

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

PIETRO BURGATTI

**Sull'equazione  $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$  e sopra un criterio per riconoscere la natura delle radici di  $y_n(x) = 0$**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série, tome 1, n° 1-2 (1932), p. 165-172*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1932\\_2\\_1\\_1-2\\_165\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_1-2_165_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SULL'EQUAZIONE  $(a_1x+a_0)y''+(b_1x+b_0)y'-nb_1y=0$   
 E SOPRA UN CRITERIO  
 PER RICONOSCERE LA NATURA DELLE RADICI DI  $y_n(x)=0$

di PIETRO BURGATTI (Bologna).

1. - LAGUERRE nei suoi bellissimoi studi algebrici <sup>(1)</sup> si occupò dei criteri atti a riconoscere se l'equazione  $y_n(x)=0$ , in cui  $y_n(x)$  è un polinomio di grado  $n$  soluzione di una equazione differenziale lineare e omogenea del second'ordine, ha o non tutte le radici reali. Ne trovò uno che è valido in alcuni casi; il solo, credo, che oggi si conosca. Ritengo utile darne qui una dimostrazione elementare.

Anche limitandosi alle  $y_n(x)$  soddisfacenti alle semplici equazioni del tipo

$$(1) \quad (a_1x+a_0)y''+(b_1x+b_0)y'-nb_1y=0,$$

che ammettono sempre come soluzione un polinomio di grado  $n$ , il criterio di LAGUERRE non permette di riconoscere la realtà delle radici di  $y_n(x)=0$  in tutti i casi. Pertanto, data la difficoltà e l'importanza della questione, credo che riuscirà interessante la conoscenza del teorema che segue.

Indicheremo con  $\delta$  il determinante  $a_1b_0-a_0b_1$ , che è un invariante rispetto al cambiamento di variabile  $x=at+\beta$ , giacchè in virtù della trasformazione risulta moltiplicato per  $a^2$ . Lo chiameremo *l'invariante lineare della (1)*.

Orbene, se  $y_n(x)$  è il polinomio soddisfacente alla (1), l'equazione  $y_n(x)=0$  ha tutte le radici reali quando l'invariante è positivo, oppure quando, essendo negativo, è in valore assoluto minore di  $a_1^2$ ; ne ha invece delle complesse quando l'invariante è negativo, ma in valore assoluto maggiore di  $a_1^2$ . Esistono delle radici reali multiple in corrispondenza ai casi di  $|\delta|=a_1^2$ ,  $=2a_1^2$  ecc. Quando sia  $a_1=0$  basta la sola condizione  $\delta < 0$  per l'esistenza delle radici complesse.

La prima parte del teorema ( $\delta > 0$ ) si dimostra subito col criterio di LAGUERRE. La terza parte riguardante le radici complesse discende da una relazione ricorrente fra i polinomi  $y_n(x)$ . Presenta invece difficoltà che sembran gravi la dimostrazione della realtà nel caso  $|\delta| < a_1^2$ . Io non le ho superate. Nondimeno non ho dubbio intorno alla verità del teorema, che è direttamente verificabile per  $n=2, 3, 4$ .

---

<sup>(1)</sup> *Oeuvres*, T. I, pag. 133 e seguenti.

2. - *Lemma.* Siano  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  le radici tutte reali dell'equazione  $f(x) = 0$  di grado  $n$ . Si ha per cose note

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{s=1}^n \frac{1}{x - \alpha_s}.$$

Posto  $x = \alpha + i\beta$ , si ottiene

$$\frac{f'(\alpha + i\beta)}{f(\alpha + i\beta)} = \sum_s \frac{(\alpha - \alpha_s) - i\beta}{(\alpha - \alpha_s)^2 + \beta^2};$$

la quale dimostra che questo rapporto è della forma

$$A - i\beta B^2.$$

Si conclude pertanto: *se*  $f(x) = 0$  *ha tutte le radici reali, il coefficiente*  $i$  *nel rapporto*  $\frac{f'(\alpha + i\beta)}{f(\alpha + i\beta)}$  *ha segno contrario a*  $\beta$ .

3. - Supponiamo ora che  $f(x) = 0$  ammetta una sola coppia di radici complesse,  $\alpha + i\beta$  e  $\alpha - i\beta$ ; si avrà

$$f(x) = [(x - \alpha)^2 + \beta^2]p(x),$$

in cui  $p(x) = 0$  ha tutte le radici reali.

