ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LUDWIG SCHLESINGER

Zur Theorie der Zetareihen von Poincaré

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 1, nº 3 (1932), p. 251-254
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_3_251_0>

ZUR THEORIE DER ZETAREIHEN VON POINCARÉ

Von LUDWIG SCHLESINGER (Gieszen).

Die Lösungen linearer Differentialgleichungen vom Fuchsschen Typus hat POINCARÉ in seinem *Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes* (1884, Oeuvres, t. I, p. 402) als Zetafunktionen bezeichnet und zu ihrer analytischen Darstellung Reihen aufgestellt, die man am übersichtlichsten in folgender Form schreiben kann:

$$Z=\sum_{n=0}^{\infty}(T^n)^{-1}H(\alpha_n u_2+\beta_n u_1,\ \gamma_n u_2+\delta_n u_1)\,; \tag{1}$$

hierin bedeutet H eine Matrix von p^2 homogenen rationalen Funktionen $-2m^{\text{ten}}$ Grades von u_1, u_2, m eine positive ganze Zahl, $\begin{pmatrix}\alpha_n & \beta_n\\ \gamma_n & \delta_n\end{pmatrix}$ durchlaufen die unimodularen Substitutionen einer Fuchsschen Gruppe θ, T^n die entsprechenden, ebenfalls unimodularen Substitutionen einer zu θ isomorphen homogenen linearen Gruppe Θ in p Veränderlichen. Wenn die Gruppe θ keine parabolischen Substitutionen enthält, so konvergiert die Matrizenreihe Z absolut (¹), wenn die Zahl m hinreichend gross ist, in jedem Punkte $\eta=u_2/u_1$ im Innern des Orthogonalkreises der Gruppe θ, der kein Pol eines der Elemente der Matrix H ist oder mit einem solchen vermöge des Substitutionen von θ korrespondiert. In diesem Falle haben alle Wurzeln der charakteristischen Gleichungen derjenigen Substitutionen von Θ, die den Fundamentalsubstitutionen von θ entsprechen den absoluten Betrag Eins, da ja alle Fundamentalsubstitutionen von θ elliptische sind. Enthält θ dagegen parabolische Substitutionen, also auch parabolische Fundamentalsubstitutionen, so konvergiert die Reihe Z unter sonst gleichen Bedingungen dann und nur dann absolut, wenn auch die Substitutionen von Θ, die den parabolischen Fundamentalsubstitutionen von θ entsprechen, so beschaffen sind, dass die Wurzeln ihrer charakteristischen Gleichungen den absoluten Betrag 1 besitzen. Dass unbedingte Konvergenz nicht stattfinden kann, wenn auch nur eine der besagten Wurzeln einen von 1 verschiedenen absoluten Betrag aufweist, folgt einfach

(¹) Siehe POINCARÉ a. a. O. oder SCHLESINGER: *Handbuch der linearen Differentialgleichungen*, Band II, 2, 1898, p. 349, § 356.

daraus, dass in diesem Falle mindestens ein Element der Matrizenreihe Z eine Teilreihe enthält, die, wenn ω jene Wurzel bedeutet, für die $|\omega| \neq 1$ ist, die Form hat

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n)\omega^{-n},$$

wo g eine rationale Funktion bedeutet (²). Wenn die Reihe Z unbedingt konvergiert, so hat sie die auszerordentlich wertvolle Eigenschaft, dass ihr analytisches Verhalten bei Anwendung einer Substitution S der Fuchssche Gruppe θ auf u_1, u_2 unmittelbar zu übersehen ist; es wird nämlich dann Z von links her mit der Substitution T von Θ multipliziert, die jener auf u_1, u_2 angewandten Substitution S von θ entspricht. Während also die Form der Reihe Z ganz der Natur der durch sie darzustellenden Funktionen angepasst erscheint, ist ihr Verhalten in bezug auf die Konvergenz ein durchaus singuläres, indem sie in der Mannigfaltigkeit jener Wurzeln charakteristischer Gleichungen dann und nur dann absolut konvergiert, wenn diese Wurzeln alle auf dem Einheitskreise gelegen sind. Es ist wohl diesem Umstande zuzuschreiben, dass in dem halben Jahrhundert, das seit der Entdeckung dieser merkwürdigen Reihen verflossen ist, soviel mir bekannt ist, sich nur drei Schriftsteller mit ihnen beschäftigt haben, nämlich ausser dem Verfasser dieser Zeilen, noch FUBINI in seinem Buche: *Introduzione alla Teoria delle funzioni automorfe* (1908, § 39, p. 270 und § 43, p. 295) und T. BRODÉN in einer Abhandlung im Bande 29 der Acta Mathematica (1904) p. 273, in der der Versuch gemacht wird, im Falle von Wurzeln ω mit von 1 verschiedenem absoluten Betrage durch Multiplikation der Reihenglieder mit passenden Faktoren die Konvergenz zu erzwingen. Dabei bereitet des Existenzbeweis für diese Faktoren noch gewisse Schwierigkeiten.

