

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

UMBERTO CISOTTI

**Scie limitate**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série*, tome 1,  
n° 1-2 (1932), p. 101-112

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1932\\_2\\_1\\_1-2\\_101\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_1-2_101_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SCIE LIMITATE

di UMBERTO CISOTTI (Milano).

## 1. - Scie illimitate.

È ben noto il classico problema della « scia » che, iniziato da HELMHOLTZ (1868) e KIRCHHOFF (1869) colla trattazione del moto traslatorio uniforme, con scia, di una lamina rettilinea, ebbe ampio e generale sviluppo fino a culminare nella fondamentale memoria di LEVI-CIVITA: *Scie e leggi di resistenza* (1906), la quale fu punto di partenza di una quantità innumerevole di ricerche di Idromeccanica piana, felicemente risolte grazie al potente ausilio che fornisce in questo genere di questioni la teoria delle funzioni di variabile complessa e della rappresentazione conforme <sup>(1)</sup>.

Giova richiamare brevemente l'ipotesi classica della scia.

Una porzione limitata  $C$  di piano (fig. 1) <sup>(2)</sup>, circondata da fluido che occupa tutta la rimanente parte illimitata di piano  $A$ , è animata di traslazione uniforme;  $C$  trascina nel suo movimento una parte  $B$  del fluido che si estende indefinitamente a poppavia e si muove come se fosse solidale con  $C$ ; il campo costituito dall'insieme di  $B$  e  $C$  risulta separato da  $A$  da una linea che segue due tratti  $\tilde{\omega}'$  e  $\tilde{\omega}''$  del contorno di  $C$  e poi si stacca, segnando nei due tratti indefiniti  $\lambda'$  e  $\lambda''$  il confine tra  $A$  e  $B$ . In  $A$  il moto è supposto stazionario rispetto a  $C$ , continuo e irrotazionale ed evanescente all'infinito.

Ricorrendo al ben noto artificio di imprimere a tutto il piano una traslazione opposta a quella di  $C$ , tanto  $C$  quanto  $B$  si riducono alla quiete mentre in  $A$  all'infinito si ha una traslazione opposta a quella posseduta prima da  $C$  e  $B$ : si ottiene il moto di una corrente modificata dalla presenza dell'ostacolo

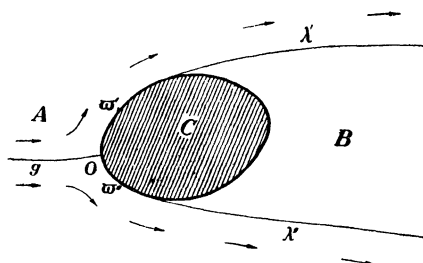


Fig. 1.

<sup>(1)</sup> Vedi la mia: *Idromeccanica Piana*, Parte I, Milano, Tamburini (1921), Parte II (1922). In seguito verrà indicata con la sigla I. P.

<sup>(2)</sup> I disegni delle figure a cura del mio Assistente prof. A. MASOTTI.

fisso  $C$ . L'andamento schematico di quest'ultimo moto è il seguente: all'infinito, sia a monte che lateralmente a  $C$ , i filetti fluidi scorrono paralleli tra loro e con comune valore della velocità; quelli che continuano a mantenersi a distanza infinita da  $C$ , lateralmente, non subiscono perturbazioni; lo stesso non può dirsi di quelli, che pur scorrendo a fianco dell'ostacolo, vanno avvicinandosi ad esso; ve n'è poi uno — *il filone  $g$*  — che colpisce l'ostacolo in un punto  $O$  — *la prora* —, si arresta momentaneamente e si bipartisce: un ramo piega a sinistra, seguendo il corso della corrente, e l'altro a destra e, dopo di aver lambito il primo un tratto  $\tilde{\omega}'$  e l'altro un tratto  $\tilde{\omega}''$  del contorno di  $C$ , si staccano da  $C$  formando le due linee libere  $\lambda'$  e  $\lambda''$  che si protendono indefinitamente a valle. Gli altri filetti sono deviati senza subire nè arresti nè sdoppiamenti.

## 2. - Scie limitate.

È possibile che la regione  $B$  sia limitata? In caso affermativo le due linee libere  $\lambda'$  e  $\lambda''$  devono avere un punto comune  $S$  a distanza finita. Cominciamo

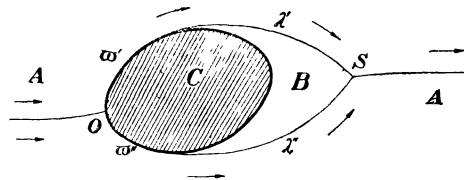


Fig. 2.

a stabilire che  $\lambda'$  e  $\lambda''$  non possono volgere sempre la convessità al campo  $A$ . Basta infatti pensare che in tal caso nel punto  $S$  (fig. 2) i due filetti percorrenti  $\lambda'$  e  $\lambda''$  devono incontrarsi e poi fondersi in un unico filone che si estende indefinitamente a valle: *la velocità deve annullarsi* dunque in  $S$ ,

perchè cambia bruscamente direzione di un angolo  $< \pi$  <sup>(3)</sup>. Ma sopra  $\lambda'$  e  $\lambda''$ , trattandosi di peli liberi <sup>(4)</sup>, la velocità deve avere il medesimo valore in tutti i punti di  $\lambda'$  e  $\lambda''$ , essendo nulla in  $S$  dovrebbe avere valore nullo sopra tutto  $\lambda'$  e  $\lambda''$ , quindi <sup>(5)</sup> nulla in tutto  $A$ : il problema non ammette quindi soluzione. Si può allora pensare che  $\lambda'$  e  $\lambda''$  eventualmente presentino in parte concavità e in parte convessità verso il campo  $A$ , in guisa che nel punto  $S$  si abbia la fusione senza urto <sup>(6)</sup> di  $\lambda'$  e  $\lambda''$ , con che le velocità delle particelle

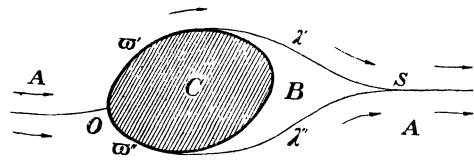


Fig. 3.