Derivando due volte e ponendo  $x = \alpha + i\beta$ , si ottiene

$$\begin{aligned} f'(\alpha + i\beta) &= 2i\beta \cdot p(\alpha + i\beta) \\ f''(\alpha + i\beta) &= 4i\beta \cdot p'(\alpha + i\beta) + 2p(\alpha + i\beta). \end{aligned}$$

Facendo il rapporto risulta

$$(2) \quad \frac{f'(\alpha + i\beta)}{f''(\alpha + i\beta)} = \frac{i\beta}{2i\beta \frac{p'(\alpha + i\beta)}{p(\alpha + i\beta)} + 1}.$$

Per il lemma precedente il rapporto  $\frac{p'(\alpha + i\beta)}{p(\alpha + i\beta)}$  è della forma  $A - i\beta B^2$ ; si ha perciò

$$\frac{f'(\alpha + i\beta)}{f''(\alpha + i\beta)} = \frac{i\beta}{2i\beta A + (1 + 2\beta^2 B^2)},$$

in cui il coefficiente di  $i$  è, a meno d'un divisore positivo,

$$\beta(1 + 2\beta^2 B^2).$$

Si conclude pertanto: *nell'ipotesi fatta il coefficiente di*  $i$  *nel rapporto*  $\frac{f'(\alpha + i\beta)}{f''(\alpha + i\beta)}$  *ha lo stesso segno di*  $\beta$ .

Se dunque in un caso si trovasse che questo rapporto ha segno opposto a quello di  $\beta$ , bisognerebbe concludere che la  $f(x) = 0$  o ha tutte le radici reali o ne ha più di due immaginarie. Ma quest'ultimo caso è da escludere.

Ammettiamo infatti che abbia le radici  $\alpha+i\beta$  e  $\alpha+ib$  distinte, e sia  $\alpha+i\beta$  quella che ha, in valore assoluto, il maggior coefficiente immaginario ( $\beta^2 > b^2$ ). Per essa vale la (2). Allora poniamo

$$p(x)=[(x-\alpha)^2+b^2]q(x),$$

in cui per l'ipotesi fatta  $q(x)=0$  ha tutte le radici reali. Si deduce

$$\frac{p'(\alpha+i\beta)}{p(\alpha+i\beta)} = \frac{q'(\alpha+i\beta)}{q(\alpha+i\beta)} + 2 \frac{\alpha - \alpha + i\beta}{(\alpha - \alpha)^2 + b^2 - \beta^2 + 2i\beta(\alpha - \alpha)}.$$

La parte immaginaria dell'ultima frazione è, a meno d'un fattor positivo,

$$-i\beta[(\alpha - \alpha)^2 + \beta^2 - b^2];$$

cioè di segno contrario a  $\beta$ , ( $\beta^2 > b^2$ ), come la parte immaginaria di  $q'/q$  a norma del lemma stabilito. Ne segue che la parte immaginaria di  $\frac{p'(\alpha+i\beta)}{p(\alpha+i\beta)}$  è ancora di segno contrario a  $\beta$ , come nelle considerazioni precedenti. *Se dunque  $\alpha+i\beta$  è la radice di  $f(x)=0$  che ha il maggior valore per  $\beta^2$ , il coefficiente di  $i$  nel rapporto  $\frac{f'(\alpha+i\beta)}{f''(\alpha+i\beta)}$  ha lo stesso segno di  $\beta$ ; talchè, se in un caso si trova che cotesto rapporto ha invece sempre il segno opposto a  $\beta$  si dovrà concludere che l'equazione  $f(x)=0$  ha tutte le radici reali.*

Ora sia

$$pf'' + qf' + rf = 0$$

l'equazione differenziale a cui soddisfa la  $f(x)$ ; si ricava

$$\frac{f'(\alpha+i\beta)}{f''(\alpha+i\beta)} = -\frac{p(\alpha+i\beta)}{q(\alpha+i\beta)}.$$

*Se questo rapporto risulta di segno contrario a  $\beta$ , si concluderà che l'equazione  $f(x)=0$  ha tutte le radici reali.* Nel caso contrario non si potrà affermar nulla. È questo il *criterio di Laguerre*.

4. - Applichiamolo all'equazione  $y_n(x)=0$ , in cui  $y_n(x)$  è il polinomio soddisfacente alla (1). Posto che  $\alpha+i\beta$  sia una sua radice, si deduce dalla (1) stessa

$$\begin{aligned} \frac{y'(\alpha+i\beta)}{y''(\alpha+i\beta)} &= -\frac{a_1(\alpha+i\beta) + a_0}{b_1(\alpha+i\beta) + b_0} \\ &= \frac{(a_1\alpha + a_0) + i\beta a_1}{(b_1\alpha + b_0) + i\beta b_1}. \end{aligned}$$

Il coefficiente di  $i$ , a meno d'un fattor positivo, è

$$\beta b_1(a_1\alpha + a_0) - \beta a_1(b_1\alpha + b_0) = -\beta\delta,$$

essendo  $\delta$  l'invariante lineare. Ne consegue: *Se l'invariante è positivo, la equazione  $y_n(x)=0$  ha tutte le radici reali.* È la prima parte del teorema enunciato.

