ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LAMBERTO CESARI

Sulle serie doppie

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 1, nº 3 (1932), p. 297-314
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_3_297_0>

SULLE SERIE DOPPIE [1]

di LAMBERTO CESARI (Pisa).

Nel presente lavoro, si pone a confronto la nozione di convergenza delle serie doppie, dovuta a STOLZ e PRINGSHEIM [2] (e che chiameremo *convergenza ordinaria*) con la nozione, introdotta dal LEJA [3], di convergenza in una direzione, nozione che si riduce, in casi particolari, alla convergenza, già conosciuta, per righe, per colonne, per diagonali [4].

È noto che la convergenza ordinaria non implica la convergenza per righe, colonne, diagonali, e inoltre che la simultanea convergenza in senso ordinario e per diagonali non implica necessariamente l'uguaglianza delle due somme. Si mostra, in questo lavoro, che il primo fatto si estende a tutte le direzioni, e che il secondo si estende *soltanto* alle direzioni che noi diciamo razionali. Noi precisamente abbiamo osservato che non si conoscono esempi di serie doppie aventi la somma ordinaria e quella in una direzione irrazionale diverse tra loro.

Questo fatto è stato da noi messo in relazione con l'altro che nessuna delle serie doppie finora costruite, con la somma ordinaria e quella in una direzione razionale diverse tra loro, ha il termine generale convergente a zero al crescere della somma dei due indici, *condizione che, invece, è necessaria per la convergenza in una direzione irrazionale.*

Ora, *posta questa condizione*, e introdotto il concetto di *convergenza gene-*

---

(1) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(2) O. STOLZ, Math. Annalen, 24 (1884), p. 157 e seg. — A. PRINGSHEIM, Sitzungsberichte Akad. München, 27 (1897), p. 101 e seg.

(3) F. LEJA, Math. Annalen, 103 (1930), pp. 364-368.

(4) V. per una completa trattazione della teoria:

A. PRINGSHEIM, Math. Annalen, 53 (1900), pp. 289-321. — F. LONDON, Math. Annalen, 53 (1900), pp. 322-370.

V. per trattazioni elementari:

F. SEVERI, Periodico di Matematica, s. IV, vol. III (1923), pp. 219-237. — S. PINCHERLE: *Analisi algebrica.* Ed. Zanichelli, 1920, pp. 156-161.

Cfr. l'articolo di A. PRINGSHEIM e J. MOLK nella « Encyclopédie des Sciences mathématiques », Paris, Leipzig, 1907, t. I, vol. I, fasc. II, p. 249 e seg.

ralizzata in una direzione, concetto che è una derivazione di quello di convergenza secondo le medie del CESARO (5), si dimostra che *la convergenza ordinaria implica necessariamente la convergenza generalizzata in tutte le direzioni, escluse quelle corrispondenti alla sommazione per linee e per colonne, e l'uguaglianza di tutte queste somme a quella ordinaria. Inoltre, sotto le stesse ipotesi, si dimostra che si ha necessariamente anche la convergenza secondo le medie del Cesaro alla stessa somma ordinaria, in tutte le direzioni razionali ed irrazionali, ossia in tutte le direzioni, escluse quelle corrispondenti alla sommazione per linee e per colonne.*

Da ciò segue che *ogni serie doppia, a termine generale tendente allo zero nel modo detto, e convergente nel senso ordinario, ha la stessa somma in ogni direzione nella quale essa converge*; e segue pure che *non è possibile costruire serie doppie convergenti in senso ordinario e in una direzione irrazionale a somme diverse tra loro.*

Rileviamo che le precedenti osservazioni ci permettono di asserire, inoltre, che ogni serie doppia, il cui termine generale non converga a zero al crescere della somma degli indici, può convergere soltanto in un numero finito od in una infinità numerabile al più di direzioni.

§ 1.

1. - Richiamiamo la nozione di convergenza di una serie doppia in una direzione (α, β) (6).

Sia la serie doppia:

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}. \tag{1}$$

Siano α, β due numeri reali soddisfacenti alle relazioni:

$$\alpha \geqslant 0, \qquad \beta \geqslant 0, \qquad \alpha^2+\beta^2=1.$$

Indichiamo con

$$\sum_{\alpha\mu+\beta\nu=\lambda} a_{\mu\nu} \tag{2}$$

la somma dei termini $a_{\mu\nu}$ i cui indici soddisfano alla equazione $\alpha\mu+\beta\nu=\lambda$, con λ numero fisso, e consideriamo la serie semplice

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}\left(\sum_{\alpha\mu+\beta\nu=\lambda} a_{\mu\nu}\right) \tag{3}$$

(5) E. CESARO: *Sur la multiplication des séries.* Bulletin des Sciences mathématiques, s. 2, t. XIV, 1890, pp. 114-120.

(6) F. LEJA, loc. cit., p. 365.

dove λ percorre in ordine crescente tutti i numeri reali e positivi della forma $\alpha\mu+\beta\nu$, con μ e ν interi $\geqslant 0$ (7).

Se la serie (3) *converge, si dice che la serie doppia* (1) *converge nella direzione* (α, β).

Nei casi estremi in cui è $(\alpha=0, \beta=1)$, $(\alpha=1, \beta=0)$, si intende che nella (2) i termini siano ordinati, rispettivamente, secondo i μ, ν crescenti; allora la (3) diventa, rispettivamente,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\right), \qquad \sum_{\mu=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\right)$$

e quindi, in tali casi, la nuova definizione si riduce a quella di convergenza per colonne e per righe. Inoltre, per $\alpha=\beta$, si ha la nota convergenza per diagonali:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\mu+\nu=n} a_{\mu\nu}\right).$$

Noi diremo, rispettivamente, *razionale* o *irrazionale* una direzione (α, β), con $\alpha\beta \neq 0$, secondo che il numero $\frac{\alpha}{\beta}$ è razionale o irrazionale.