Um in die Ursache der geschilderten Erscheinung tiefere Einsicht zu gewinnen und auf Grund dieser, wenn möglich, der Divergenz jener Reihen auf irgend eine Weise abhelfen zu können, betrachtete ich den denkbar einfachsten Fall, nämlich den, einer Funktion $y = x^s$ für ein beliebiges komplexes s, so dass also $p = 1$ und $\eta = \log x$ die uniformisierende Variable ist. Die Gruppe θ besteht dann aus den parabolischen Substitutionen $\eta + 2n\pi i$, denen die Substitutionen $\omega^n y$ für $\omega = e^{2\pi i s}$ von Θ entsprechen. Unsere Reihe Z nimmt also die Form an

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega^{-n} h(\eta + 2n\pi i), \tag{2}$$

wo h den Algorithmus einer rationalen Funktion bedeutet. Die Natur dieser Reihe, die, unbedingte Konvergenz vorausgesetzt, den Faktor ω annimt, wenn η um $2\pi i$ zunimmt, wird vielleicht etwas deutlicher, wenn wir

$$y = x^s = e^{s\eta} = \omega^{\frac{\eta}{2\pi i}}$$

(²) Siehe POINCARÉ a. a. O., SCHLESINGER a. a. O., p. 354.

schreiben, dann entspricht nämlich einem Umlauf von ω um den Nullpunkt die Multiplikation von y mit x, also einer Vermehrung von s um die ganze Zahl n die Multiplikation von y mit x^n und an die Stelle der Reihe (2) tritt die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^{-n} g(s+n), \tag{3}$$

wo g wieder eine rationale Funktion darstellt. Es würde also — absolute Konvergenz vorausgesetzt — y durch eine Reihe der Form (3) dargestellt, d. h. man hätte die unendlichvieldeutige Funktion $y=x^s$ in eine nach *ganzen* Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickelt. Eine solche Entwicklung ergibt sich in sehr einfacher Weise wie folgt ([3]). Wir betrachten in der Ebene der komplexen Variablen z die um den Nullpunkt als Mittelpunkt mit den Radien $r<1<R$ beschriebenen Kreise k und K und schlitzen den von diesen Kreisen begrenzten Ring längs der positiven reellen Achse auf. In dem so entstehenden einfachzusammenhängenden Bereiche ist z^s holomorph, also

$$z^s = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{t^s dt}{t-z},$$

das Integral erstreckt über die gesammte Begrenzung des Bereiches im positiven Sinne. Dieses Integral setzt sich aus vier Teilen zusammen, die wir einzeln berechnen wollen. Das Integral über den grossen Kreis K ergibt sich, da ja $|z|<R$ ist, gleich

$$\int_K \frac{t^s dt}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{R^{s-n}(e^{2\pi i s}-1)}{s-n},$$

für das Integral über den kleinen Kreis k, das im Sinne des Uhrzeigers zu erstrecken ist, finden wir, da $|z|>r$ ist

$$\int_k \frac{t^s dt}{t-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \frac{r^{s+n}(e^{2\pi i s}-1)}{s+n}.$$

Das Integral über das untere Ufer des Schlitzes, wo für $t=\varrho e^{\varphi i}$, $\varphi=2\pi$ ist, wird

$$e^{2\pi i s}\int_R^r \frac{\varrho^s d\varrho}{\varrho - z} \tag{4}$$

und endlich das über das obere Ufer, wo $\varphi=0$ ist,

$$\int_r^R \frac{\varrho^s d\varrho}{\varrho - z}. \tag{5}$$

Wir erhalten somit innerhalb des Kreisrings die Darstellung

$$z^s = \frac{e^{2\pi i s}-1}{2\pi i}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{R^{s-n}}{s-n} + \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}\frac{r^{s+n}}{s+n} - \int_r^R \frac{\varrho^s d\varrho}{\varrho - z}\right\}. \tag{6}$$