<sup>(3)</sup> I. P. n. 74.

<sup>(4)</sup> I. P. n. 36.

<sup>(5)</sup> La velocità viene espressa mediante una funzione di variabile complessa (I. P. n. 31): se è nulla in tutti i punti di una porzione finita e continua del contorno del campo  $A$  è nulla dappertutto.

<sup>(6)</sup> Cfr. CALDONAZZO: *Sulla fusione di vene liquide*. Rendiconti del R. Istituto Lombardo

fluide scorrenti su  $\lambda'$  e su  $\lambda''$  non subiscono brusche deviazioni nel riunirsi e procedere lungo il filone  $g$ , a valle (fig. 3). In tal caso tanto  $\lambda'$  quanto  $\lambda''$ , ammessa la continuità delle tangenti e delle curvature, devono presentare almeno un flesso, ove la curvatura è nulla; a ciò corrisponde l'annullarsi del valore della velocità (<sup>7</sup>), che dovrebbe quindi, come nel caso precedente, avere valore nullo su tutto  $\lambda'$  e  $\lambda''$ . Dunque  $\lambda'$  e  $\lambda''$  non possono avere flessi.

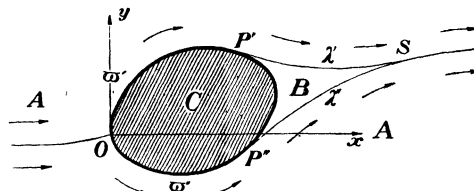


Fig. 4.

Consideriamo ora il caso in cui  $\lambda'$  e  $\lambda''$  presentano costantemente la concavità verso  $A$  (fig. 4); in tal caso non appaiono inconciliabili le condizioni di isotachicità delle linee  $\lambda'$  e  $\lambda''$ , richieste

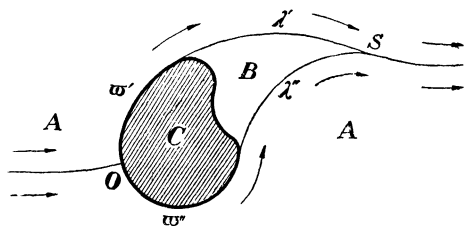


Fig. 5.

dalla loro natura di peli liberi, colla condizione della fusione loro senza urto, nel punto  $S$ . Come pure è conciliabile colle predette condizioni il caso, messo in rilievo nella figura 5, in cui uno dei peli liberi volge sempre la convessità e l'altro la concavità verso la regione  $A$  (<sup>8</sup>).

Mi propongo appunto, impostando ed approfondendo l'esame della questione, di mettere in rilievo la sua possibile trattazione, assegnando infine la soluzione generale quando le pareti rigide  $\tilde{\omega}'$  e  $\tilde{\omega}''$  sono poligonali a lati rettilinei.

di Scienze e Lettere; Vol. LI (1918), pag. 317-328 e ancora: *Vene confluenti con una regione di spartiacque*. Ibidem, Vol. LII (1919), pag. 149 e segg. Vedi anche I. P. pag. 101 e n. 156.

(<sup>7</sup>) Se  $w$  è la velocità complessa,  $f$  il potenziale cinetico e  $z$  l'affissa di un generico punto di  $A$ , si ha (I. P. n. 31)  $w = \frac{df}{dz}$ , da cui  $|dz| = \frac{1}{|w|} |df|$ ; lungo una linea di flusso  $df = d\varphi$ , essendo  $\varphi$  il potenziale di velocità; sia  $d\vartheta$  l'angolo di due tangenti infinitamente prossime, la curvatura assoluta è  $\frac{1}{r} = \left| \frac{d\vartheta}{dz} \right| = |w| \left| \frac{d\vartheta}{d\varphi} \right|$ , da cui  $|w| = \frac{1}{r} \left| \frac{d\varphi}{d\vartheta} \right|$ . Scende da questa che, mantenendosi  $\frac{d\varphi}{d\vartheta}$  limitata, è  $|w| = 0$  quando  $\frac{1}{r} = 0$ .

(<sup>8</sup>) I citati lavori di CALDONAZZO mostrano la possibilità che i peli liberi presentino anche la concavità dalla parte del liquido in movimento, contrariamente a quanto, in precedenza, aveva presupposto BRILLOUIN [*Les surfaces de glissements d'Helmholtz et la résistance des fluides*. Annales de Chimie et de Physique; 8<sup>e</sup> série, t. XXIII (1911), pag. 150], che, in seguito a tale presupposto, aveva abbandonata l'idea della scia limitata, già prospettata molti anni prima [*Questions d'Hydrodynamique*. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. I (1887), n. 34, pag. 54].

3. - *Impostazione analitica.*

Riferiamo i punti di  $A$  a una coppia di assi cartesiani ortogonali  $O$ ;  $x$ ,  $y$ , coll'origine nella prora  $O$  e coll'asse  $x$  orientato come la corrente all'infinito, e poniamo  $z=x+iy$ , essendo  $i=\sqrt{-1}$ . Sieno al solito <sup>(9)</sup>:  $f=\varphi+i\psi$  il potenziale cinetico, funzione di  $z$ ;  $\varphi$ =potenziale di velocità,  $\psi$ =funzione di corrente;  $w=u-iv$ , con  $u$ ,  $v$ =componenti secondo gli assi  $x$  e  $y$  della velocità;  $w$  è legata a  $f$  dalla relazione fondamentale <sup>(10)</sup>

$$(1) \quad w = \frac{df}{dz}.$$

La funzione di corrente  $\psi$  deve mantenere uno stesso valore costante sopra  $\tilde{\omega}'$ ,  $\tilde{\omega}''$ ,  $\lambda'$  e  $\lambda''$ , trattandosi di una stessa linea di flusso <sup>(11)</sup>:

$$(2) \quad \psi = \text{cost. sopra } \tilde{\omega}', \tilde{\omega}'', \lambda', \lambda''.$$

Il potenziale di velocità  $\varphi$  deve assumere lungo ogni linea di flusso tutti i valori da  $-\infty$  a  $+\infty$ , nel senso del flusso <sup>(12)</sup>.