2. - TEOREMA I. - *Condizione necessaria per la convergenza di una serie doppia in una direzione* (α, β) *irrazionale è la convergenza a zero del termine generale della serie al crescere della somma degli indici.*

Sia la serie doppia (1). Per una direzione qualunque, il termine generale della (3) è sempre $\sum_{\alpha\mu+\beta\nu=\lambda} a_{\mu\nu}$ dove λ è un numero della forma $\alpha\mu+\beta\nu$. Ora osserviamo che l'equazione $\alpha\mu+\beta\nu=\lambda$ ha per un dato λ, e in numeri interi, una ed una sola soluzione qualora $\frac{\alpha}{\beta}$ sia irrazionale. Infatti, se ne avesse due $(\mu_1\nu_1)$, $(\mu_2\nu_2)$ si avrebbe $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\nu_2-\nu_1}{\mu_1-\mu_2}$, cioè $\frac{\alpha}{\beta}$ razionale, contro l'ipotesi. Perciò ogni termine (2) della (3) è formato da uno ed uno solo termine della serie doppia (1), dato che non si ha mai in alcun caso associazione di due o più termini. La serie (3) è dunque, per una qualsiasi direzione (α, β) con $\frac{\alpha}{\beta}$ irrazionale, formata dai termini stessi della (1) presi in un dato ordine.

Per la sua convergenza sarà quindi necessario, per il criterio di CAUCHY, che, preso un $\varepsilon>0$ arbitrario, sia possibile determinare in conseguenza un $\bar{\lambda}$ tale

(7) Si osservi che l'insieme dei numeri λ della forma $(\alpha\mu+\beta\nu)$ (μ e ν interi $\geqslant 0$), e fra loro distinti, ha un sol punto d'accumulazione all'infinito e perciò è possibile ordinarlo in ordine crescente. Infatti, affinchè sia $\alpha\mu+\beta\nu<M$ $(\alpha\beta\neq 0)$ deve essere separatamente $\mu<\frac{M}{\alpha}$, $\nu<\frac{M}{\beta}$ ed essendo μ, ν maggiori od uguali a 0 e interi, si ha solo un numero finito di coppie (μ, ν) possibili e quindi un numero finito di numeri $\lambda<M$ distinti. Per $(\alpha=0, \beta=1)$ e $(\alpha=1, \beta=0)$ si ha rispettivamente $\alpha\mu+\beta\nu=\nu$, $\alpha\mu+\beta\nu=\mu$.

che, per ogni $\lambda > \bar{\lambda}$, la soluzione dell'equazione $\alpha\mu + \beta\nu = \lambda$, rappresenti un termine della serie (1) per cui è $|a_{\mu\nu}| < \varepsilon$. Supponiamo ora $\beta \geqslant \alpha \neq 0$.

Preso $\lambda^* = \frac{\bar{\lambda}}{\alpha}$, basterà far sì che si abbia $\mu + \nu \geqslant \lambda^*$ affinchè sia verificata la condizione precedente, dato che, come ora dimostrerò, se due indici (μ, ν) verificano quest'ultima inequazione, verificano certamente anche la $\alpha\mu + \beta\nu \geqslant \bar{\lambda}$.

Infatti è

$$\alpha\mu + \beta\nu = \alpha(\mu + \nu) + (\beta - \alpha)\nu$$

e quindi per $\mu + \nu \geqslant \lambda^*$

$$\alpha\mu + \beta\nu \geqslant \alpha\frac{\bar{\lambda}}{\alpha} + (\beta - \alpha)\nu \geqslant \bar{\lambda}.$$

Se fosse $\beta \leqslant \alpha$, basterebbe prendere invece $\lambda^* = \frac{\bar{\lambda}}{\beta}$.

Dunque, dal fatto che la (1) converge in una direzione data (α, β) irrazionale, consegue che, preso un $\varepsilon > 0$ arbitrario, è possibile determinare in conseguenza, un λ^* tale che per $\mu + \nu \geqslant \lambda^*$, risulti $|a_{\mu\nu}| < \varepsilon$.

3. - Manifestamente la condizione ora dimostrata non è sufficiente. Anzi possiamo subito vedere che tale condizione non è necessaria per la convergenza in una direzione non irrazionale. Si consideri, infatti, la nota serie del PRINGSHEIM, definita dalle:

$$(4) \qquad \begin{cases} a_{0\nu} = 1, \quad a_{1\nu} = -1 & (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \\ a_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu = 2, 3, \ldots), & (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

la quale, come è noto, converge per diagonali pur non avendo il termine generale tendente a zero al crescere della somma degli indici. Si osservi, di più, che questa serie converge in tutte le seguenti direzioni non irrazionali

$$(5) \qquad \left(\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\right) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

e la somma corrispondente ad ogni m è m [8].

Infatti, preso un numero λ della forma $\alpha\mu + \beta\nu$, a noi non interesseranno, delle soluzioni della equazione $\alpha\mu + \beta\nu = \lambda$, altro che quelle per cui è $\mu = 0$, 1. Ora, se la nostra equazione ha per $\mu = 1$ una soluzione $\nu_1 = k$, essa ha per $\mu = 0$ la soluzione $\nu_0 = m + k$ e perciò, per $k \geqslant 0$, si ha

$$\sum_{\alpha\mu + \beta\nu = \lambda} a_{\mu\nu} = 0,$$

e quindi

$$(6) \qquad \sum_{\lambda=0}^{\infty}\left(\sum_{\alpha\mu + \beta\nu = \lambda} a_{\mu\nu}\right) = \sum_{\nu=0}^{m-1} a_{0\nu} = m.$$

---

[8] Le (5) sono le sole direzioni nelle quali la serie del PRINGSHEIM converge. Infatti, per la convergenza, è necessario che, almeno da un certo momento in poi, se λ è della forma $\beta\nu$ sia anche della forma $\alpha + \beta\nu'$ e viceversa, onde $\frac{\alpha}{\beta} =$ ad un numero intero.