Lassen wir $r=R$ werden, etwa beide gleich 1, so fällt das Integral weg und

([3]) Vergl. L. KRONECKER: *Vorlesungen über Integrale*, 1894, 10. Vorlesung, § 14, p. 178.

wir erhalten die gesuchte Entwicklung

$$z^s = \frac{e^{2\pi i s} - 1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^n \frac{1}{s-n}, \tag{7}$$

die aber nur auf der Peripherie des Einheitskreises giltig ist, während, wenn wir Giltigkeit in einem wirklichen Kreisring beanspruchen, das Zusatzintegral hinzutreten muss.

Auf unsere Funktion $y = \omega^{\frac{\eta}{2\pi i}}$ angewandt gibt die Reihe (7) die nur für $|\omega| = 1$ giltige Entwicklung

$$y = x^s = (x-1) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega^{-n} \frac{1}{\eta + 2n\pi i}, \tag{8}$$

die also aus (2) hervorgeht, wenn man die rationale Funktion $h(\eta) = 1/\eta$ nimmt, während für einen wirklichen Kreisring $r < |\omega| < R$ sich aus (6) die Entwicklung

$$y = x^s = (x-1) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega}{R}\right)^n \frac{R^{\frac{\eta}{2\pi i}}}{\eta - 2n\pi i} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\omega}\right)^n \frac{r^{\frac{\eta}{2\pi i}}}{\eta + 2\pi n i} - \frac{1}{2\pi i} \int_r^R \frac{\varrho^{\frac{\eta}{2\pi i}} d\varrho}{\varrho - \omega} \right\} \tag{9}$$

ergibt. Die wichtige Eigenschaft der Reihe (8), *unmittelbar* zur Anschauung zu bringen, dass eine Vermehrung von η um $2\pi i$ die Multiplikation von y mit ω bewirkt, bleibt auch für die allgemeine Reihe (9) erhalten, indem nämlich

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_r^R \frac{\varrho^{\frac{\eta}{2\pi i}+1} d\varrho}{\varrho - \omega} = -\frac{R^{\frac{\eta}{2\pi i}+1}}{\eta + 2\pi i} + \frac{r^{\frac{\eta}{2\pi i}+1}}{\eta + 2\pi i} - \omega \int_r^R \frac{\varrho^{\frac{\eta}{2\pi i}} d\varrho}{\varrho - \omega}$$

ist. Wir hätten in der vorstehenden Rechnung den Exponenten s auch als Matrix von p^2 Elementen nehmen können, es wäre dann $\omega = e^{2\pi i s}$ ebenfalls eine Matrix und man hätte deren $\frac{\eta}{2\pi i}^{\text{te}}$ Potenz zu entwickeln.

Aus den Beobachtungen in diesem einfachsten Falle ergibt sich in Bezug auf die allgemeine Zetareihe das Folgende: Halten wir an der Voraussetzung fest, dass die Determinante der Substitutionen T der Gruppe Θ gleich Eins sei (wovon wir im Falle $p = 1$ natürlich absehen mussten), so liegen die Wurzeln der charakteristischen Gleichung einer solchen Substitution dem absoluten Betrag nach zwischen zwei Gröszen $r < 1 < R$, und wenn $r = R$ sein soll, so muss dieser gemeinsame Wert gleich 1 sein. Die Reihe (1) entspricht dem Grenzfalle, wo alle Wurzeln der charakteristischen Gleichungen von den Substitutionen T, die den Fundamentalsubstitutionen von θ entsprechen, den absoluten Betrag 1 haben. Liegen diese Wurzeln absolut genommen zwischen zwei von einander verschiedenen Grenzen $r \neq R$, so müssen der Reihe (1) noch Zusatzglieder hinzugefügt werden von der Art, wie die Integrale (4), (5) in dem betrachteten einfachen Falle. Diese Zusatzglieder wirklich herzustellen, ist eine noch zu lösende Aufgabe; vielleich wirft aber auch schon die hier gemachte einfache Bemerkung einiges Licht in das rätselhafte Dunkel, das die Konvergenzverhältnisse der Zetareihen von POINCARÉ umgibt.