La velocità complessa  $w$  deve mantenersi regolare in  $A$ ; sulle pareti rigide  $\tilde{\omega}'$ ,  $\tilde{\omega}''$  e sui peli liberi  $\lambda'$ ,  $\lambda''$ , deve mantenersi limitata, esclusi tutto al più dei punti angolosi che le pareti rigide  $\tilde{\omega}'$  e  $\tilde{\omega}''$  eventualmente presentassero in numero finito. Sopra  $\lambda'$  e  $\lambda''$ , trattandosi di peli liberi <sup>(13)</sup>, la velocità deve avere valore costante, per cui:

$$(3) \quad |w| = c, \quad \text{sopra } \lambda' \text{ e } \lambda'',$$

se si indica con  $c$  il predetto valore costante. Chiamando infine  $V$  il valore assintotico della velocità della corrente, dovrà aversi:

$$(4) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} w = V.$$

Se si pone, col LEVI-CIVITA <sup>(14)</sup>

$$(5) \quad w = ce^{-i\omega},$$

colla determinazione  $\omega=0$  per  $w=c$ , rimane definita una funzione  $\omega=\vartheta+i\tau$  dei punti  $z$  di  $A$ ; il significato della parte reale  $\vartheta$  e del coefficiente  $\tau$  di  $i$  risulta immediatamente, perchè essendo

$$w = u - iv = ce^{-i\omega} = ce^{\tau - i\vartheta},$$

<sup>(9)</sup> I. P. n. 29 e 30.

<sup>(10)</sup> I. P. n. 31.

<sup>(11)</sup> I. P. n. 32.

<sup>(12)</sup> I. P. n. 98.

<sup>(13)</sup> I. P. n. 36.

<sup>(14)</sup> I. P. n. 99.

risulta :

$$(6) \quad \tau = \log \frac{|w|}{c}, \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{v}{u}.$$

Riportando alla funzione  $\omega$  le condizioni a cui deve soddisfare  $w$  in  $A$ , si vede che  $\tau$  deve mantenersi limitata in  $A$  e può tutt' al più divenire *logaritmicamente* infinita in eventuali punti angolosi, in numero finito, delle pareti rigide  $\tilde{\omega}'$  e  $\tilde{\omega}''$ ; inoltre, per la (3),

$$(7) \quad \tau = 0 \quad \text{sopra} \quad \lambda' \text{ e } \lambda''.$$

Per la (4) dovrà aversi:

$$(8) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \tau = \log \frac{V}{c}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \vartheta = 0.$$

Convieni precisare fino da ora il comportamento della velocità nel punto  $O$  di prora, che del resto è quello stesso messo in rilievo nel problema della scia indefinita <sup>(45)</sup>. Diciamo  $2\alpha$  l'angolo delle tangenti in  $O$ , nel senso del flusso, l'una a  $\tilde{\omega}'$  e l'altra a  $\tilde{\omega}''$  (fig. 6). Se  $O$  non è punto angoloso per il profilo è  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , come nelle figure 4 e 5. Sia  $\delta$  l'angolo della bisettrice al predetto angolo  $2\alpha$  coll'asse  $x$ ; è  $\delta = 0$  quando si tratta di profili simmetrici e simmetricamente orientati rispetto all'asse  $x$ . Atteso il significato di  $\vartheta$  dovrà essere:

$$(9) \quad \begin{aligned} \lim \vartheta &= \delta + \alpha, & \text{tendendo a } O \text{ seguendo } \tilde{\omega}' \\ \lim \vartheta &= \delta - \alpha, & \text{tendendo a } O \text{ seguendo } \tilde{\omega}'' \end{aligned}$$

Un'altra condizione riguarda i punti di raccordo  $P'$  e  $P''$  delle pareti  $\tilde{\omega}'$  e  $\tilde{\omega}''$  coi peli liberi  $\lambda'$  e  $\lambda''$ . Siccome  $\lambda'$  e  $\lambda''$  devono volgere verso la regione  $B$  sempre la convessità, entrambe (fig. 4), oppure una di esse (fig. 5), le tangenti comuni a  $\tilde{\omega}'$  e  $\lambda'$ , in  $P'$ , e a  $\tilde{\omega}''$  e  $\lambda''$ , in  $P''$ , devono comportarsi in modo compatibile coll'avverarsi dell'una o dell'altra delle due circostanze accennate.

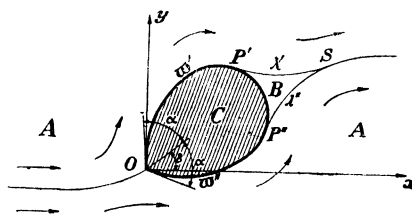


Fig. 6.

Concludendo: il problema esige la determinazione di una  $f(z)$  e di una  $\omega(z)$  dei punti di  $A$  soddisfacenti alle condizioni su specificate, tenendo conto che, per la (1) e la (5), esse devono essere legate tra di loro dalla relazione

$$(10) \quad \frac{df}{dz} = ce^{-i\omega}.$$

In questioni idromeccaniche piane in cui intervengono pareti rigide e peli liberi non è possibile assegnare a priori la forma di questi ultimi per esuberanza di condizioni, ciò è ben noto <sup>(46)</sup>; per cui anche nel caso attuale non si può fare

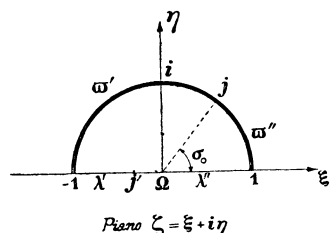
<sup>(45)</sup> I. P. n. 99.