4. - Dal teor. I segue come corollario che *qualsiasi serie doppia non avente il termine generale convergente a zero al crescere della somma degli indici, può convergere soltanto in un numero finito o in una infinità numerabile al più di direzioni.*

Infatti, tale serie potrà al massimo convergere in un insieme di direzioni razionali e tale insieme è numerabile.

Effettivamente esistono serie doppie che, pur non avendo il termine generale convergente a zero nel modo detto, convergono in una infinità di direzioni come mostra, ad esempio, la serie del PRINGSHEIM considerata nel n.° 3.

§ 2.

5. - È noto che la convergenza di una serie doppia in senso ordinario non implica la convergenza della serie stessa per diagonali. Questo fatto lo estenderemo in seguito a qualsiasi direzione razionale. Per le irrazionali si osservi ancora una volta la serie del PRINGSHEIM, la quale, pur convergendo in senso ordinario (a zero) non può convergere in alcuna direzione irrazionale non soddisfacendo alla condizione (necessaria) del teor. I. Inoltre, sappiamo che se una serie doppia converge simultaneamente in senso ordinario e per righe (colonne), le due somme sono necessariamente uguali, mentre per la direzione principale (convergenza per diagonali), ciò non è vero, come mostra la serie del PRINGSHEIM.

Estenderemo questo fatto, che si verifica per la direzione principale, a tutte le direzioni razionali.

6. - Per far ciò premetteremo alcune considerazioni.

Posto

$$\mu' = f(\mu), \qquad \nu' = \varphi(\nu) \tag{7}$$

con f, φ simboli di funzioni di variabile intera e positiva, sempre crescenti rispettivamente con μ e con ν e che assumono soltanto valori interi e positivi.

Sia $\sum\limits_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}$ una serie doppia qualsiasi; si ponga

$$a'_{\mu'\nu'} = a_{\mu\nu} \tag{8}$$

per tutte le coppie (μ', ν') definite dalle (7) e altrimenti

$$a'_{\mu\nu} = 0. \tag{9}$$

La serie $\sum\limits_{\mu',\nu'=0}^{\infty} a'_{\mu'\nu'}$ la diremo serie trasformata della $\sum\limits_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}$ mediante le (7). L'operazione di passaggio dalla $\sum\limits_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}$ alla $\sum\limits_{\mu',\nu'=0}^{\infty} a'_{\mu'\nu'}$ (operazione definita dalle (7) sotto le condizioni dette) sarà chiamata *Trasformazione T.*

7. - Diremo che L è un valore limite di una doppia successione $\sigma_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, ...)$ se esiste una successione semplice

$$\sigma_{\mu_0 \nu_0}, \quad \sigma_{\mu_1 \nu_1}, \quad \sigma_{\mu_2 \nu_2}, ..., \quad \sigma_{\mu_n \nu_n}, ...,$$

la quale abbia tra i propri valori limiti il numero L.

8. - Risulta facilmente la seguente proposizione:

TEOREMA II. - *Ogni Trasformazione T conserva i valori limiti della doppia successione delle ridotte.*

Infatti, si cominci ad osservare che i termini di una riga μ^{ma} generica della serie data si trovano tutti sulla riga μ'^{ma} nella serie trasformata, poichè $f(\mu)$ non dipende da ν. D'altronde essi termini manterranno il medesimo ordine (a meno dell'introduzione di un certo numero di zeri) poichè $\varphi(\nu)$ è sempre crescente. Analogamente per le colonne. Siano

$$(10) \qquad \mu_0', \quad \mu_1', ..., \quad \mu_r', ..., \qquad \nu_0', \quad \nu_1', ..., \quad \nu_s', ...$$

le successioni dei numeri μ', ν' definiti dalle (7) per $\mu = 0, 1, 2, ...,$ $\nu = 0, 1, 2, ...$ Si osservi ora che, dette R_{rs}, R'_{mn} le ridotte generiche della serie data e della trasformata, e posto

$$(11) \qquad \mu_r' \leqslant m < \mu'_{r+1}, \qquad \nu_s' \leqslant n < \nu'_{s+1}$$

si vede che se un termine $a_{\mu\nu}$ appartiene a R_{rs} allora è $\mu \leqslant r$, $\nu \leqslant s$ e il suo corrispondente $a'_{\mu'\nu'}$ appartiene necessariamente a R'_{mn}, e viceversa. Dunque si ha

$$(12) \qquad R_{rs} = R'_{mn}$$

per ogni coppia (r, s) e (m, n) nelle condizioni (11) e quindi senz'altro l'asserto.

Come corollario scende che, se una serie doppia converge in senso ordinario ed ha per somma S, anche la sua trasformata converge ed ha la medesima somma.

9. - Diremo L un valore limite di una serie doppia $\sum\limits_{\mu, \nu = 0}^{\infty} a_{\mu\nu}$ nella direzione $(\alpha, \beta)_r$ se L è un valore limite della serie semplice (3) che si ottiene sommando la $\sum\limits_{\mu, \nu = 0}^{\infty} a_{\mu\nu}$ nella direzione (α, β).

10. - Diamo ora i due seguenti esempi di *Trasformazioni T*:

I[a]) *Sia una serie doppia $\sum\limits_{\mu, \nu = 0}^{\infty} a_{\mu\nu}$ e due direzioni razionali qualsiasi (α, β), (α', β'). Esempio di Trasformazione T per la quale la serie trasformata, mediante essa, della $\sum\limits_{\mu, \nu = 0}^{\infty} a_{\mu\nu}$ ha in direzione (α', β') gli stessi valori limiti che ha la serie data nella direzione (α, β).*

Si osservi che poichè $\frac{\alpha}{\beta}$ è razionale potremo moltiplicare entrambi i numeri α, β per un medesimo coefficiente onde ottenerne numeri interi primi tra loro, che diremo rispettivamente p, q. Così, moltiplicando i numeri della forma $\alpha\mu+\beta\nu$ per il medesimo coefficiente si otterranno tutti e soli i numeri della forma $p\mu+q\nu$. Analogamente per la direzione (α', β').