Questo vale in particolare per i noti polinomi di LAGUERRE e per quelli di HERMITE, che soddisfano rispettivamente all'equazioni

$$\begin{aligned}xy''+(1-x)y'+ny&=0 \\y''-xy'+ny&=0.\end{aligned}$$

Per il caso  $\delta < 0$  il criterio di LAGUERRE non dà nulla.

5. - Si possono determinare delle formule ricorrenti relative ai polinomi  $y_n(x)$  con vari indici, senza conoscere nè la loro espressione nè la loro genesi, sfruttando cioè la sola equazione differenziale; cosa che non ho veduto fatta da altri autori in casi analoghi. Si vedrà la parte importante che ha l'invariante lineare.

Anzitutto poniamo per semplificare  $t=x+\frac{b_0}{b_1}$ ; la (1) diventa

$$\left(\frac{a_1}{b_1}t-\frac{\delta}{b_1^2}\right)y''+ty'-ny=0$$

che scriveremo

$$(2) \quad (c_0t-c_1)y''+ty'-ny=0 \quad \left(c_0=\frac{a_1}{b_1}, \quad c_1=\frac{\delta}{b_1^2}\right).$$

Introduciamo l'operatore

$$\mathcal{E}_n=(c_0t-c_1)\frac{d^2}{dt^2}+t\frac{d}{dt}-n,$$

per modo che la (2) si scrive semplicemente  $\mathcal{E}_n(y_n)=0$ . Si ottengono subito le due formule seguenti:

$$(3) \quad \mathcal{E}_{n-1}(y_n)=y_n, \quad \mathcal{E}_n(y_{n-1})=-y_{n-1}.$$

Derivando poi l'equazione differenziale si ottiene

$$(c_0t-c_1)y'''+(t+c_0)y''-(n-1)y'=0,$$

dalla quale si deduce

$$(4) \quad \mathcal{E}_{n-1}(y_n')=-c_0y_n'', \quad \mathcal{E}_n(y_n')=-c_0y_n''-y_n'.$$

Ora calcoliamo  $\mathcal{E}_{n-1}[(at+b)y_n']$ . Si trova

$$\mathcal{E}_{n-1}[(at+b)y_n']=(at+b)\mathcal{E}_{n-1}(y_n')+2a(c_0t-c_1)y_n''+aty_n',$$

che per la prima delle (4) diventa

$$\mathcal{E}_{n-1}[(at+b)y_n']=(ac_0t-bc_0-2ac_1)+aty_n'.$$

Se dunque si pone

$$bc_0+2ac_1=ac_1, \quad \text{ossia} \quad bc_0+ac_1=0,$$

il secondo membro, in virtù dell'equazione differenziale, si riduce a

$$any_n, \quad \text{ossia a} \quad an\mathcal{E}_{n-1}(y_n).$$

Ne consegue

$$\mathcal{E}_{n-1}[(at+b)y_n' - any_n] = 0.$$

La condizione imposta equivale a  $b = -hc_1$ ,  $a = hc_0$ , essendo  $h$  un fattore di proporzionalità; risulta dunque

$$\mathcal{E}_{n-1}[(c_0t - c_1)y_n' - nc_0y_n] = 0.$$

Poichè la funzione dentro parentesi è un polinomio, dovrà essere necessariamente

$$(c_0t - c_1)y_n' - nc_0y_n = Ay_{n-1}.$$

Il fattore  $A$  risulta determinato considerando le più elevate potenze dei polinomi <sup>(2)</sup>.

Si trova

$$(5) \quad (c_0t - c_1)y_n' = nc_0y_n - n[c_1 + (n-1)c_0^2]y_{n-1}.$$

Tornando alla variabile  $x$  e alle primitive costanti, si ottiene

$$(5') \quad b_1(a_1x + a_0)y_n' = na_1b_1y_n - n[\delta + (n-1)a_1^2]y_{n-1},$$

che è appunto una *relazione ricorrente* <sup>(3)</sup>.