<sup>(46)</sup> I. P. n. 100, 130.

assegnamento sulla preventiva conoscenza del campo  $A$ , che è incognito a priori a cagione della incognita forma dei peli liberi  $\lambda'$  e  $\lambda''$ . Si tratta appunto di determinare questi, supposti preventivamente assegnati  $\tilde{\omega}'$  e  $\tilde{\omega}''$ , in modo che nel campo  $A$ , che risulterà a posteriori, sieno verificate tutte le dovute condizioni, specificate in questo numero.

#### 4. - Riferimento a un semicerchio.

Convorrà pertanto di riferire il campo  $A$  del piano  $z = x + iy$ , in modo conforme e biunivoco, nel campo semicircolare del piano  $\zeta = \xi + i\eta : |\zeta| \leq 1, \eta \geq 0$  (fig. 7)



Piano  $\zeta = \xi + i\eta$

Fig. 7.

in modo che le due pareti rigide  $\tilde{\omega}'$  e  $\tilde{\omega}''$  vengano rappresentate sulla semicirconferenza  $1, i, -1$  e i due peli liberi  $\lambda'$  e  $\lambda''$  sul diametro  $-1, 1$ . La relazione tra  $z$  e  $\zeta$  che definisce questa corrispondenza, non è assegnabile a priori, essendo, come si disse, incognita la forma dei peli liberi  $\lambda'$  e  $\lambda''$ ; verrà determinata a posteriori, trasportando nel suaccennato semicerchio le condizioni a cui devono soddisfare il potenziale cinetico  $f$  e la funzione  $\omega$

(n.º 3). Assegnate le funzioni  $f(\zeta)$  e  $\omega(\zeta)$ , avendosi:

$$\frac{df}{dz} = \frac{df}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz},$$

dalla (10) si ha:

$$\frac{df}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = ce^{-i\omega},$$

da cui

$$dz = \frac{1}{c} e^{i\omega} \frac{df}{d\zeta} d\zeta,$$

che integrata, porge

$$(11) \quad z - z_0 = \frac{1}{c} \int_{\zeta_0}^{\zeta} e^{i\omega} \frac{df}{d\zeta} d\zeta,$$

la quale, note  $\omega(\zeta)$  e  $f(\zeta)$ , determina la cercata relazione tra  $z$  e  $\zeta$ ; in essa  $z_0$  e  $\zeta_0$  rappresentano una coppia di punti in corrispondenza nei due piani.

#### 5. - La funzione $f(\zeta)$ .

Diciamo  $j = e^{i\sigma_0}$  il punto della semicirconferenza  $1, i, -1$  corrispondente alla prora  $O$  (fig. 4) e  $j'$  il punto del diametro  $-1, 1$  che corrisponde al punto  $S$  in cui si fondono a poppavia i peli liberi  $\lambda'$  e  $\lambda''$ . Se si pone:

$$(12) \quad Z = X + iY = i \frac{\zeta^2 - 2i\zeta + 1}{\zeta^2 + 2i\zeta + 1},$$

il campo semicircolare della figura 7 viene riferito, in modo biunivoco e conforme, al piano forato circolarmente della variabile  $Z$  (fig. 8), i contorni corrispondendosi nel modo indicato nelle figure 7 e 8; ai punti  $\zeta$  interni al semicerchio corrispondono i punti  $Z$  esterni,  $|Z| > 1$ , in particolare al punto  $\zeta = i(\sqrt{2}-1)$  corrisponde  $Z = \infty$  <sup>(17)</sup>. Al punto  $j = e^{i\sigma_0}$ , corrisponderà, per la (12), il punto

$$(13) \quad J = e^{-i\theta_0}, \quad \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{\operatorname{sen}^2 \sigma_0}{2 \cos \sigma_0}.$$

Ciò premesso, il potenziale cinetico  $f = \varphi + i\psi$  di una corrente del piano  $Z$  che investe il profilo circolare, avente per prora il punto  $J$  e quindi per poppa il punto opposto  $J'$  e la cui velocità asintotica ha per valore  $a$  è la seguente <sup>(18)</sup>:

$$(14) \quad f = a \left( \frac{Z}{J} + \frac{J}{Z} \right).$$

La  $f$  definita dalla precedente è reale su tutta la circonferenza  $|Z|=1$  e la sua derivata

$$\frac{df}{dZ} = a \left( \frac{1}{J} - \frac{J}{Z^2} \right)$$

è regolare per  $|Z| > 1$  e si annulla solamente per  $Z=J$  e nel punto opposto  $Z=-J$  della circonferenza  $|Z|=1$ , come deve essere perchè sono questi i due punti del contorno che corrispondono rispettivamente alla prora  $O$ , alla poppa  $S$  in cui la corrispondenza conforme tra i piani  $Z$  e  $f$  deve fare eccezione.

Per mezzo della (12) potremo riferire la  $f$  al semicerchio  $\zeta$ ; si ottiene, tenendo presenti le (13),

$$f = ia \left[ \frac{\zeta^2 - 2i\zeta + 1}{\zeta^2 + 2i\zeta + 1} e^{i\theta_0} - \frac{\zeta^2 + 2i\zeta + 1}{\zeta^2 - 2i\zeta + 1} e^{-i\theta_0} \right].$$