Basterà porre

$$\mu'=f(\mu)=pq'\mu, \qquad \nu'=\varphi(\nu)=qp'\nu \tag{13}$$

le quali funzioni verificano le condizioni imposte. Per dimostrare l'asserto, consideriamo la successione $\bar{\lambda}_n$ $(n=0, 1,....)$ dei numeri fra loro diversi, della forma $p\mu+q\nu$, disposti in ordine crescente; e consideriamo anche la successione dei numeri $\bar{\lambda}'_{n'}$ $(n'=0, 1,....)$, fra loro diversi e disposti in ordine crescente, della forma $p'\mu'+q'\nu'$, dove ogni coppia (μ', ν') a sua volta è del tipo $(pq'\mu, qp'\nu)$. Si ha

$$\bar{\lambda}'_{n'}=p'\mu'+q'\nu'=p'\cdot pq'\mu+q'\cdot qp'\nu=p'q'(p\mu+q\nu)$$

cioè

$$\bar{\lambda}'_{n'}=p'q'\bar{\lambda}_n, \qquad n=n', \tag{14}$$

e quindi la serie semplice che si ottiene sommando la serie doppia trasformata nella direzione (α', β') è, all'infuori di termini nulli, uguale alla serie semplice che si ottiene sommando la serie doppia data in direzione (α, β).

II[a]) *Sia* $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}$ *una serie doppia convergente nella direzione* (α, β), $(\alpha\beta \neq 0)$ *ad una somma S. Esempio di Trasformazione T per la quale la serie trasformata, mediante essa, della* $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}$ *converge per diagonali alla medesima somma.*

Sia K un numero positivo tale che

$$K\alpha \geqslant 1, \qquad K\beta \geqslant 1, \qquad K\beta \text{ intero.} \tag{15}$$

Poniamo

$$\mu'=f(\mu)=E(K\alpha\mu), \qquad \nu'=\varphi(\nu)=E(K\beta\nu) \quad (^9) \tag{16}$$

le quali funzioni verificano le condizioni imposte. Sia come prima

$$\lambda_0, \quad \lambda_1, \quad \lambda_2,...., \quad \lambda_n,....$$

la successione dei numeri, fra loro distinti, della forma $\alpha\mu+\beta\nu$, disposti in ordine crescente. Sia ora

$$\lambda_0', \quad \lambda_1', \quad \lambda_2',...., \quad \lambda'_{n'},....$$

la successione dei numeri fra loro distinti della forma $\mu'+\nu'$ (e pure disposti in ordine crescente), dove μ' e ν' sono del tipo $f(\mu)$, $\varphi(\nu)$. Si ha

$$\mu'+\nu'=E(K\alpha\mu)+E(K\beta\nu)=E[K(\alpha\mu+\beta\nu)]$$

---

(9) Diremo $E(x)$ il più grande intero contenuto in x.

in forza della terza delle condizioni (15), e quindi

$$\lambda'_{n'} = \mu' + \nu' = E(K\lambda_n). \tag{17}$$

Da ciò si deduce che la serie semplice, che si ottiene sommando per diagonali la serie doppia trasformata, differisce da quella che si ottiene sommando nella direzione (α, β) la serie data, per una determinata associazione di termini; ma poichè ogni serie semplice convergente ammette la proprietà associativa, vale l'asserto.

Osservazione. - Quando anche la $\sum\limits_{\mu,\,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}$ non converga in direzione (α, β), sussiste sempre il fatto che ora rileveremo. Consideriamo la successione delle somme parziali della serie trasformata, mediante la *Trasformazione T* definita dalle (16), sommata per diagonali:

$$S_0', \quad S_1', \quad S_2', \ldots, \quad S_n', \ldots; \tag{18}$$

consideriamo poi, per ogni n, il massimo dei λ_n sopra indicati, tale che la parte intera di $K\lambda_n$ sia minore od uguale a n, ed indichiamolo con λ_{r_n} (supponendo sempre che K soddisfi alle (15)). Posto

$$^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_n} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda_n} \left(\sum_{\alpha\mu+\beta\nu=\lambda} a_{\mu\nu} \right) \tag{19}$$

si ha $^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_{r_n}} = S_n'$ e quindi la successione

$$^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_{r_0}}, \quad {}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_{r_1}}, \ldots, \quad {}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_{r_n}}, \ldots \tag{20}$$

è identica alla (18).

11. - Come immediata applicazione della *Trasformazione* I^a, potremo costruire (partendo per esempio dalla serie del PRINGSHEIM) *esempi di serie doppie convergenti in senso ordinario, ma non in una direzione razionale precedentemente fissata*; e così pure *serie doppie convergenti in senso ordinario ed in una direzione razionale precedentemente fissata a somme diverse.*

§ 3.

12. - Sia una direzione (α, β) con $\alpha\beta \neq 0$.

Diremo che una serie doppia converge secondo le medie del Cesàro [10] *nella direzione* (α, β) *se esiste ed è finito il limite*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_0} + {}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_1} + \ldots + {}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_n}}{n+1} \tag{21}$$

---

[10] E. CESARO, loc. cit., pp. 114-120.

dove

$$\lambda_0, \quad \lambda_1, \quad \lambda_2, \ldots, \quad \lambda_n, \ldots$$

è la successione dei numeri fra loro distinti della forma $\alpha\mu+\beta\nu$ (μ *e* ν interi $\geqslant 0$) *posti in ordine crescente. Diremo tale limite somma della serie secondo le medie del Cesaro.*

Introduciamo ancora la seguente definizione.

Sia la serie doppia (1), *e, considerata la direzione* (α, β), $(\alpha\beta \neq 0)$ *sia*

$$\lambda_{r_0}, \quad \lambda_{r_1}, \quad \lambda_{r_2}, \ldots, \quad \lambda_{r_n}, \ldots \tag{22}$$

una successione monotona e divergente di numeri della forma $\alpha\mu+\beta\nu$.