Se ne può dedurre un'altra, dove non compariscono le derivate. Infatti, derivando la (5) e tenendo conto dell'equazione differenziale, si ottiene

$$ny_n = [t + (n-1)c_0]y_n' - n[c_1 + (n-1)c_0^2]y_{n-1}.$$

Usando ancora la (5) e quella che si deduce cambiando  $n$  in  $n-1$ , si possono far sparire le derivate prime. Dopo qualche semplificazione si trova

$$y_n - [t + 2(n-1)c_0]y_{n-1} + (n-1)[c_1 + (n-2)c_0^2]y_{n-2} = 0;$$

la quale, passando alla primitiva variabile, diventa

$$(6) \quad b_1^2y_n - b_1[b_1x + 2(n-1)a_1 - b_0]y_{n-1} + (n-1)[\delta + (n-2)a_1^2]y_{n-2} = 0,$$

che è la *relazione ricorrente* cercata.

6. - Ora per tornare al nostro teorema facciamo due osservazioni preliminari. Per  $n=2$  la soluzione polinomiale dell'equazione differenziale (2) è

$$y = t^2 + 2c_0t - c_1,$$

che ha radici reali se, supposto  $c_1 < 0$ , risulta  $|c_1| \leq c_0^2$ ; radici complesse se  $|c_1| > c_0^2$ . Queste condizioni corrispondono a  $\delta < 0$  con  $|\delta| \leq a_1^2$  nel primo caso;  $\delta < 0$  con  $|\delta| > a_1^2$  nel secondo caso; e questo conformemente al teorema enun-

<sup>(2)</sup> Il coefficiente della più alta potenza in  $y_n$  si suppone uguale a uno.

<sup>(3)</sup> Manifestamente questa è valida anche per le soluzioni trascendenti della (1). Di qui il vantaggio della esposta deduzione.

ciato. Nel caso  $c_0 = 0$  basta la condizione  $c_1 < 0$ , ossia  $\delta < 0$ , perchè le radici siano immaginarie.

Per  $n = 3$  la soluzione polinomiale è

$$y = t^3 + 6c_0t^2 + 3(2c_0^2 - c_1)t - 4c_0c_1,$$

ed è facile verificare la verità del teorema. Posto  $z = t + 2c_0$ ,  $2c_0^2 + c_1 = h$ , l'equazione diventa

$$y = z^3 - 2hz + 2c_0h = 0,$$

il cui discriminante è  $h^2(c_0^2 - h)$ . Se è  $h < 0$ , oppure  $h > 0$  e  $< c_0^2$  esistono radici complesse; se è  $h > 0$  e  $\geq c_0^2$  le radici sono tutte reali. Queste condizioni corrispondono appunto a  $\delta < 0$  con  $|\delta| \leq a_1^2$  nel caso della realtà; a  $\delta < 0$  con  $|\delta| > a_1^2$  nel caso opposto.

La seconda osservazione che occorre è questa, ed è del LAGUERRE: *Se*  $f(x) = 0$  *ha tutte le radici reali, anche*  $(x - \zeta)f'(x) - nf(x)$  *ha tutte le radici reali qualunque sia*  $\zeta$ . Possiamo darne una dimostrazione semplicissima. Per stare nel caso che c'interessa, consideriamo la funzione

$$(c_0t - c_1)^{-n}y_n(t),$$

che per ipotesi ha  $n$  radici reali, quelle che annullano  $y_n(t)$ ; ne segue per il teorema di Rolle che la sua derivata

$$(c_0t - c_1)^{-n-1}[(c_0t - c_1)y_n'(t) - c_0ny_n(t)]$$

ha pure  $n - 1$  radici reali, e sono quelle che annullano (\*)

$$(c_0t - c_1)y_n'(t) - c_0ny_n(t).$$

Ciò posto, considerando la relazione ricorrente (5) vediamo che se  $y_{n-1} = 0$  ha delle radici complesse queste appartengono a

$$(c_0t - c_1)y_n' - nc_0y_n = 0;$$

epperò la  $y_n = 0$  non può avere tutte le radici reali, altrimenti si cadrebbe in contraddizione con l'osservazione precedente. Ma per  $n = 2$ ,  $n = 3$  abbiam visto che le condizioni  $\delta < 0$ ,  $|\delta| > a_1^2$  assicurano l'esistenza di radici complesse; perciò qualunque sia  $n$  l'equazione  $y_n(x) = 0$  avrà delle radici complesse quando sia  $\delta < 0$  e  $|\delta| > a_1^2$ ; conformemente al teorema enunciato.

Riguardo alla realtà delle radici nel caso  $\delta < 0$  e  $|\delta| < a_1^2$ , non pare che le relazioni ricorrenti possano fornirne una dimostrazione rigorosa.

