mathrm{V}}^{(1)} = \overline{\lambda}^{(1)}\mathrm{E} + \sum_{1}^{h}{}_{\tau}\, \overline{\lambda}_{\tau}^{(1)} \mathrm{V}_{\tau} \;,\quad \overline{\mathrm{V}}^{(2)} = \overline{\lambda}^{(2)}\mathrm{E} + \sum_{1}^{h}{}_{\tau}\, \overline{\lambda}_{\tau}^{(2)} \mathrm{V}_{\tau}$$

che soddisfino ambedue a tutte le indicate condizioni, così che sarà in particolare $\overline{\lambda}^{(1)} \neq 0$, $\overline{\lambda}^{(2)} \neq 0$, e supponiamo che ad esse corrisponda una medesima soluzione X; vi sarà allora per ambedue *una sola e medesima* matrice della forma $\mathrm{E} + \sum_{1}^{h}{}_{\tau}\, \overline{\lambda}'_{\tau} \mathrm{V}_{\tau}$ che dà luogo alla stessa soluzione X, e poichè la matrice di tal forma corrispondente alla $\overline{\mathrm{V}}^{(1)}$ è manifestamente

$$\mathrm{E} + \sum_{1}^{h}{}_{\tau}\, \frac{\overline{\lambda}_{\tau}^{(1)}}{\overline{\lambda}^{(1)}} \mathrm{V}_{\tau} \,,$$

e quella corrispondente alla $\overline{\mathrm{V}}^{(2)}$

$$\mathrm{E} + \sum_{1}^{h}{}_{\tau}\, \frac{\overline{\lambda}_{\tau}^{(2)}}{\overline{\lambda}^{(2)}} \mathrm{V}_{\tau} \,,$$

avremo

$$\overline{\lambda}^{(1)} : \overline{\lambda}_{1}^{(1)} : \overline{\lambda}_{2}^{(1)} : \ldots : \overline{\lambda}_{h}^{(1)} = \overline{\lambda}^{(2)} : \overline{\lambda}_{1}^{(2)} : \overline{\lambda}_{2}^{(2)} : \ldots : \overline{\lambda}_{h}^{(2)} .$$

Questo mostra che *in generale* a differenti sistemi di valori degli h rapporti $\overline{\lambda} : \overline{\lambda}_1 : \overline{\lambda}_2 : \ldots : \overline{\lambda}_h$ corrispondono per la (68)′ differenti matrici $\overline{\overline{\mathrm{X}}}$, ossia che questi h rapporti sono altrettanti parametri essenziali.

Poichè infine nella (68)′ questi h rapporti figurano razionalmente, possiamo enunciare il teorema:

La più generale soluzione della $\mathrm{X}^m = \mathrm{A}$ *appartenente ad una classe determinata, della quale sia* X_0 *la matrice normale, dipende in modo razionale da h costanti essenziali, essendo h la differenza fra il numero delle matrici linearmente indipendenti permutabili con* X_0^m, *ossia con* A, *ed il medesimo numero relativo alla* X_0. — *La* (68)′ *dà l'espressione richiesta della detta soluzione generale; in essa si debbono far tendere le* $\overline{\lambda}, \overline{\lambda}_j$ *anche ai valori limiti che annullano il determinante* $\left| \overline{\lambda}\mathrm{E} + \sum_{1}^{h}{}_{j}\, \overline{\lambda}_j \mathrm{V}_j \right|$, *purchè la* $\overline{\mathrm{X}}$ *stessa* *tenda con ciò ad una matrice limite finita e simile ad* X_0. — *Se è* $h=0$ *la classe contiene, secondo il n. 32, una soluzione sola.*

Nelle applicazioni numeriche si può anche, senza adoperare quest'ultima formula, calcolare la X mediante la (60), poichè sarà facile, in generale, eseguire direttamente la riduzione delle costanti, nell'espressione così ottenuta.

38. — Proponiamoci ora di ottenere l'infinità delle soluzioni dell'equazione $X^m = A$ *nel campo di razionalità di tutti i numeri reali e complessi,* ossia di determinare il numero massimo fra i numeri che indicano l'infinità delle soluzioni di ciascuna classe dell'equazione medesima; basta perciò, per il n.° precedente, prendere X_0 in modo che il numero delle matrici linearmente indipendenti permutabili con X_0 stessa sia il più piccolo possibile.

Poniamo, per maggior chiarezza, $X_0 = \begin{pmatrix} X'_0 & 0 \\ 0 & X''_0 \end{pmatrix}$, essendo X'_0 la parte di X_0 relativa alle radici diverse da 0, X_0'' invece quella relativa alle radici nulle; la più generale matrice U permutabile con X_0 sarà allora anch'essa della forma $U = \begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & U'' \end{pmatrix}$, dove le matrici U' e U'' sono le più generali matrici permutabili rispettivamente con le X'_0, X''_0 [1]); se quindi scegliamo le X'_0, X''_0 in modo che il numero delle costanti arbitrarie che entrano nelle corrispondenti U', U'' sia il più piccolo possibile, anche la $X_0 = \begin{pmatrix} X'_0 & 0 \\ 0 & X''_0 \end{pmatrix}$ soddisfarà alla condizione voluta. Possiamo dunque fare l'indicata ricerca separatamente per la X'_0 e per la X''_0.

Cominciando dalla X'_0, si indichi con ω_1 una radice non nulla dell'equazione $|A - E\omega| = 0$, e con $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \dots \geqq \alpha_p$ gli esponenti dei relativi divisori elementari di $A - E\omega$; se $x_1, x_2, \dots, x_m$ sono le

---

[1]) Ponendo infatti $U = \begin{pmatrix} U' & V' \\ V'' & U'' \end{pmatrix}$, da $X_0 U = U X_0$ si deduce

$$X'_0 U' = U' X'_0 \quad , \quad X'_0 V' = V' X''_0$$
$$X''_0 V'' = V'' X'_0 \quad , \quad X''_0 U'' = U'' X''_0 ,$$

onde, per il teorema del n. 14, $V' = V'' = 0$. Cfr. del resto anche il n. 18.