Diremo che per la serie doppia (1) *si ha la convergenza generalizzata secondo la successione* (22) *nella direzione* (α, β) *se esiste ed è finito il limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{{}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_{r_0}} + {}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_{r_1}} + \ldots + {}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_{r_n}}}{n+1}.$$

Si osservi che la convergenza solita in una direzione (α, β) implica la convergenza secondo le medie del CESARO nonchè la convergenza generalizzata secondo una qualsiasi successione (22) nella stessa direzione e l'eguaglianza di tutte queste somme a quella ordinaria; ma viceversa nè la convergenza secondo le medie del CESARO, nè una qualunque convergenza generalizzata implicano la convergenza solita.

13. - TEOREMA III. - *Sia* $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}$ *una serie doppia e* $\sigma_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu=0, 1, 2, \ldots)$ *la sua doppia successione delle ridotte. Se esiste il limite*

$$\Omega = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_{0n} + \sigma_{1\,n-1} + \ldots + \sigma_{n0}}{n+1} \tag{23}$$

la serie doppia converge per diagonali secondo le medie del Cesaro, ad una somma $\Phi=\Omega$; *e viceversa, se la serie doppia converge per diagonali secondo le medie del Cesaro, ad una somma* Φ, *esiste il limite* (23) *ed è* $\Omega=\Phi$.

Si cominci ad osservare che

$$S_n = \sum_{t=0}^{n}\left(\sum_{\mu+\nu=t} a_{\mu\nu}\right) = \sum_{\mu=0}^{n}\left(\sum_{\nu=0}^{n-\mu} a_{\mu\nu}\right);$$

e poichè

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{0\nu} = \sigma_{0n}, \qquad \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} = \sigma_{\mu n} - \sigma_{\mu-1,n} \qquad (\mu=1, 2, 3, \ldots)$$

si ha, per $n>0$,

$$S_n = \sigma_{0n} + \sum_{\mu=1}^{n} (\sigma_{\mu,n-\mu} - \sigma_{\mu-1,n-\mu}),$$

da cui l'identità

$$S_n = \sum_{\mu+\nu=n} \sigma_{\mu\nu} - \sum_{\mu+\nu=n-1} \sigma_{\mu\nu} \qquad (n>0).$$

Ora, poichè è $S_0 = \sigma_{00}$, sommando si ha

$$S_0 + S_1 + S_2 + \dots + S_n = \sum_{\mu+\nu=n} \sigma_{\mu\nu}$$

e quindi

$$\frac{S_0 + S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n+1} = \frac{\sigma_{0n} + \sigma_{1n-1} + \dots + \sigma_{n0}}{n+1}.$$

Dall'esistenza del limite di uno dei due membri di questa uguaglianza segue l'esistenza del limite dell'altro e la loro uguaglianza.

14. - TEOREMA IV. - *Se una serie doppia ha somma S in senso ordinario ed ha il termine generale convergente a zero al crescere della somma degli indici, esiste il limite*

$$\Omega = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_{0n} + \sigma_{1n-1} + \dots + \sigma_{n0}}{n+1} \tag{24}$$

e si ha $\Omega = S$.

Poichè il termine generale della serie doppia data converge a zero al crescere della somma degli indici, considerata, per ogni μ, la successione dei termini

$$a_{\mu 0},\quad a_{\mu 1},\quad a_{\mu 2}, \dots,\quad a_{\mu\nu}, \dots \tag{25}$$

e detto ε_μ il massimo dei valori assoluti di questi termini, la successione

$$\varepsilon_0,\quad \varepsilon_1,\quad \varepsilon_2, \dots,\quad \varepsilon_\mu, \dots$$

converge a zero. Infatti preso un $\varepsilon > 0$ arbitrario, si può trovare un $\bar{p}$ tale che per $\mu+\nu > \bar{p}$ sia $|a_{\mu\nu}| < \varepsilon$. Ora, preso $\mu > \bar{p}$, tutti i termini della corrispondente successione (25) verificano la relazione $\mu+\nu > \bar{p}$, ed essendo ε_μ il più grande di essi in valore assoluto sarà anche $\varepsilon_\mu < \varepsilon$, per ogni $\mu > \bar{p}$.

Analogamente, considerando, per ogni ν, la successione dei termini

$$a_{0\nu},\quad a_{1\nu}, \dots,\quad a_{\mu\nu}, \dots$$

e detto ε_ν' il massimo dei loro valori assoluti, si vede che $\varepsilon_\nu' \to 0$ per $\nu \to \infty$.

Ne segue che anche le espressioni

$$\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n}{n+1}, \qquad \frac{\varepsilon_0' + \varepsilon_1' + \dots + \varepsilon_n'}{n+1}$$

tendono a zero al crescere di n.

Veduto ciò, si prenda una successione *divergente* di numeri interi e positivi (o nulli):

$$K_0,\quad K_1,\quad K_2, \dots,\quad K_n, \dots,$$

soddisfacenti alle seguenti condizioni [11],

$$(26)\qquad 2K_n < n+1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{K_n}{n+1} = 0.$$

$$K_n \leq \left(\frac{n+1}{\varepsilon_0+\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_n}\right)^{\frac{1}{4}}, \qquad K_n \leq \left(\frac{n+1}{\varepsilon_0'+\varepsilon_1'+\dots+\varepsilon_n'}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Ora, posto (per n sufficentemente grande in modo che sia $n > 2K_n$)

$$(27)\qquad \frac{\sigma_{0n}+\sigma_{1n-1}+\dots+\sigma_{n0}}{n+1} = \frac{\sigma_{0n}+\sigma_{1n-1}+\dots+\sigma_{K_n-1,\, n-K_n+1}}{n+1} +$$

$$+ \frac{n+1-2K_n}{n+1} \frac{\sigma_{K_n,\, n-K_n}+\sigma_{K_n+1,\, n-K_n-1}+\dots+\sigma_{n-K_n,\, n}}{n+1-2K_n} + \frac{\sigma_{n-K_n+1,\, K_n-1}+\dots+\sigma_{n0}}{n+1},$$

si osservi che

$$|\sigma_{\mu\nu}| \leq \sum_{r=0}^{\mu}\sum_{s=0}^{\nu} |a_{rs}| \leq \sum_{r=0}^{\mu} (\nu+1)\varepsilon_r = (\nu+1)\sum_{r=0}^{\mu}\varepsilon_r.$$