Derivando, si ricava:

$$\frac{df}{d\zeta} = 4a(1-\zeta^2) \left[ \frac{e^{i\theta_0}}{(\zeta^2 + 2i\zeta + 1)^2} + \frac{e^{-i\theta_0}}{(\zeta^2 - 2i\zeta + 1)^2} \right],$$

e, avendosi dalla seconda di (13)

$$\cos \theta_0 = \frac{2 \cos \sigma_0}{1 + \cos^2 \sigma_0}, \quad \operatorname{sen} \theta_0 = \frac{\operatorname{sen}^2 \sigma_0}{1 + \cos^2 \sigma_0},$$

in definitiva:

$$(15) \quad \frac{df}{d\zeta} = \frac{8a(1-\zeta^2)}{1 + \cos^2 \sigma_0} \cdot \frac{(1-\zeta^2)^2 \cos \sigma_0 + 4\zeta(1+\zeta^2) \operatorname{sen}^2 \sigma_0}{(\zeta^4 + 6\zeta^2 + 1)^2}.$$

Da (12) si deduce che, per  $\zeta$  reale, è

$$Z = e^{i \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{(1-\zeta^2)^2}{4\zeta(1+\zeta^2)}},$$

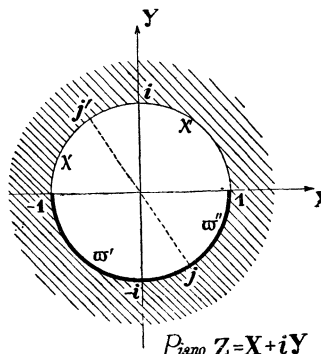


Fig. 8.

<sup>(17)</sup> Cfr. la mia Nota: *Correnti circolatorie locali intorno a regioni di acqua morta*. Rendiconti della R. Accademia Naz. dei Lincei, Vol. XIII (1° sem. 1931), pag. 86.

<sup>(18)</sup> I. P. n. 72.



ne segue che per

$$Z = J' = -J = -e^{-i\theta_0} = e^{i(\pi - \theta_0)},$$

si avrà

$$\operatorname{tg}(\pi - \theta_0) = \frac{(1 - j'^2)^2}{4j'(1 + j'^2)};$$

quindi, per la seconda di (13), ha luogo la seguente relazione tra  $j'$  e  $\sigma_0$ :

$$(16) \quad \frac{\operatorname{sen}^2 \sigma_0}{2 \cos \sigma_0} = - \frac{(1 - j'^2)^2}{4j'(1 + j'^2)}.$$

Risulta da questa che, se  $0 < \sigma_0 < \frac{\pi}{2}$ , il primo membro è  $> 0$  per cui  $j' < 0$ ; se  $\frac{\pi}{2} < \sigma_0 < \pi$  il primo membro è  $< 0$  e quindi  $j' > 0$ ; per  $\sigma_0 = \frac{\pi}{2}$  è  $j' = 0$ .

### 6. - La funzione $\omega(\zeta)$ .

Riportiamo al semicerchio le condizioni alle quali deve soddisfare la funzione  $\omega$  (n.º 3). Anzitutto, per la (7),  $\omega$  dev'essere reale sul diametro  $-1, 1$  e regolare entro il semicerchio, per cui è sviluppabile in una serie di potenze positive di  $\zeta$ ,

$$\omega(\zeta) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \zeta^n$$

a coefficienti reali, a priori indeterminati. Sulla semicirconferenza  $\zeta = e^{i\sigma}$ ,  $0 \leq \sigma \leq \pi$  sia noto l'andamento della parte reale  $\vartheta$  di  $\omega$ ; allora basta applicare la seguente formula <sup>(19)</sup>, che scende immediatamente da quella ben nota di Schwarz:

$$(17) \quad \omega(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \vartheta(\sigma) \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2\zeta \cos \sigma + \zeta^2} d\sigma,$$

perchè la funzione  $\omega$  sia determinata. Si noti bene che  $\vartheta(\sigma)$  deve avere nella prora  $O$ , cioè per  $\sigma = \sigma_0$ , il comportamento indicato dalle (9), cioè

$$(18) \quad \lim_{\sigma \rightarrow \sigma_0 - 0} \vartheta = \delta - \alpha, \quad \lim_{\sigma \rightarrow \sigma_0 + 0} \vartheta = \delta + \alpha;$$

inoltre nei punti  $P'$  e  $P''$ , corrispondenti a  $\sigma = \pi$  e  $\sigma = 0$ ,  $\vartheta(\pi)$  e  $\vartheta(0)$  devono dare il comportamento qualitativo conciliabile colle circostanze accennate al n.º 3 e messo in rilievo nelle figure 4 e 5.

Una volta nota  $\omega(\zeta)$ , la (11), per la (15), fornisce la relazione tra  $z$  e  $\zeta$  e, in particolare, permette di determinare i poli liberi  $\lambda'$  e  $\lambda''$  che, come sappiamo, sono a priori incogniti.

<sup>(19)</sup> I. P. pag. 17, formula (II).

7. - **Soluzione corrispondente a profili poligonali.**

Si divida l'arco  $j, -1$ , luogo dei punti  $\zeta = e^{i\sigma}$ ,  $\sigma_0 \leq \sigma \leq \pi$  in  $p$  parti e sieno  $\sigma_1', \sigma_2', \dots, \sigma_p' = \pi$  gli argomenti dei punti di divisione, in ordine crescente; parimenti si divida l'arco  $j, 1$ , ove  $\zeta = e^{i\sigma}$ ,  $0 \leq \sigma \leq \sigma_0$  in  $q$  parti e sieno  $\sigma_1'', \sigma_2'', \dots, \sigma_q'' = 0$  gli argomenti dei punti di divisione, in ordine decrescente a partire da  $\sigma_0$ .