m radici m^{esime} di ω_1, i divisori elementari di $X'_0 - E\omega$, corrispondenti ad ω_1, potranno, secondo il n. 30, indicarsi con $(\omega - x_i)^{e_{i,1}}, \ldots, (\omega - x_i)^{e_{i,q_i}}, (e_{i,1} \geq e_{i,2} \geq \ldots \geq e_{i,q_i}), \ (i = 1, 2, \ldots, m)$, dove si ha $q_1 + q_2 + \ldots + q_m = p \ (q_i \geq 0)$, ed i p numeri $e_{i,1}, e_{i,2}, \ldots, e_{i,q_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ non sono altro che i numeri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ presi, senza ripetizioni, in un modo affatto arbitrario. Il numero delle costanti che entrano nella parte relativa ad ω_1 della più generale matrice permutabile con X'_0 è dato allora (cfr. n. 16) dalla somma

$$\begin{aligned} & e_{1,1} + 3e_{1,2} + 5e_{1,3} + \ldots + (2q_1 - 1)\, e_{1,q_1} + \\ & + e_{2,1} + 3e_{2,2} + 5e_{2,3} + \ldots + (2q_2 - 1)\, e_{2,q_2} + \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + e_{m,1} + 3e_{m,2} + 5e_{m,3} + \ldots + (2q_m - 1)\, e_{m,q_m}, \end{aligned}$$

intendendo che quando sia 0 uno dei q_i manchi la riga corrispondente. Si tratta dunque di distribuire i p numeri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ in un numero minore od uguale ad m di righe, gli elementi di ciascuna delle quali non vadano mai crescendo, in modo che se si suppongono scritti in una colonna i primi elementi di ogni riga, e così i secondi, i terzi, ecc., e si somma poi la prima colonna, la seconda moltiplicata per 3, la terza moltiplicata per 5, ecc., si ottenga la minima somma possibile. Dimostreremo ora che questo si ottiene formando la prima colonna ordinatamente con i primi m numeri α_ϱ, la seconda con gli m numeri α_ϱ successivi, ecc.

La cosa è manifesta quando sia $p \leq m$, sicchè supporremo senz'altro $p > m$. Consideriamo dunque le m righe

$$(82) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} \alpha_1 & \alpha_{m+1} & \alpha_{2m+1} & \cdots \\ \alpha_2 & \alpha_{m+2} & \alpha_{2m+2} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \alpha_{2m} & \alpha_{3m} & \cdots \end{array} \right.$$

e disponiamo i medesimi numeri α_ϱ, senza ripeterli, in un altro quadro

$$(83)\qquad \begin{Bmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & e_{1.3} & \dots \\ e_{2,1} & e_{2,2} & e_{2,3} & \dots \\ e_{3,1} & e_{3,2} & e_{3,3} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Bmatrix},$$

dove non supponiamo nemmeno che gli elementi di ogni colonna siano in ugual numero, purchè sempre in numero minore od uguale ad m, nè che sia $e_{i,1} \geq e_{i,2} \geq \dots$; vogliamo dimostrare che la somma formata nel modo sopra indicato per il quadro (83) è maggiore od uguale a quella relativa al quadro (82). Se anzitutto le colonne del quadro (83) non sono costituite tutte da m elementi, le completeremo (eccettuato l'ultima) con degli 0, scrivendone altrettanti anche nel quadro (82) di seguito ai numeri che già vi sono; potremo così supporre, senza alterare le somme corrispondenti, che anche per il quadro (83), come per l'(82), ogni colonna (eccettuata l'ultima) contenga m elementi.

Supponiamo che il numero $e_{1,1}$ occupi nel quadro (82) il posto della riga h e della colonna k, e formiamo il nuovo quadro

$$\begin{matrix} e_{1,1} & \alpha_m & \alpha_{2m} & \dots & \alpha_{(k-1)m} & \dots \\ \alpha_1 & \alpha_{m+1} & \alpha_{2m+1} & \dots & \alpha_{(k-1)m+1} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{h-1} & \alpha_{m+h-1} & \alpha_{2m+h-1} & \dots & \alpha_{(k-1)m+h-1} & \dots \\ \alpha_h & \alpha_{m+h} & \alpha_{2m+h} & \dots & \alpha_{(k-1)m+h+1} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m-1} & \alpha_{2m-1} & \alpha_{3m-1} & \dots & \alpha_{km} & \dots \end{matrix}$$

ottenuto dall'(82) portando al primo posto l'elemento $e_{1,1}$, e facendo quindi indietreggiare di un posto tutti gli altri elementi; se per questo quadro formiamo la somma della prima colonna, più 3 volte quella della seconda, ecc., e indichiamo con S' la somma totale, e la confrontiamo con la analoga S per il quadro (82), vediamo facilmente che è

$$(84)\qquad S' = S + 2(\alpha_m + \alpha_{2m} + \dots + \alpha_{(k-1)m}) - 2(k-1)e_{1,1},$$

e poichè si ha $\alpha_m \geq \alpha_{2m} \geq \dots \geq \alpha_{(k-1)m} \geq e_{1,1}$, e quindi

$$\alpha_m + \alpha_{2m} + \dots + \alpha_{(k-1)m} \geq (k-1)e_{1,1},$$

ne segue

$$S' \geq S.$$

Così può operarsi successivamente portando al loro posto $e_{2,1}, e_{3,1}, \dots e_{m,1}, e_{1,2}, \dots, e_{m,2}, \dots$, ed è evidente che vale sempre il medesimo ragionamento, perchè ogni volta gli elementi che seguono dopo l'ultimo elemento portato al suo nuovo posto, non sono mai crescenti nell'ordine adoperato. La somma relativa al quadro (83) è dunque effettivamente maggiore od uguale ad S, come avevamo affermato. — Dalla formula (84) si ottiene inoltre che soltanto quando sia $\alpha_m = \alpha_{2m} = \dots = \alpha_{(k-1)m} = e_{1,1}$, sarà $S' = S$. Si vede allora facilmente che quando noi portiamo al suo nuovo posto uno degli 0 che sopra abbiamo detto di aggiungere alla serie dei numeri $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, avremo effettivamente un aumento nella somma che consideriamo; perchè dunque le somme corrispondenti rispettivamente ai due quadri (82), (83) possano essere uguali, è necessario in particolare che i due quadri medesimi abbiano, *senza l'aggiunta dei detti* 0, un ugual numero di colonne. Questa osservazione ci servirà fra breve.

Passiamo ora alla matrice X''_0, ricercando come anche essa debba scegliersi affinchè il numero delle matrici linearmente indipendenti permutabili con la X''_0 stessa sia il più piccolo possibile. Sia H il numero dei divisori elementari della matrice $A - E\omega$ relativi al divisore ω, e poniamo

$$H = \lambda m + \varepsilon, \qquad (0 \leq \varepsilon < m);$$

per il teorema del n. 30 vi saranno almeno ε divisori elementari di $A - E\omega$ uguali precisamente ad ω, e per formare i divisori elementari delle varie matrici X''_0 dobbiamo per prima cosa escludere un certo numero $\varepsilon + \lambda' m$ di divisori elementari uguali ad ω, dove λ' ha uno qualunque dei valori di cui esso è suscettibile, compatibilmente col numero dei divisori elementari di $A - E\omega$ uguali ad ω; fatto ciò si devono (cfr. sempre il citato teorema) aggruppare ad m ad m i $(\lambda - \lambda')m$ divisori elementari che rimangono, in tutti i modi possibili, così che però in ogni gruppo vi siano al massimo due soli esponenti distinti, e questi differiscano di una unità; moltiplicando allora tutti i divisori elementari di ciascun gruppo otteniamo divisori elementari di una matrice X''_0, i quali hanno dunque il loro esponente maggiore od uguale ad m; i divisori elementari trascurati debbono poi, per formare divisori elementari delle varie matrici X''_0, aggrupparsi ad arbitrio purchè in ogni gruppo ve ne sia sempre meno di m, e moltiplicare come sopra i divisori di ogni gruppo. In questo modo si ottengono tutte le matrici X''_0.