Si avrà perciò

$$\left|\sum_{\substack{\mu+\nu=n\\ \nu<K_n}} \sigma_{\mu\nu}\right| \leq \sum_{\substack{\mu+\nu=n\\ \nu<K_n}} |\sigma_{\mu\nu}| \leq \sum_{\substack{\mu+\nu=n\\ \nu<K_n}} (\nu+1)\sum_{r=0}^{\mu}\varepsilon_r \leq$$

$$\leq \sum_{\nu=0}^{K_n-1} (\nu+1)\sum_{r=0}^{n}\varepsilon_r \leq \frac{K_n(K_n+1)}{2}(\varepsilon_0+\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_n),$$

e, analogamente

$$\left|\sum_{\substack{\mu+\nu=n\\ \mu<K_n}} \sigma_{\mu\nu}\right| \leq \frac{K_n(K_n+1)}{2}(\varepsilon_0'+\varepsilon_1'+\dots+\varepsilon_n').$$

Allora, da un certo n in poi, sarà

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &\left|\frac{\sigma_{0n}+\sigma_{1n-1}+\dots+\sigma_{K_n-1,\, n-K_n+1}}{n+1}\right| \leq K_n^2 \frac{\varepsilon_0'+\varepsilon_1'+\dots+\varepsilon_n'}{n+1} \leq \left(\frac{\varepsilon_0'+\varepsilon_1'+\dots+\varepsilon_n'}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\left|\frac{\sigma_{n0}+\sigma_{n-11}+\dots+\sigma_{n-K_n+1,\, K_n-1}}{n+1}\right| \leq K_n^2 \frac{\varepsilon_0+\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_n}{n+1} \leq \left(\frac{\varepsilon_0+\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\right.$$

e perciò la prima e la terza frazione del secondo membro di (27) tendono a zero al crescere di n.

Passiamo a dimostrare che la seconda frazione del secondo membro di (27) tende al limite S.

Consideriamo, per ogni n, l'estremo superiore dell'insieme dei numeri $|\sigma_{\mu\nu} - S|$

---

[11] Tali condizioni sono compatibili; basterà definire per esempio K_n ($n = 0, 1, \dots$) come il più piccolo tra i seguenti tre interi:

$$E\left(\frac{\sqrt{n+1}}{2}\right), \qquad E\left(\sqrt[4]{\frac{n+1}{\varepsilon_0+\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_n}}\right), \qquad E\left(\sqrt[4]{\frac{n+1}{\varepsilon_0'+\varepsilon_1'+\dots+\varepsilon_n'}}\right).$$

La successione K_n ($n = 0, 1, \dots$) così definita manifestamente diverge.

per μ e ν entrambi $\geqslant n$, e diciamo τ_n tale estremo superiore. La successione [12] monotona (non crescente) $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ tende a zero. Infatti, preso un $\varepsilon > 0$ arbitrario, è possibile determinare un $\bar{n}$ tale che, per μ e ν entrambi $\geqslant \bar{n}$, sia $|\sigma_{\mu\nu} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$. D'altronde, per la definizione di estremo superiore, esisterà per ogni n almeno una coppia (μ_n, ν_n) (μ_n e $\nu_n \geqslant n$) tale che

$$0 \leqslant \tau_n - |\sigma_{\mu_n \nu_n} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e quindi, per ogni $n \geqslant \bar{n}$, $\tau_n < \varepsilon$.

Ora, si osservi che

$$|(\sigma_{K_n, n-K_n} + \ldots + \sigma_{n-K_n, K_n}) - (n+1-2K_n)S| \leqslant$$
$$\leqslant |(\sigma_{K_n, n-K_n} - S)| + \ldots + |(\sigma_{n-K_n, K_n} - S)| \leqslant (n+1-2K_n)\tau_{K_n}$$

e quindi

$$\left| \frac{\sigma_{K_n, n-K_n} + \ldots + \sigma_{n-K_n, K_n}}{n+1-2K_n} - S \right| \leqslant \tau_{K_n},$$

che tende a zero al crescere di n, poichè K_n diverge. Ne segue, per la seconda delle (26) e per le (27) e (28),

$$\Omega = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_{0n} + \sigma_{1\,n-1} + \ldots + \sigma_{n0}}{n+1} = S.$$

15. - *Corollario I.* - *Una serie doppia convergente in senso ordinario e tale che il suo termine generale tenda a zero al crescere della somma degli indici, converge, secondo le medie del Cesaro, per diagonali ad una somma uguale a quella ordinaria.*

Infatti, per i teor. III e IV, esisterà il limite $\Omega = S$ e il limite $\Phi = \Omega = S$; dunque la serie doppia converge, secondo le medie del CESARO, per diagonali ad una somma uguale a quella ordinaria.

16. - Sia una qualsiasi direzione (α, β) $(\alpha\beta \neq 0)$.

Preso un numero K soddisfacente alle condizioni

$$K\alpha \geqslant 1, \qquad K\beta \geqslant 1, \qquad K\beta \text{ intero},$$

e d'altronde qualsiasi, si consideri la successione monotona e divergente

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \ldots, \quad \lambda_n, \ldots$$

di tutti i numeri, fra loro distinti, della forma $\alpha\mu + \beta\nu$, e per ogni intero positivo n si indichi con λ_{r_n} il massimo di questi λ tale che la parte intera di $K\lambda$ non superi n.

---

[12] Alcuni dei numeri τ_n (in numero finito) possono anche essere infiniti.