Applicando la formula (IV) di pag. 19 della I. P. si ottiene la formula:

$$(19) \quad \omega(\zeta) = \vartheta_q'' + \frac{i}{\pi} (\vartheta_1' - \vartheta_1'') \log \frac{\zeta - e^{i\sigma_0}}{1 - \zeta e^{i\sigma_0}} + \frac{i}{\pi} \sum_1^{p-1} (\vartheta'_{h+1} - \vartheta'_h) \log \frac{\zeta - e^{i\sigma'_h}}{1 - \zeta e^{i\sigma'_h}} + \frac{i}{\pi} \sum_1^{q-1} (\vartheta''_k - \vartheta''_{k+1}) \log \frac{\zeta - e^{i\sigma''_k}}{1 - \zeta e^{i\sigma''_k}}$$

che definisce  $\omega$  funzione regolare di  $\zeta$  nel semicerchio  $|\zeta| < 1, \eta > 0$ , reale sull'asse reale e la cui parte reale  $\vartheta$  assume sulla semicirconferenza  $\zeta = e^{i\sigma}$ ,  $0 < \sigma < \pi$  i valori seguenti:

$$(20') \quad \left\{ \begin{array}{l} \vartheta_1' \text{ per } \sigma_0 < \sigma < \sigma_1', \\ \vartheta_2' \text{ per } \sigma_1' < \sigma < \sigma_2', \\ \dots \dots \dots \\ \vartheta_p' \text{ per } \sigma'_{p-1} < \sigma < \sigma_p' = \pi; \end{array} \right. \quad (20'') \quad \left\{ \begin{array}{l} \vartheta_1'' \text{ per } \sigma_1'' < \sigma < \sigma_0, \\ \vartheta_2'' \text{ per } \sigma_2'' < \sigma < \sigma_1'', \\ \dots \dots \dots \\ \vartheta_q'' \text{ per } 0 = \sigma_q'' < \sigma < \sigma''_{q-1}. \end{array} \right.$$

Atteso il significato della parte reale  $\vartheta$  di  $\omega$  (n.º 3), dalle (20') scende che la parete  $\tilde{\omega}'$  è una poligonale di  $p \geq 2$  lati rettilinei, inclinati sull'asse reale, nel senso del flusso, ordinatamente degli angoli  $\vartheta_1', \vartheta_2', \dots, \vartheta_p'$ . Analogamente, dalle (20'') risulta che  $\tilde{\omega}''$  è una poligonale di  $q \geq 2$  lati rettilinei, inclinati sull'asse reale, sempre nel senso del flusso, degli angoli  $\vartheta_1'', \vartheta_2'', \dots, \vartheta_q''$ .

Le condizioni (18) sono soddisfatte assumendo:

$$(21) \quad \vartheta_1' = \delta + \alpha, \quad \vartheta_1'' = \delta - \alpha.$$

Poniamo, tenendo conto di (19) e delle precedenti:

$$(22) \quad P(\zeta) = e^{i\omega} = e^{i\vartheta_q''} \left( \frac{1 - \zeta e^{i\sigma_0}}{\zeta - e^{i\sigma_0}} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi} h=p-1} \prod_{h=1}^{p-1} \left( \frac{1 - \zeta e^{i\sigma'_h}}{\zeta - e^{i\sigma'_h}} \right)^{\frac{\vartheta'_{h+1} - \vartheta'_h}{\pi} k=q-1} \prod_{k=1}^{q-1} \left( \frac{1 - \zeta e^{i\sigma''_k}}{\zeta - e^{i\sigma''_k}} \right)^{\frac{\vartheta_{k+1}'' - \vartheta_k''}{\pi}}$$

La relazione tra  $z$  e  $\zeta$  si ottiene dalla (11) sostituendovi questa espressione, con che si ha

$$(23) \quad z - z_0 = \frac{1}{c} \int_{\zeta_0}^{\zeta} P(\zeta) \frac{df}{d\zeta} d\zeta,$$

essendo la  $\frac{df}{d\zeta}$  definita dalla (15).

Chiamando  $l_r'$  la lunghezza del lato della poligonale  $\tilde{\omega}'$  avente per estremi i punti  $\zeta = e^{i\sigma'_{r-1}}$  e  $\zeta = e^{i\sigma'_r}$ , si ha, per la (23),

$$(24') \quad l_r' e^{i\vartheta_r'} = \frac{1}{c} \int_{e^{i\sigma'_{r-1}}}^{e^{i\sigma'_r}} P(\zeta) \frac{df}{d\zeta} d\zeta, \quad (r = 1, 2, \dots, p);$$

analogamente, chiamando  $l_s''$  la lunghezza del lato della poligonale  $\tilde{\omega}''$ , avente per estremi i punti  $\zeta = e^{i\sigma''_{s-1}}$  e  $\zeta = e^{i\sigma''_s}$ , si ha:

$$(24'') \quad l_s'' e^{i\vartheta_s''} = \frac{1}{c} \int_{e^{i\sigma''_{s-1}}}^{e^{i\sigma''_s}} P(\zeta) \frac{df}{d\zeta} d\zeta, \quad (s=1, 2, \dots, q).$$

Le  $p$  relazioni (24') e le  $q$  relazioni (24'') determinano i  $p+q-1$  argomenti  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma'_{p-1}, \sigma_1'', \dots, \sigma''_{q-1}$  che compaiono in  $P(\zeta)$  e la costante  $a$  che, con  $\sigma_0$  interviene nella espressione (15) di  $\frac{df}{d\zeta}$ , permettendo in definitiva di introdurre nella relazione (23) tra  $z$  e  $\zeta$  le lunghezze dei lati dei profili  $\tilde{\omega}'$  e  $\tilde{\omega}''$  e le loro inclinazioni sull'asse reale. Si tenga conto ancora che i lati estremi delle poligonali, quelli cioè che devono raccordarsi coi peli liberi  $\lambda'$  e  $\lambda''$  e le cui inclinazioni sull'asse reale abbiamo indicate con  $\vartheta_{p'}$  e  $\vartheta_{q''}$ , devono avere valori tali, di queste inclinazioni, compatibili colle condizioni accennate in proposito nel n.° 3.