Adoperando per la radice $\omega = 0$ (e vedremo perchè) le stesse notazioni adoperate sopra per una radice qualunque, siano $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_H$ gli esponenti dei divisori elementari di $A - E\omega$ relativi ad ω, e considerando l'j^{esimo} dei gruppi suddetti, si indichi con m_j il numero dei divisori elementari che lo formano e con $e_{1,j}$, $e_{2,j}, \ldots, e_{m_j,j}$ gli esponenti dei divisori elementari medesimi; sarà evidentemente $m_j \leq m$, e il segno $<$ avrà luogo solo per i gruppi relativi agli $\varepsilon + \lambda' m$ divisori lineari di cui sopra. Supponiamo inoltre che i gruppi siano ordinati in modo che le somme $\sum_s e_{s,1}$, $\sum_s e_{s,2}, \ldots$ non vadano mai crescendo, e formiamo il quadro

$$(85) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} e_{1,1} & e_{1,2} & \cdots \\ e_{2,1} & e_{2,2} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{m_1,1} & e_{m_2,2} & \cdots \end{array} \right. ;$$

in esso le prime $\lambda - \lambda'$ colonne hanno m elementi, le altre ne hanno un numero minore, e se per questo quadro noi formiamo la somma S' con la medesima legge che per il quadro (83), otteniamo appunto il numero delle matrici linearmente indipendenti permutabili con la matrice X''_0 relativa all'aggruppamento considerato. Ma se formiamo anche qui il quadro

$$\left.\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_{m+1} & \cdots & \alpha_{(\lambda-1)m+1} & \alpha_{\lambda m+1} \\ \alpha_2 & \alpha_{m+2} & \cdots & \alpha_{(\lambda-1)m+2} & \alpha_{\lambda m+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_H \\ \alpha_m & \alpha_{2m} & \cdots & \alpha_{\lambda m} & \end{matrix}\right\},$$

e indichiamo con S la somma ottenuta da questo nel solito modo, le considerazioni fatte per il quadro (83) provano allora evidentemente che è $S' \geq S$; d'altra parte l'aggruppamento relativo a quest'ultimo quadro soddisfa manifestamente (per le ultime considerazioni del citato n. 30) alla condizione che in ogni colonna non si abbiano al massimo che due esponenti distinti; la somma S dà dunque effettivamente il minimo numero richiesto. Vediamo così che anche per le matrici X''_0 il numero minimo delle costanti arbitrarie che entrano nella più generale matrice permutabile con ciascuna di esse si ottiene con la medesima legge come per le X'_0.

Se dunque indichiamo generalmente con $\alpha_{i,1} \geq \alpha_{i,2} \geq \ldots \geq \alpha_{i,p_i}$ gli esponenti dei divisori elementari di $A - E\omega$ relativi alla radice ω_i (sia essa diversa da 0 o nulla), il numero delle costanti che entrano nella più generale matrice U permutabile con quella X_0 per la quale questo numero riesce minimo, è dato da

$$\sum_i \left\{\alpha_{i,1} + \ldots + \alpha_{i,m} + 3(\alpha_{i,m+1} + \ldots + \alpha_{i,2m}) + 5(\alpha_{i,2m+1} + \ldots + \alpha_{i,3m}) + \ldots\right\}.$$

Se invece dei numeri $\alpha_{i,\varrho}$ introduciamo i numeri n_r $(r = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ che indicano il grado in ω del m.c.d. dei minori di ordine $n-r$ della matrice $A - E\omega$, e teniamo conto delle relazioni $\sum_i \alpha_{i,\varrho} = n_{\varrho-1} - n_\varrho$ si ha

$$\sum_i (\alpha_{i,1} + \ldots + \alpha_{i,m}) = n_0 - n_m, \ \sum_i (\alpha_{i,m+1} + \ldots + \alpha_{i,2m}) = n_m - n_{2m}, \ldots,$$

e quindi il considerato numero viene ad avere l'espressione

$$n_0 + 2(n_m + n_{2m} + \ldots).$$

D'altra parte il numero delle costanti arbitrarie da cui dipende la più generale matrice V permutabile con X_0^m, ossia con A, è dato da

$$n_0 + 2(n_1 + n_2 + \dots);$$

possiamo dunque dire:

Se n_r *è il grado in* ω *del* m. c. d. *dei minori di ordine* $n-r$ *della matrice* $A - E\omega$, *l'infinità delle radici* m^{esime} *di* A *(supposto che ne esistano) è dell'ordine*

$$2(n_1 + \dots + n_{m-1} + n_{m+1} + \dots + n_{2m-1} + n_{2m+1} + \dots).$$

Osserviamo anche che se ad una matrice X_0 corrisponde questa infinità massima, il relativo quadro (85) deve avere, per un'osservazione fatta poco fa a proposito dei quadri (82) e (83), λ o $\lambda+1$ colonne secondo che è $\varepsilon = 0$ o $\varepsilon > 0$, cioè in ogni caso $\left[\dfrac{H+m-1}{m}\right]$ colonne. La caratteristica della considerata X_0 è allora (cfr. n. 31) $n - \left[\dfrac{H+m-1}{m}\right]$, e per il n. 31 medesimo possiamo dire che *le classi di soluzioni della* $X^m = A$ *che hanno la massima infinità, hanno anche la massima caratteristica.* Non è vera l'inversa, come è evidente.

Alcune proprietà formali delle radici.