(\*) Se una radice della  $y_n = 0$  fosse  $t = \frac{c_1}{c_0}$ , si può scrivere  $y_n - (c_0t - c_1)z(t)$  e verrebbe

$$F = (c_0t - c_1)y_n' - c_0ny_n = (c_0t - c_1)[(c_0t - c_1)z' - (n - 1)z];$$

onde si vede che il teorema è ancora vero.

7. - Vogliamo infine indicare una relazione integrale che fa vedere sempre più l'importanza dell'*invariante lineare*.

Moltiplichiamo l'equazione differenziale (2) per il fattore

$$\varrho = (c_0 t - c_1) \frac{c_1 - c_0^2}{c_0^2} \cdot e^{\frac{t}{c_0}} = (c_0 t - c_1) \frac{\delta}{a_1^2} - 1 \cdot \frac{b_1 t}{a_1} \cdot e^{\frac{b_1 t}{a_1}}.$$

Essa acquista la forma

$$\frac{d}{dt} [(c_0 t - c_1) y_n'] = n (c_0 t - c_1) \frac{\delta}{a_1^2} - 1 \cdot \frac{b_1 t}{a_1} \cdot e^{\frac{b_1 t}{a_1}} y_n(t),$$

ossia

$$\frac{d}{dt} [(c_0 t - c_1) \frac{\delta}{a_1^2} \cdot e^{\frac{b_1 t}{a_1}} y_n'] = n (c_0 t - c_1) \frac{\delta}{a_1^2} - 1 \cdot \frac{b_1 t}{a_1} \cdot e^{\frac{b_1 t}{a_1}} y_n.$$

Scriviamo la stessa equazione cambiando  $n$  in  $m$ ; poi moltiplichiamo la prima per  $y_m$ , la seconda per  $y_n$  e sottraggiamo; si ottiene

$$\frac{d}{dt} [(c_0 t - c_1) \frac{\delta}{a_1^2} \cdot e^{\frac{b_1 t}{a_1}} (y_n' y_m - y_m' y_n)] = (n - m) (c_0 t - c_1) \frac{\delta}{a_1^2} - 1 \cdot \frac{b_1 t}{a_1} \cdot e^{\frac{b_1 t}{a_1}} y_n y_m.$$

Se s'integra fra  $-\infty$  e  $\frac{c_0}{c_1} = \frac{\delta}{a_1 b_1}$ , quando sia  $\delta > 0$ , si trova manifestamente

$$\int_{-\infty}^{\frac{\delta}{a_1 b_1}} (c_0 t - c_1) \frac{\delta}{a_1^2} - 1 \cdot \frac{b_1 t}{a_1} \cdot e^{\frac{b_1 t}{a_1}} y_n(t) y_m(t) dt = 0, \quad (n \neq m)$$

ossia con la primitiva variabile

$$\int_{-\infty}^{-\frac{a_0}{a_1}} (a_1 x + a_0) \frac{\delta}{a_1^2} - 1 \cdot \frac{b_1 x}{a_1} \cdot e^{\frac{b_1 x}{a_1}} y_n(x) y_m(x) dx = 0.$$

Se è  $\delta < 0$  questa formula non sussiste più. Si conclude pertanto: *quando l'invariante lineare è positivo, e solo in tal caso, le funzioni*

$$(a_1 x + a_0) \frac{1}{2} \left( \frac{\delta}{a_1^2} - 1 \right) \cdot \frac{b_1 x}{a_1} \cdot e^{\frac{b_1 x}{a_1}} y_n(x)$$

*formano un sistema ortogonale.* Si noti che questo teorema è valido per tutte le soluzioni della (1).

8. - Sarà utile far vedere che la seconda soluzione fondamentale della (1), non polinomiale, si ottiene in modo assai semplice. Derivando  $n$  volte la (1), si trova

$$(a_1 x + a_0) y^{(n+2)} + (b_1 x + b_0 + n a_0) y^{(n+1)} = 0;$$

da cui

$$\log y^{(n+1)} = - \int \frac{b_1 x + b_0 + n a_0}{a_1 x + a_0} dx.$$

172 P. BURGATTI: *Sull'equazione*  $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$ , etc.

Di qui si deduce

$$y^{(n+1)} = A \frac{e^{-\frac{b_1}{a_1}x}}{(a_1x + a_0)^{n + \frac{\delta}{a_1}}},$$

e per una nota formula <sup>(5)</sup>

$$y(x) = \frac{A}{n!} \int_0^x \frac{(x-t)^n e^{-\frac{b_1}{a_1}t}}{(a_1t + a_0)^{n + \frac{\delta}{a_1}}} dt.$$

Questa è appunto la seconda soluzione non polinomiale.

---

<sup>(5)</sup> PINCHERLE: *Lezioni di calcolo*, pag. 472.