*Velocità.* - Per la (22) la velocità, definita da (5), risulta

$$(25) \quad w = cP^{-1} = ce^{-i\vartheta_{q''}} \left( \frac{\zeta - e^{i\sigma_0}}{1 - \zeta e^{i\sigma_0}} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} \prod_{h=1}^{h=p-1} \left( \frac{\zeta - e^{i\sigma_h'}}{1 - \zeta e^{i\sigma_h'}} \right)^{\frac{\vartheta'_{h+1} - \vartheta_{h'}}{\pi}} \prod_{k=1}^{k=q-1} \left( \frac{\zeta - e^{i\sigma_k''}}{1 - \zeta e^{i\sigma_k''}} \right)^{\frac{\vartheta_{k''} - \vartheta'_{k+1}}{\pi}}$$

Per  $\zeta = i(\sqrt{2}-1)$ , corrispondente al punto all'infinito (n.° 5), si ha per  $0 \leq \sigma \leq \pi$ :

$$\operatorname{mod} \frac{\zeta - e^{i\sigma}}{1 - \zeta e^{i\sigma}} = \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \sigma}}{\sqrt{2} + \operatorname{sen} \sigma}, \quad \arg \frac{\zeta - e^{i\sigma}}{1 - \zeta e^{i\sigma}} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \sigma}{\sqrt{2}} - \pi.$$

Facendo in questa successivamente  $\sigma = \sigma_0, \sigma_h', \sigma_k''$ , e sostituendo nella (25), si deduce la seguente espressione per il valore della velocità della corrente all'infinito:

$$(26) \quad V = |w| = c \left( \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \sigma_0}}{\sqrt{2} + \operatorname{sen} \sigma_0} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} \prod_{h=1}^{h=p-1} \left( \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \sigma_h'}}{\sqrt{2} + \operatorname{sen} \sigma_h'} \right)^{\frac{\vartheta'_{h+1} - \vartheta_{h'}}{\pi}} \prod_{k=1}^{k=q-1} \left( \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \sigma_k''}}{\sqrt{2} + \operatorname{sen} \sigma_k''} \right)^{\frac{\vartheta_{k''} - \vartheta'_{k+1}}{\pi}}.$$

Questa formula precisa il legame tra il valore della velocità assintotica della corrente, il valore della velocità sui peli liberi e gli elementi che dipendono dalla configurazione geometrica e orientazione delle pareti rigide  $\tilde{\omega}'$  e  $\tilde{\omega}''$ . In quanto alla direzione assintotica della corrente, essa è fornita dalla seguente relazione:

$$\begin{aligned} \vartheta = \arg w = \vartheta_{q''} - \frac{2\alpha}{q} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \sigma_0}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\pi} \sum_1^{p-1} (\vartheta'_{h+1} - \vartheta_{h'}) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \sigma_h'}{\sqrt{2}} \\ + \frac{1}{\pi} \sum_1^{q-1} (\vartheta''_{k+1} - \vartheta_{k''}) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \sigma_k''}{\sqrt{2}} \\ + 2\alpha + \sum_1^{p-1} (\vartheta'_{h+1} - \vartheta_{h'}) - \sum_1^{q-1} (\vartheta''_{k+1} - \vartheta_{k''}), \end{aligned}$$

ed essendo, per (21),

$$\sum_1^{p-1} (\vartheta'_{h+1} - \vartheta_{h'}) - \sum_1^{q-1} (\vartheta''_{k+1} - \vartheta_{k''}) = \vartheta_{p'} - \vartheta_{q''} - 2\alpha,$$

si ha in definitiva :

$$\vartheta = \vartheta_{p'} - \frac{2\alpha}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} \sigma_0}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\pi} \sum_1^{p-1} (\vartheta'_{h+1} - \vartheta'_h) \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} \sigma'_h}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\pi} \sum_1^{q-1} (\vartheta''_{k+1} - \vartheta''_k) \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} \sigma''_k}{\sqrt{2}}.$$

Rammentiamo che si è assunto l'asse reale come direzione assintotica della corrente, per cui dovrà essere nullo il predetto argomento; ciò porta alla seguente relazione

$$(27) \quad \vartheta_{p'} = \frac{2\alpha}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} \sigma_0}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\pi} \sum_1^{p-1} (\vartheta'_{h+1} - \vartheta'_h) \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} \sigma'_h}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\pi} \sum_1^{q-1} (\vartheta''_{k+1} - \vartheta''_k) \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} \sigma''_k}{\sqrt{2}}.$$

Nel caso di simmetria rispetto all'asse reale, avendosi:  $p=q$ ,  $\vartheta_h'' = -\vartheta_h'$ ,  $\sigma_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\sigma_h'' = \pi - \sigma_h'$ ,  $\delta=0$  e  $\vartheta_1' = -\vartheta_1'' = \alpha$ , e

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} \sigma_h''}{\sqrt{2}} = \pi - \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} \sigma_h'}{\sqrt{2}},$$

la (27) risulta identicamente soddisfatta.

*Velocità sui peli liberi.* - Si è visto che i peli liberi  $\lambda'$  e  $\lambda''$  corrispondono ai punti  $\zeta$  del diametro  $-1, 1$  del semicerchio (n.° 4): precisamente percorrendo  $\lambda'$  dal punto  $P'$  al punto  $S$ ,  $\zeta$  varia da  $-1$  a  $j'$  e percorrendo  $\lambda''$  da  $P''$  a  $S$ ,  $\zeta$  varia da  $1$  a  $j'$ ; al punto  $S$  in cui si fondono i due peli liberi, corrisponde  $\zeta=j'$  legato a  $\sigma_0$  dalla relazione (16). Avendosi per  $\zeta$  reale e  $0 \leq \sigma \leq \pi$

$$\operatorname{mod} \frac{\zeta - e^{i\sigma}}{1 - \zeta e^{i\sigma}} = 1, \quad \arg \frac{\zeta - e^{i\sigma}}{1 - \zeta e^{i\sigma}} = \operatorname{arc\,tg} \frac{(\zeta^2 - 1) \operatorname{sen} \sigma}{2\zeta - (1 + \zeta^2) \operatorname{cos} \sigma},$$