39. — Indicando, come altrove, con M' la matrice trasposta di una qualunque matrice quadrata M, vediamo che da $X^m = A$ segue [1]) $X'^m = A'$, onde, indicando in generale con $\sqrt[m]{A}$ od $A^{\frac{1}{m}}$ una soluzione qualunque della $X^m = A$, possiamo scrivere

$$\sqrt[m]{A'} = (\sqrt[m]{A})',$$

intendendo che si diano valori opportunamente corrispondenti alle

[1]) Ricordiamo che si ha in generale

$$(M . N \dots P)' = P' \dots N' . M',$$

come pure

$$(M^{-1})' = M'^{-1}, \qquad (|M| \neq 0).$$

costanti arbitrarie che entrano nelle due matrici $\sqrt[m]{A'}$, $\sqrt[m]{A}$. Si può anzi osservare che, due matrici trasposte essendo simili, saranno simili le due matrici corrispondenti $\sqrt[m]{A'} = (\sqrt[m]{A})'$ e $\sqrt[m]{A}$, e quindi a due matrici $\sqrt[m]{A}$ appartenenti a una stessa classe, corrispondono due matrici $\sqrt[m]{A'}$ pure appartenenti alla stessa classe; in particolare se è $\sqrt[m]{A} = \chi(A)$, la $\sqrt[m]{A'}$ corrispondente è $\chi(A')$.

Si ha anche, per $|A| \neq 0$, l'uguaglianza

$$\sqrt[m]{A^{-1}} = (\sqrt[m]{A})^{-1} = A^{-\frac{1}{m}};$$

è infatti $\left\{(\sqrt[m]{A})^{-1}\right\}^m = \left\{(\sqrt[m]{A})^m\right\}^{-1} = A^{-1}$; anche qui si intende che le costanti che entrano in $\sqrt[m]{A}$ e in $\sqrt[m]{A^{-1}}$ devono avere valori opportunamente corrispondenti; a due $\sqrt[m]{A}$ appartenenti ad una stessa classe corrispondono due $\sqrt[m]{A^{-1}}$ pure di ugual classe, onde si corrispondono, in particolare, le radici singolari.

Notiamo per ultimo anche l'uguaglianza

$$\left(A^{-\frac{1}{m}}\right)' = A'^{-\frac{1}{m}};$$

è infatti

$$\left(A^{-\frac{1}{m}}\right)' = \left\{(\sqrt[m]{A})^{-1}\right\}' = \left\{(\sqrt[m]{A})'\right\}^{-1} = (\sqrt[m]{A'})^{-1} = A'^{-\frac{1}{m}};$$

anche per essa valgono le stesse considerazioni che per le precedenti.

Si hanno anche le relazioni seguenti fra determinanti

$$|A^{\frac{1}{m}}| = |A|^{\frac{1}{m}},$$
$$|A^{-\frac{1}{m}}| = |A|^{-\frac{1}{m}},$$

in ciascuna delle quali il secondo membro avrà una od un'altra delle sue determinazioni secondo i valori delle costanti che entrano nel primo membro. La prima di queste uguaglianze è evidente; per la seconda basta ricordare che è

$$|(\sqrt[m]{A})^{-1}| = |\sqrt[m]{A}|^{-1},$$

ed applicare la prima [1]).

Esempi numerici.

40. — Proponiamoci, come esempio della teoria precedentemente svolta, di risolvere l'equazione

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nel campo dei numeri razionali. Indicando con A la matrice del secondo membro si ha

$$|A - E\omega| = -(\omega^3 - 4),$$

onde la $A - E\omega$ ha, nel campo considerato, l'unico divisore elementare $\omega^3 - 4$; l'equazione proposta ammette dunque (n. 34) un numero finito di soluzioni, che sono aggregati lineari di potenze di A. Dobbiamo ora, secondo il n. 28, formare i divisori di terzo grado della funzione

$$|A - E\omega^2| = -(\omega^6 - 4),$$

i quali sono

$$\varphi = \omega^3 - 2 \quad , \quad \varphi' = \omega^3 + 2,$$

e considerare le corrispondenti matrici di forma normale

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X'_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

[1]) Per tutto ciò che si trova in questo n.° cfr. MUTH, *Op. cit.*, pp. 39-40.

Si ha di qui

$$X_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_0'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

e facilmente si verifica che le $X_0^2 - E\omega$, $X_0'^2 - E\omega$ hanno ambedue l'unico divisore elementare $\omega^3 - 4$, onde a ciascuna di esse corrisponde effettivamente una soluzione dell'equazione $X^2 = A$. L'equazione proposta ammette dunque precisamente due soluzioni; per determinarle effettivamente non vi è che da calcolare X_0^4 e $X_0'^4$, e determinare i coefficienti $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda'_0, \lambda'_1, \lambda'_2$ dalle due relazioni

$$X_0 = \lambda_0 E + \lambda_1 X_0^2 + \lambda_2 X_0^4 \quad , \quad X'_0 = \lambda'_0 E + \lambda'_1 X_0'^2 + \lambda'_2 X_0'^4;$$

ciò si fa subito eguagliando, per ognuna di esse, i tre elementi della prima riga della matrice del primo membro coi corrispondenti della matrice del secondo, e si trova così

$$\lambda_0 = \lambda_1 = 0 \ , \ \lambda_2 = \frac{1}{2} \ , \ \lambda'_0 = \lambda'_1 = 0 \ , \ \lambda'_2 = -\frac{1}{2};$$

le due soluzioni dell'equazione proposta sono dunque

$$X = \frac{1}{2} A^2 \ , \ X' = -\frac{1}{2} A^2 .$$

Considerando invece la stessa equazione nel campo di tutti i numeri reali e complessi, essa ammette (n. 34) $2^3 = 8$ soluzioni. Se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono i tre valori di $\sqrt[3]{4}$, e β_i è una determinazione fissa di $\sqrt{\alpha_i}$ $(i = 1, 2, 3)$, le 8 matrici normali X_0 hanno rispettivamente i divisori elementari

$$\begin{array}{lll}
\omega - \beta_1, & \omega - \beta_2, & \omega - \beta_3 \\
\omega - \beta_1, & \omega - \beta_2, & \omega + \beta_3 \\
\omega - \beta_1, & \omega + \beta_2, & \omega - \beta_3 \\
\omega - \beta_1, & \omega + \beta_2, & \omega + \beta_3 \\
\omega + \beta_1, & \omega - \beta_2, & \omega - \beta_3 \\
\omega + \beta_1, & \omega - \beta_2, & \omega + \beta_3 \\
\omega + \beta_1, & \omega + \beta_2, & \omega - \beta_3 \\
\omega + \beta_1, & \omega + \beta_2, & \omega + \beta_3 ;
\end{array}$$

per ciascuna di esse si determinerebbe facilmente la corrispondente soluzione X, ma noi non eseguiremo effettivamente il calcolo. Se le determinazioni β_i di $\sqrt{\alpha_i}$ sono scelte in modo che $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ siano le tre radici cubiche di 2, la prima e l'ultima delle 8 matrici X_0 danno le due soluzioni razionali, sopra trovate, dell'equazione proposta.