TEOREMA V. - *Se la serie doppia* (1) *converge in senso ordinario ed il suo termine generale tende a zero al crescere della somma degli indici, la serie doppia converge in modo generalizzato, secondo la successione*

$$\lambda_{r_1}, \quad \lambda_{r_2}, \ldots, \quad \lambda_{r_n}, \ldots,$$

nella direzione (α, β) $(\alpha\beta \neq 0)$, *e ad una somma uguale a quella ordinaria.*

Sia la (1) la serie data avente le proprietà dette, e sia S la sua somma in senso ordinario. Considerata la direzione (α, β) $(\alpha\beta \neq 0)$, si osservi che, applicata la *Trasformazione T II*^{a}, la sua trasformata, per il corollario precedente, convergerà per diagonali, secondo le medie del CESARO, alla somma ordinaria.

Ossia, detta S_n' la somma parziale n^{ma} per diagonali di detta serie, si avrà

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_0' + S_1' + \ldots + S_n'}{n+1} = S. \tag{29}$$

Ma per l'osservazione fatta nel paragrafo precedente a proposito della Trasformazione II^a, ad ogni n corrisponde un λ_{r_n} per il quale è $S_n' = {}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_{r_n}}$ onde la (29) si potrà scrivere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{{}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_{r_0}} + {}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_{r_1}} + \ldots + {}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_{r_n}}}{n+1} = S,$$

e con ciò è dimostrato l'asserto.

17. - Dal precedente teorema segue:

Corollario II. - Se una serie doppia ha somma S in senso ordinario ed ha il termine generale tendente a zero al crescere della somma degli indici, ha in tutte le direzioni nelle quali converge la medesima somma S.

La dimostrazione scende immediatamente per le direzioni (α, β) $(\alpha\beta \neq 0)$ dal teor. V e dall'osservazione fatta in principio a questo paragrafo a proposito della convergenza secondo le medie del CESARO e della convergenza generalizzata, mentre per le direzioni $(\alpha = 0, \beta = 1)$, $(\alpha = 1, \beta = 0)$ il nostro asserto è un risultato già noto.

Corollario III. - Se una serie doppia ha somma S in senso ordinario e converge in una direzione irrazionale, ha la stessa somma in questa e in tutte le direzioni nelle quali converge.

Il che scende dal corollario precedente e dal teor. 1.

18. - TEOREMA VI. - *Se una serie doppia converge in senso ordinario ed il suo termine generale tende a zero al crescere della somma degli indici, essa serie converge secondo le medie del Cesaro in ogni direzione razionale.*

Sia (α, β) una qualsiasi direzione razionale. Consideriamo la *Trasformazione T* (caso particolare della I^a)

$$\mu' = p\mu, \qquad \nu' = q\nu.$$

La serie trasformata mediante questa trasformazione, convergerà per diagonali secondo le medie del CESARO e si avrà

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_0' + S_1' + \dots + S_n'}{n+1} = S. \tag{30}$$

Ora, per ogni n, sarà possibile, per le proprietà della trasformazione, trovare un numero λ_{r_n} della forma $\alpha\mu+\beta\nu$ tale che ${}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_{r_n}} = S_n'$ e quindi potremo scrivere la (30) nel seguente modo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{{}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_{r_0}} + {}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_{r_1}} + \dots + {}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_{r_n}}}{n+1} = S.$$

Nel nostro caso, la relazione (14) del § 2 è

$$\overline{\lambda}'_{n'} = p\mu + q\nu.$$

Ma l'equazione $p\mu+q\nu=\lambda$, con λ intero, ha come è noto, per p, q interi, primi tra loro, sempre soluzioni intere, e per $\lambda \geqslant p \cdot q$, ha sempre almeno una soluzione (μ, ν) con μ e ν interi e $\geqslant 0$.

Onde, detti $\overline{\lambda}'_{r_{n'}}$ i numeri della forma $p\mu+q\nu$ corrispondenti ai numeri $\lambda'_{r_{n'}}$ della forma $\alpha\mu+\beta\nu$, per $\overline{\lambda}'_{r_{n'}} \geqslant pq$ la successione

$$\overline{\lambda}'_{r_0},\quad \overline{\lambda}'_{r_1},\quad \overline{\lambda}'_{r_2}, \dots,\quad \overline{\lambda}'_{r_{n'}}, \dots$$

coincide con la serie naturale dei numeri e con la successione di tutti i numeri della forma $p\mu+q\nu$, fra loro distinti, disposti in ordine crescente. Quindi potremo scrivere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{{}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_0} + {}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_1} + \dots + {}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_n}}{n+1} = S.$$

19. - TEOREMA VII. - *Se una serie doppia converge in senso ordinario ed il suo termine generale tende a zero al crescere della somma degli indici, essa serie converge secondo le medie del Cesaro in ogni direzione irrazionale ad una somma uguale a quella ordinaria.*

Sia la serie doppia (1) e una direzione (α, β) irrazionale qualsiasi. Consideriamo la serie semplice (3), che si ottiene sommando la serie doppia data in tale direzione. Come noi abbiamo osservato al n.° 2 i termini di questa serie semplice sono i termini stessi della (1), presi in un dato ordine, onde potremo indicare con

$$a_{\mu_0\nu_0} + a_{\mu_1\nu_1} + \dots + a_{\mu_i\nu_i} + \dots \tag{31}$$

tale serie, e con $i_{\mu\nu}$ il numero d'ordine del termine $a_{\mu\nu}$. Posto ciò, si avrà

$$\frac{{}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_0} + {}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_1} + \dots + {}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_n}}{n+1} = \frac{\sum_{i=0}^{n}(n+1-i)a_{\mu_i\nu_i}}{n+1},$$

e poichè

$$a_{\mu\nu}=\sigma_{\mu\nu}-\sigma_{\mu,\nu-1}-\sigma_{\mu-1,\nu}+\sigma_{\mu-1,\nu-1} \quad ([13]),$$

si avrà anche·

$$\frac{{}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_0}+{}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_1}+\ldots+{}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_n}}{n+1}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}(n+1-i)(\sigma_{\mu_i\nu_i}-\sigma_{\mu_i-1,\nu_i}-\sigma_{\mu_i,\nu_i-1}+\sigma_{\mu_i-1,\nu_i-1})}{n+1}.$$