dalla (25) si deduce  $|w|=c$ , come doveva essere (n.° 3); inoltre

$$(28) \quad \vartheta = \arg w = \vartheta_q'' - \frac{2\alpha}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{(\zeta^2 - 1) \operatorname{sen} \sigma_0}{2\zeta - (1 + \zeta^2) \operatorname{cos} \sigma_0} - \frac{1}{\pi} \sum_1^{p-1} (\vartheta'_{h+1} - \vartheta'_h) \operatorname{arc\,tg} \frac{(\zeta^2 - 1) \operatorname{sen} \sigma'_h}{2\zeta - (1 + \zeta^2) \operatorname{cos} \sigma'_h} + \frac{1}{\pi} \sum_1^{q-1} (\vartheta''_{k+1} - \vartheta''_k) \operatorname{arc\,tg} \frac{(\zeta^2 - 1) \operatorname{sen} \sigma''_k}{2\zeta - (1 + \zeta^2) \operatorname{cos} \sigma''_k}.$$

Questa relazione definisce la direzione della velocità in ogni punto di ciascuno dei peli liberi  $\lambda'$  e  $\lambda''$ . In particolare, per  $\zeta=j'$  si ha la direzione della velocità in  $S$ , cioè della tangente nel punto cuspidale.

Nel caso di simmetria rispetto all'asse  $x$ , è  $j'=0$ , oltre che  $p=q$ ,  $\vartheta_h'' = -\vartheta_h'$ ,  $\sigma_h'' = \pi - \sigma_h'$ ,  $\sigma_0 = \frac{\pi}{2}$ , per cui ponendo in (28)  $\zeta=0$  si ottiene  $\arg w=0$ , come doveva essere.

8. - Cenno di alcuni casi particolari.

Assumendo:

$$p=q=2, \quad \vartheta_1'=\delta+\alpha, \quad \vartheta_2'=\delta+\alpha+\beta'-2\pi, \quad \vartheta_1''=\delta-\alpha, \quad \vartheta_2''=\delta-\alpha-\beta''+2\pi,$$

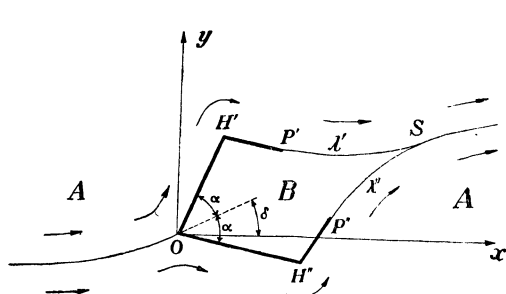


Fig. 9.

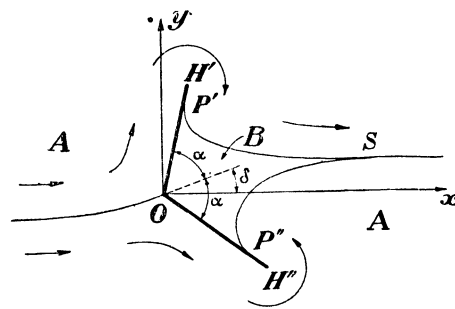


Fig. 10.

si ha il caso di un profilo bilatero  $H'OH''$  con alette  $H'P'$  e  $H''P''$  (fig. 9);  $\tilde{\omega}'$  è dunque costituita dal segmento  $OH'$ , che forma coll'asse  $x$  l'angolo  $\delta+\alpha$  e del segmento  $H'P'$ , che forma con  $OH'$  l'angolo  $\beta'$ ;  $\tilde{\omega}''$  è formata del segmento  $OH''$ , inclinato di  $\delta-\alpha$  sull'asse  $x$  e del segmento  $H''P''$ , che forma con  $OH''$  l'angolo  $\beta''$ ;  $\delta$  (n.º 3) continua a rappresentare l'inclinazione sull'asse  $x$  della bisettrice dell'angolo  $2\alpha$  formato dai due segmenti  $OH'$  e  $OH''$ .

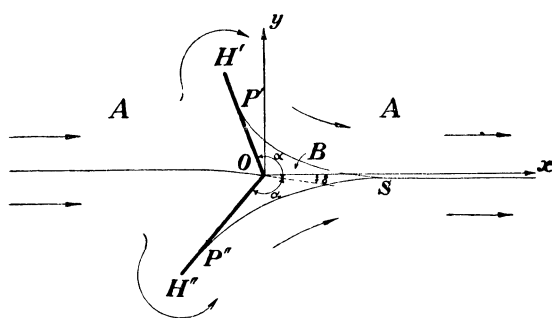


Fig. 11.

Se  $\beta'=\beta''=0$ , si hanno i casi illustrati dalle figure 10 e 11 e corrispondenti rispettivamente a  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  e  $\alpha > \frac{\pi}{2}$ . Per  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  si ha il caso messo in rilievo nella figura 12. Se è poi anche  $\delta=0$  si ha la simmetria rispetto all'asse  $x$  (fig. 13).

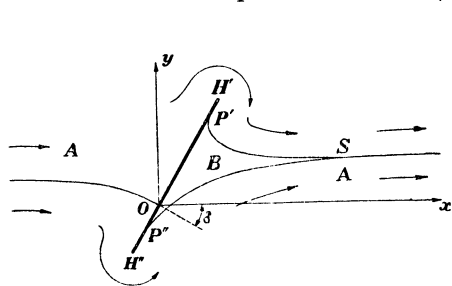


Fig. 12.

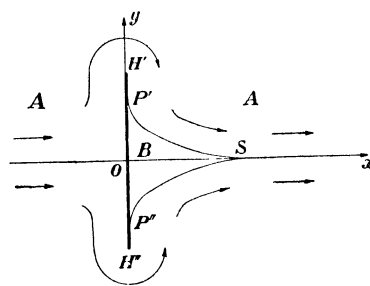


Fig. 13.