41. — Consideriamo ora, come altro esempio, l'equazione

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e indichiamo con B la matrice del secondo membro. Poichè i divisori elementari di $B - E\omega$ sono ω^2, ω, la matrice $X - E\omega$ possederà (n. 30) il solo divisore elementare ω^3, e l'equazione proposta avrà quindi una sola classe di soluzioni corrispondente alla matrice normale

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per determinare queste soluzioni dobbiamo cominciare dal risolvere l'equazione $X_0^2 P = PB$, ossia la

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

la soluzione generale della quale è, come si trova facilmente (V. n. 23),

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & h \\ 0 & a & 0 \\ 0 & k & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & h \\ 0 & k & c \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix},$$

dove le costanti a, b, c, h, k sono soggette (per il nostro scopo) all'unica condizione $ac \neq 0$. Si ha ora

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{h}{ac} & \frac{hk-bc}{a^2c} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & \frac{1}{c} & -\frac{k}{ac} \end{pmatrix},$$

onde la soluzione generale della nostra equazione risulta

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{h}{ac} & \frac{hk-bc}{a^2c} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & \frac{1}{c} & -\frac{k}{ac} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & h \\ 0 & k & c \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{a} - \frac{h}{c} & \frac{c}{a} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{c} & 0 \end{pmatrix},$$

che può scriversi, cambiando opportunamente le costanti,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} & 0 \end{pmatrix},$$

essendo le α, β arbitrarie ($\beta \neq 0$).

Le matrici cicliche.

42. — Dedurremo ora dalla teoria precedentemente svolta le proprietà seguenti, relative alle *matrici cicliche*. Una matrice X si dice *ciclica, di grado m*, quando la sua potenza m^{esima} è uguale alla matrice unità; una matrice ciclica X si dice poi *primitiva* di grado m, se per nessun esponente $l < m$ si ha $X^l = E$. La determinazione di tutte le matrici cicliche di grado m equivale dunque alla risoluzione dell'equazione

$$X^m = E.$$

Le matrici X_0 relative a questa equazione sono, secondo il n. 30, tutte quelle rappresentate dalla matrice

$$\left(\begin{array}{cccc} \eta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \eta_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \eta_n \end{array}\right), \tag{86}$$

dove, essendo n l'ordine di E, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ rappresentano n radici m^{esime}, uguali o distinte, dell'unità; poichè inoltre è evidentemente $X_0^m = E$, l'equazione (59) risulta identicamente verificata per qualsiasi matrice P, il che significa che ogni matrice simile ad una delle X_0 considerate soddisfa all'equazione $X^m = E$, come era evidente a priori. Abbiamo dunque:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una matrice X *sia ciclica di grado* m, *è che le radici dell'equazione* $|X - E\omega| = 0$ *siano tutte radici* m^{esime} *dell'unità, e che i divisori elementari di* $X - E\omega$ *siano tutti lineari* [1]).

Perchè poi X sia primitiva di grado m occorre e basta evidentemente che fra le radici di $|X - E\omega| = 0$ vi sia almeno una radice primitiva m^{esima} dell'unità.

43. — È facile determinare il numero delle classi delle matrici cicliche; considerando infatti le varie matrici X_0 relative all'equazione $X^m = E$, cioè le matrici (86), si vede che le varie classi corrispondono biunivocamente alle combinazioni distinte $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, e sono quindi tante quante sono le combinazioni con ripetizione della classe n delle m radici m^{esime} dell'unità, cioè $\binom{m+n-1}{n}$.

Perchè una matrice ciclica sia singolare (cioè unica della propria classe) è necessario e sufficiente (n.i 32 e 33) che sia $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_n$; le uniche matrici cicliche singolari sono dunque le m matrici $\varepsilon_i E$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, dove $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ sono le m radici m^{esime} distinte dell'unità.

---

[1]) Cfr. Muth, *op. cit.*, pp. 177-178; Frobenius, *L. S.*, p. 16.

Consideriamo una classe di matrici cicliche non singolari e proponiamoci di calcolare il numero delle costanti essenziali da cui dipende la più generale matrice di tale classe; se X_0 è la matrice normale della classe, ed N il numero delle matrici linearmente indipendenti permutabili con X_0, il numero richiesto sarà dato (n. 37) da $n^2 - N$, giacchè ogni matrice è permutabile con X_0^m. Se ora supponiamo che la matrice X_0 sia formata con p_i radici uguali ad ε_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, così che sarà $\sum_1^m {}_i p_i = n$, dal n. 15 si ha subito

$$N = \sum_1^m {}_i \left\{ 1 + 3 + 5 + \ldots + (2p_i - 1) \right\} = \sum_1^m {}_i \, p_i^2 ;$$

l'infinità delle matrici della classe considerata è dunque

$$n^2 - \sum_1^m {}_i \, p_i^2 = 2 \sum_{(i,k)} p_i \, p_k \, , \quad (i \neq k) .$$

Per ogni classe abbiamo così determinato il numero che indica l'infinità delle soluzioni che appartengono ad essa; il massimo di questi numeri, vale a dire l'infinità delle soluzioni della $X^m = A$, è poi dato, secondo il n. 38, da

$$n^2 - \left\{ m + 3m + 5m + \ldots + (2q-1)\, m + (2q+1)\, r \right\} =$$

$$= n^2 - nq - r\,(q+1) = n\,(n-q) - r\,(q+1) ,$$

avendo posto

$$n = qm + r \, , \quad (0 \leq r < m) .$$

Ciò si può vedere più semplicemente, senza bisogno di ricorrere al risultato del n. 38, osservando che, come è ben noto, gli m numeri interi $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_m$ pei quali è costante, ed uguale ad n, la somma, ed è minima la somma dei quadrati, sono dati da $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \ldots = \bar{p}_r = q + 1$, $\bar{p}_{r+1} = \ldots = \bar{p}_m = q$.

Possiamo raccogliere ciò che ora abbiamo visto nell'enunciato:

Esistono $\binom{m+n-1}{n}$ *classi di matrici cicliche di ordine* n *e di grado* m. *Vi sono* m *sole matrici cicliche singolari, le* $\varepsilon_1 E, \varepsilon_2 E, \ldots, \varepsilon_m E$, *essendo* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ *le* m *radici* m^{esime} *dell'unità. La più ge-*

nerale matrice ciclica corrispondente a p_i *divisori uguali ad* $\omega - \varepsilon_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *dipende da*

$$n^2 - \sum_1^m {}_i\, p_i^2 = 2 \sum_{(i,k)} p_i p_k \qquad (i \neq k)$$

parametri essenziali. L'infinità delle matrici cicliche di ordine n *e di grado* m *è data da*

$$n(n-q) - r(q+1),$$

dove si è posto $n = qm + r \ (0 \leq r < m)$.

La più generale matrice ciclica corrispondente a p_i divisori uguali ad $\omega - \varepsilon_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ si ottiene poi, in funzione delle sole costanti essenziali, al modo seguente:

$$\begin{pmatrix} \lambda E_{p_1} & A_{12} & \ldots & A_{1m} \\ A_{21} & \lambda E_{p_2} & \ldots & A_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & \lambda E_{p_m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 E_{p_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 E_{p_2} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \varepsilon_m E_{p_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda E_{p_1} & A_{12} & \ldots & A_{1m} \\ A_{21} & \lambda E_{p_2} & \ldots & A_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & \lambda E_{p_m} \end{pmatrix},$$

dove E_{p_i} è la matrice unità di ordine p_i, le $A_{12}, \ldots, A_{1m}, A_{21}, A_{23}, \ldots, A_{2 ..}$, etc. sono matrici arbitrarie, λ è una costante arbitraria, e si intende che se è, ad es., $p_i = 0$ manchino tutte le $A_{p_i 1}, \ldots, A_{p_i m}, A_{1 p_i}, \ldots, A_{m p_i}$. Questa affermazione si giustifica subito, in seguito a ciò che vedemmo al n. 37, osservando che una matrice qualsiasi è permutabile con X_0^m, e che la più generale matrice permutabile con

$$X_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 E_{p_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 E_{p_2} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \varepsilon_m E_{p_m} \end{pmatrix}$$

è data da

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_{22} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & A_{mm} \end{pmatrix},$$

essendo le $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{mm}$ matrici arbitrarie, rispettivamente degli ordini $p_1, p_2, \dots, p_m$.

Nell'espressione ora scritta della matrice ciclica X debbono intendersi comprese (conforme al citato n. 37) anche quelle matrici finite, e simili ad X_0, che si ottengono dall'equazione medesima facendo in essa tendere le costanti arbitrarie ai valori limiti che annullano il determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda E_{p_1} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & \lambda E_{p_2} & \dots & A_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & \lambda E_{p_m} \end{vmatrix}.$$

44. — Consideriamo, ad es., le matrici cicliche di secondo ordine e di secondo grado; oltre le due matrici cicliche singolari

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

esse sono quelle date dalla formula

$$X = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & \lambda \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda^2+\mu\nu}{\lambda^2-\mu\nu} & \dfrac{2\lambda\mu}{\lambda^2-\mu\nu} \\ -\dfrac{2\lambda\nu}{\lambda^2-\mu\nu} & -\dfrac{\lambda^2+\mu\nu}{\lambda^2-\mu\nu} \end{pmatrix},$$

coi due rapporti $\lambda:\mu:\nu$ arbitrari. — Ricerchiamo in particolare quali sono le speciali matrici X che corrispondono ai valori eccezionali di λ, μ, ν, a quei valori cioè che annullano l'espressione $\lambda^2 - \mu\nu$.

Poichè la X deve rimanere finita, deve aversi anche, per questi valori, $\lambda^2 + \mu\nu = 0$, $\lambda\mu = 0$, $\lambda\nu = 0$, e si ottengono quindi i due casi $\lambda = \mu = 0$, oppure $\lambda = \nu = 0$. Osserviamo inoltre che, essendo $\dfrac{\lambda^2+\mu\nu}{\lambda^2-\mu\nu} = 1 + \dfrac{2\mu\nu}{\lambda^2-\mu\nu}$, tutte e tre le espressioni $\dfrac{\lambda\mu}{\lambda^2-\mu\nu}$, $\dfrac{\lambda\nu}{\lambda^2-\mu\nu}$, $\dfrac{\mu\nu}{\lambda^2-\mu\nu}$ devono avere limiti determinati. Se allora uno dei due rapporti $\dfrac{\mu}{\lambda}$, $\dfrac{\nu}{\lambda}$

non avesse alcun limite determinato, avendosi

$$\frac{\mu}{\lambda}=\frac{\mu\nu}{\lambda^2-\mu\nu}:\frac{\lambda\nu}{\lambda^2-\mu\nu}\,,\quad \frac{\nu}{\lambda}=\frac{\mu\nu}{\lambda^2-\mu\nu}:\frac{\lambda\mu}{\lambda^2-\mu\nu}\,,$$

dovrebbe essere, in particolare, $\lim\frac{\mu\nu}{\lambda^2-\mu\nu}=0$, e poichè è

$$\frac{\lambda\mu}{\lambda^2-\mu\nu}=\frac{\mu}{\lambda}\left(1+\frac{\mu\nu}{\lambda^2-\mu\nu}\right),\quad \frac{\lambda\nu}{\lambda^2-\mu\nu}=\frac{\nu}{\lambda}\left(1+\frac{\mu\nu}{\lambda^2-\mu\nu}\right),$$

si cade evidentemente in contraddizione. I rapporti $\frac{\mu}{\lambda}$, $\frac{\nu}{\lambda}$ devono dunque tendere a limiti determinati, finiti o infiniti.

Supponiamo ora dapprima che λ e μ tendano a 0, e ν tenda invece a un valore diverso da 0. Poichè, in particolare, l'espressione $\frac{\lambda\nu}{\lambda^2-\mu\nu}=\frac{\nu}{\lambda-\frac{\mu}{\lambda}\nu}$ deve tendere a un limite finito, vediamo che il rapporto $\frac{\mu}{\lambda}$ non può tendere a 0, e quindi $\frac{\lambda}{\mu}$ deve avere pure un limite *finito;* poniamo allora

$$\lim\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\alpha}{2}\,,$$

essendo α un numero finito, del resto arbitrario, che può essere anche lo 0. Si ottiene con ciò

$$\lim\frac{\lambda^2+\mu\nu}{\lambda^2-\mu\nu}=\lim\frac{\lambda\frac{\lambda}{\mu}+\nu}{\lambda\frac{\lambda}{\mu}-\nu}=-1\,,$$

$$\lim\frac{\lambda\nu}{\lambda^2-\mu\nu}=\lim\frac{\frac{\lambda}{\mu}\nu}{\lambda\frac{\lambda}{\mu}-\nu}=-\frac{\alpha}{2}\,,$$

$$\lim\frac{\lambda\mu}{\lambda^2-\mu\nu}=\lim\frac{\lambda}{\lambda\frac{\lambda}{\mu}-\nu}=0\,,$$

e la matrice X tende quindi alla matrice

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

la α essendo, come abbiamo detto, una costante arbitraria. Questa è dunque una delle matrici volute.

Supponendo analogamente che λ e ν tendano a 0, e μ tenda invece a un valore diverso da 0, otteniamo l'altra matrice

$$X_2 = \begin{pmatrix} -1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove β è una costante arbitraria.

Si supponga infine che λ, μ, ν tendano simultaneamente a 0, e si dicano a e b rispettivamente i limiti (finiti o infiniti) dei rapporti $\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\lambda}{\nu}$. Poichè la matrice X dipende solo dai *rapporti* delle λ, μ, ν vediamo anzitutto che se uno dei due numeri a o b è 0, si otterrà la stessa matrice limite prendendo rispettivamente μ o ν diversi da 0, e si ricade quindi in uno dei tipi X_1, X_2. Se poi è $a \neq 0$, $b \neq 0$, possiamo porre $\mu = \lambda\alpha$, $\nu = \lambda\beta$ e far tendere λ a 0, ed α e β a limiti finiti, eventualmente nulli (uguali rispettivamente ad $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$); ma si vede allora che la matrice limite è quella stessa che si ottiene direttamente facendo, nella X, $\lambda = 1$, $\mu = \alpha$, $\nu = \beta$.

Si conclude così che le X_1, X_2 sopra scritte rappresentano tutte le soluzioni dell'equazione $X^2 = E_2$ che si possono ottenere dalla soluzione generale X soltanto facendo in essa tendere i parametri λ, μ, ν a sistemi di valori che annullano l'espressione $\lambda^2 - \mu\nu$.

45. — Osserviamo infine che le considerazioni del n. 28 permettono di determinare separatamente le matrici cicliche *razionali*. Se infatti m è dispari abbiamo

$$|E - E\omega^m| = (1 - \omega^m)^n = (1 - \omega)^n (1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{m-1})^n,$$

i fattori dell'ultimo membro essendo primi nel campo dei numeri razionali; ponendo allora

$$n = k(m-1) + \rho \quad (0 \leq \rho < m-1),$$

si vede subito che le matrici X_0 determinate secondo il teorema del n. 28 sono quelle relative ad a divisori elementari uguali ad $1+\omega+\omega^2+\ldots+\omega^{m-1}$ ed a $b=n-a\,(m-1)$ uguali a $1-\omega$, dove a percorre tutti i valori $1, 2, \ldots, k$; trasformando poi ciascuna di esse con una qualunque matrice P (razionale) otteniamo tutte le matrici cicliche razionali di grado m; esse si distribuiscono quindi in k classi.

Se poi m è pari, e precisamente è $m = 2^\alpha \mu$ con μ dispari, abbiamo

$$|E-E\omega^m|=(1-\omega^m)^n=(1-\omega)^n(1+\omega)^n(1+\omega^{2\mu})^n(1+\omega^{4\mu})^n\ldots(1+\omega^{2^{\alpha-1}\mu})^n\times$$
$$\times(1+\omega+\omega^2+\ldots+\omega^{\mu-1})^n(1-\omega+\omega^2-\ldots+\omega^{\mu-1})^n,$$

i fattori dell'ultimo membro essendo primi nel campo dei numeri razionali; se quindi scegliamo i numeri, interi e positivi o nulli, $a, b, c, \ldots, d, e, f$ in tutti i modi possibili così che sia

$$a+b+2\mu c+\ldots+2^{\alpha-1}\mu d+(\mu-1)e+(\mu-1)f=n,$$

le matrici normali che hanno a divisori elementari uguali ad $1-\omega$ b uguali $1+\omega$, c ad $1+\omega^{2\mu}, \ldots$, d ad $1+\omega^{2^{\alpha-1}\mu}$, e ad $1+\omega+\omega^2+\ldots+\omega^{\mu-1}$, f ad $1-\omega+\omega^2-\ldots+\omega^{\mu-1}$, danno luogo, trasformando ciascuna di esse con una qualunque matrice P (razionale), a tutte le matrici cicliche razionali di grado m.

Le radici dello zero.

46. — Consideriamo per ultimo, sempre come applicazione delle cose precedenti, il problema della determinazione delle radici m^{esime} della matrice nulla di ordine n, cioè il problema della risoluzione dell'equazione

$$X^m = 0 .$$

Per il n. 30 si vede subito che le soluzioni di questa equazione sono tutte e sole quelle matrici X per le quali i divisori elementari di $X - E\omega$ sono uguali a potenze di ω il cui esponente non supera m. — Da $X^m = 0$ segue manifestamente $X^{m+1} = X^{m+2} = \ldots = 0$;

chiamando per brevità *radice dello* 0, *di grado* m, una matrice della quale sono nulle le potenze X^m, X^{m+1}, ... e non nulle le precedenti, possiamo dire:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una matrice X *sia radice dello* 0, *è che sia* $|X-E\omega|=(-1)^n\omega^n$; *se* m *è il massimo esponente dei divisori elementari di* $X-E\omega$, *la* X *è una radice dello* 0, *di grado* m [1]).

47. — Dimostriamo ora che *il numero delle classi delle radici dello* 0, *di ordine* n *e grado* m, *è dato da*

$$(87)\qquad R_{n,m}=\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{m-2}}\left[\frac{n+2-3\alpha_1-4\alpha_2-\dots-m\alpha_{m-2}}{2}\right],$$

essendo la somma estesa a tutti i sistemi di valori positivi o nulli di $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-2}$ *pei quali il numero* $n+2-3\alpha_1-4\alpha_2-\dots-m\alpha_{m-2}$ *risulta positivo.*

Ricordiamo perciò che secondo il citato n. 30 bisogna, per ottenere $R_{n,m}$, scomporre in tutti i modi possibili il numero n nella somma di numeri positivi, ciascuno dei quali sia *minore od uguale ad* m; il numero di tali scomposizioni distinte è appunto il numero $R_{n,m}$. Ora fra queste scomposizioni ve ne sono alcune che non contengono alcun addendo uguale ad m, e queste sono evidentemente in numero di $R_{n,m-1}$; ve ne sono altre che contengono un solo addendo uguale ad m, e queste sono $R_{n-m,m-1}$; ve ne sono che contengono due addendi uguali ad m, e di tali ve ne sono $R_{n-2m,m-1}$; e così via. Se è $n=qm+r$ $(0\leq r<m)$, le ultime scomposizioni che in tal modo considereremo saranno quelle nelle quali q addendi sono uguali ad m; se è $r\neq 0$ queste saranno $R_{r,m-1}$; se invece è $r=0$ ve ne sarà una sola, e noi converremo di porre $R_{0,m-1}=1$. È chiaro inoltre che in tal modo si ottengono tutte le scomposizioni volute e ciascuna una volta sola; si ha quindi la formula

$$(88)\qquad R_{n,m}=\sum_\beta R_{n-\beta m,m-1},$$

---

[1]) V. Frobenius, *L. S.*, p. 15.

dove β percorre tutti i valori positivi (lo 0 incluso), pei quali $n-\beta m$ risulta positivo o nullo, ed è $R_{0,m-1}=1$.

Si osservi ora che è evidentemente

$$R_{n,2}=\left[\frac{n+2}{2}\right],$$

il che è conforme alla formula (87); dalla formula (88) segue allora

$$R_{n,3}=\sum_\beta R_{n-3\beta,2}=\sum_\beta\left[\frac{n+2-3\beta}{2}\right],$$

e questo pure è conforme alla formula (87). Per dimostrare dunque quest'ultima basterà procedere per induzione, ammettendola vera per $R_{n,m-1}$; dalla (88) si ottiene allora

$$R_{n,m}=\sum_\beta\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{m-3}}\left[\frac{n+2-3\alpha_1-4\alpha_2-\dots-(m-1)\alpha_{m-3}-m\beta}{2}\right],$$

onde, ponendo $\beta=\alpha_{m-2}$, segue appunto la (87).

Consideriamo una classe di soluzioni di $X^m=0$, che corrisponda a certi divisori elementari

$$\omega^{\varepsilon_1},\ \omega^{\varepsilon_2},\ \omega^{\varepsilon_3},\dots,\ (\varepsilon_1\geq\varepsilon_2\geq\varepsilon_3\geq\dots\ ;\ 0\leq\varepsilon_i\leq m\ ;\ \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\dots=n)\,;$$

il numero delle matrici permutabili con la X_0 corrispondente è allora dato da

$$N=\varepsilon_1+3\varepsilon_2+5\varepsilon_3+\dots,$$

e poichè ogni matrice è permutabile con X_0^m vediamo che *il numero delle costanti da cui dipende la più generale radice dello* 0, *della classe considerata, è dato da*

$$n^2-(\varepsilon_1+3\varepsilon_2+5\varepsilon_3+\dots).$$

È evidente inoltre che *l'unica radice singolare dello* 0 *è la matrice nulla.* — Si ottiene poi evidentemente, come per le matrici cicliche:

L'infinità delle radici dello zero, di ordine n e grado m, è *data da*

$$n(n-q)-r(q+1)$$

avendo posto $n=qm+r$ $(0 \leq r < m)$.

Dal n. 31 si ha infine:

Le caratteristiche delle varie radici dello 0, *di ordine* n *e grado* m, *sono date dai numeri*

$$0\,,\,1\,,\,2\,,\ldots,\,n-\left[\frac{n-m+1}{m}\right].$$

Così ad es. vi sono $R_{2,2}=2$ classi di radici quadrate della matrice nulla di second'ordine; una di esse è costituita dalla matrice nulla medesima; l'altra corrisponde all'unico divisore elementare $\omega^{\varepsilon_1}=\omega^2$, e dipende quindi da $n^2-\varepsilon_1=2$ costanti arbitrarie; si ha, come verifica, $q=1$, $r=0$ e quindi $n(n-q)-r(q+1)=2$; le caratteristiche di queste radici quadrate sono, naturalmente, o 0 o 1.

La più generale radice non nulla di $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ può poi ottenersi, secondo il n. 37, espressa per le sole costanti essenziali nella forma

$$X=\begin{pmatrix}a & 0\\ c & b\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ c & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{c}{a} & \dfrac{b}{a}\\ -\dfrac{c^2}{ab} & -\dfrac{c}{a}\end{pmatrix},$$

nella quale espressione si intendono rappresentate anche quelle matrici, finite e simili alla $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, che si ottengono dalla X stessa facendo tendere la a, o la b, o ambedue, allo 0. Poichè i rapporti $\frac{c}{a}$, $\frac{b}{a}$ devono rimanere finiti, vediamo che se a tende a 0, dobbiamo far tendere a 0 anche b e c, ed in modo che siano finiti i limiti di $\frac{c}{a}$, $\frac{b}{a}$. Possiamo dunque *in ogni caso* cambiare i tre parametri omogenei a, b, c nei due α, β, non omogenei, mediante le formule

$$\frac{c}{a}=\alpha\;,\;\frac{b}{a}=\beta\,;$$

con ciò la più generale radice non nulla di $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ assume la forma

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{\alpha^2}{\beta} & -\alpha \end{pmatrix},$$

con α e β costanti arbitrarie. I sistemi di valori eccezionali sono ora quelli in cui è $\beta = 0$; il limite di $\frac{\alpha^2}{\beta}$ deve essere finito (il che implica che si debba far tendere α a 0 insieme con β), e indicandolo con $-\gamma$ vediamo che la matrice corrispondente ai valori eccezionali è la

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

con γ arbitrario. — Osserviamo anche che se facciamo tendere α e β a 0 in modo che si abbia $\lim \frac{\alpha^2}{\beta} = 0$, la X tende alla matrice nulla; si ha così un esempio del fatto, avvertito come possibile al n. 37, che le matrici che si ottengono dalla formula (68)' facendo in essa tendere i parametri $\overline{\lambda}$, $\overline{\lambda}_j$ ai valori che annullano il determinante $\left|\overline{\lambda} E + \sum_1^h {}_j \overline{\lambda}_j V_j\right|$, possono non essere simili ad X_0.

Livorno, 5 marzo 1909.

INDICE

Pagina	Linea	ERRATA	CORRIGE
22	5 *da basso:*	da 1 ad n	da 1 ad m
23	2-1 » »	$\begin{pmatrix} -E_{\nu_k}\omega, & \bar{A}'_k \\ \bar{\bar{B}}, & -E_{\nu_1}\omega \end{pmatrix}$ . .	$\begin{pmatrix} -E\omega, & \bar{A}'_k \\ \bar{\bar{B}}, & -E\omega \end{pmatrix}$
35	17 *da alto:*	$+b_1\omega_{g-1}$	$+b_1\omega^{g-1}$
38	7 » »	$P^{\alpha_2,1}$	$P^{\alpha_{2,1}}$
47	7 *da basso:*	$+g_2\alpha_{1,2}$	$+g_2\alpha_{2,1}$
56	9 » »	la $Z^{(i)}_{\varrho\sigma}$.	la $Z^{(i)}_{\varrho\sigma}$,
59	10 » »	ai divisori elementari . .	al divisore elementare
61	9 » »	moltiplicata per $Z'^{-1}_{rs} Z'_{\varrho s}$;	moltiplicata a destra per $Z^{-1}_{rs} Z'_{\varrho s}$, sottragghiamo cioè da ogni $Z'_{\varrho\sigma}$ la corrispondente $Z'_{r\sigma}$ moltiplicata a destra per $Z'^{-1}_{rs} Z'_{\varrho s}$;
62	11 » »	$P^{\lambda\gamma_i}_i$	P^{λ}_i
63	*ultima:*	$a_{i,1}$	$\alpha_{i,1}$
66	8 *da basso:*	$\omega(\omega^2+1)-1$	$\omega(\omega^2+1)-\omega$
108	11 » »	*simile ad* $\bar{X}_0$.	*simile ad* X_0
109	1 » »	(64)'	(66)'