Si osservi che nella sommatoria al secondo membro figurano, ognuno contato un certo numero di volte, tutti e soli i termini $\sigma_{\mu\nu}$ per i quali è

$$0\leqslant\alpha\mu+\beta\nu\leqslant\lambda_n.$$

Ora noi possiamo raccogliere tutti i $\sigma_{\mu\nu}$ che hanno i medesimi indici e ordinarli per $\alpha\mu+\beta\nu$ crescente, onde, necessariamente, al termine generico $\sigma_{\mu\nu}$ spetterà lo stesso numero d'ordine $i_{\mu\nu}$ che spetta al termine $a_{\mu\nu}$ nella serie (31); indicando brevemente con $\xi_i^{(n)}$ il coefficiente che spetta al termine $\sigma_{\mu_i\nu_i}$ si ha:

$$\frac{{}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_0}+{}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_1}+\ldots+{}^{(\alpha\beta)}S_{\lambda_n}}{n+1}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\xi_i^{(n)}\sigma_{\mu_i\nu_i}}{n+1}.$$

Si osservi che detti coefficienti $\xi_i^{(n)}$ non dipendono dalla particolare serie doppia considerata, ma soltanto dalla direzione (α,β) e da n ed i. Onde, considerata la serie doppia ausiliaria definita da $\bar{a}_{00}=1$ e $\bar{a}_{\mu\nu}=0$ in tutti gli altri casi, si ha

$$\bar{\sigma}_{\mu\nu}=1 \quad (\mu,\nu=0,1,2,\ldots), \qquad {}^{(\alpha\beta)}\bar{S}_{\lambda_n}=1 \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

e quindi la doppia uguaglianza

$$\text{(32)} \qquad \frac{{}^{(\alpha\beta)}\bar{S}_{\lambda_0}+{}^{(\alpha\beta)}\bar{S}_{\lambda_1}+\ldots+{}^{(\alpha\beta)}\bar{S}_{\lambda_n}}{n+1}=1=\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\xi_i^{(n)}}{n+1},$$

nella quale la seconda non dipende dalla particolare serie doppia considerata.

Si osservi poi che, supposto $\lambda_n>\alpha+\beta$, per ogni i per cui

$$\text{(33)} \qquad 0\leqslant\alpha\mu_i+\beta\nu_i\leqslant\lambda_n-(\alpha+\beta),$$

si ha

$$\xi_i^{(n)}=(n+1-i)-(n+1-i_{\mu_i+1,\nu_i})-(n+1-i_{\mu_i,\nu_i+1})+(n+1-i_{\mu_i+1,\nu_i+1}),$$

da cui

$$\xi_i^{(n)}=i_{\mu_i,\nu_i+1}+i_{\mu_i+1,\nu_i}-i_{\mu_i\nu_i}-i_{\mu_i+1,\nu_i+1};$$

ma poichè, come ora proveremo, è

$$\text{(34)} \qquad i_{\mu+1,\nu}-i_{\mu\nu}=\nu+E\left(\frac{\alpha}{\beta}(\mu+1)\right)+1,$$

([13]) I termini $\sigma_{\mu\nu}$ $(\mu,\nu=0,1,2,\ldots)$ hanno il solito significato, come al teor. III.

si ha, sempre sotto la condizione (33),

$$\xi_i^{(n)} = -1. \tag{35}$$

Per provare la (34) si considerino i nodi del piano di coordinate cartesiani ortogonali X, Y. Il numero $i_{\mu+1,\nu} - i_{\mu\nu}$ è uguale al numero, diminuito di uno, dei nodi interni o sul contorno al trapezio di lati

$$\alpha(x-\mu)+\beta(y-\nu)=0, \qquad \alpha(x-\mu-1)+\beta(y-\nu)=0, \qquad x=0, \qquad y=0.$$

Ma su ogni retta parallela all'asse X, $y=m$, con m intero, e che attraversi il trapezio, o ne tocchi il contorno, si ha sempre uno ed uno solo di tali nodi (eccetto la sola retta $y=\nu$ sulla quale invece vi sono due nodi); onde, poichè tali rette sono, manifestamente, in numero di $E\left(\frac{\alpha(\mu+1)+\beta\nu}{\beta}\right)+1$, tale sarà anche il numero cercato $i_{\mu+1,\nu} - i_{\mu\nu}$.

Se la condizione (33) non è verificata, essendo $i \leqq n$, sarà

$$\lambda_n - (\alpha+\beta) < \alpha\mu_i + \beta\nu_i \leqq \lambda_n, \tag{36}$$

ed il corrispondente $\xi_i^{(n)}$ sarà la somma algebrica di 1, o 2, o 3 termini del tipo $(n+1-i_{\mu\nu})$. Ma questa quantità, rappresentando il numero dei termini compresi tra $a_{\mu_i\nu_i}$ e $a_{\mu_n\nu_n}$ ($a_{\mu_i\nu_i}$ e $a_{\mu_n\nu_n}$ inclusi) nella serie (31), sarà certamente minore od uguale al numero dei termini che soddisfano alla condizione (36) il quale a sua volta è minore od uguale a

$$E\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\left[E\left(\frac{\lambda_n}{\beta}\right)+1\right],$$

come si vede con ragionamento analogo a quello fatto precedentemente. Dunque, sotto la condizione (36), e per $\lambda_n > \frac{\beta(\alpha+\beta)}{2-\alpha-\beta}$, sarà

$$n+1-i_{\mu\nu} < \frac{2}{\alpha\beta}\lambda_n,$$

e quindi

$$|\xi_i^{(n)}| < \frac{6}{\alpha\beta}\lambda_n. \tag{37}$$

Osserviamo che, come facilmente si può riconoscere, si ha

$$n+1 > \frac{1}{2}\frac{\lambda_n}{\alpha}\frac{\lambda_n}{\beta},$$

da cui si può ottenere

$$\lambda_n < 2\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{n+1}. \tag{38}$$

Riprendiamo ora le notazioni introdotte al principio del n.° 14, e, detto δ il più grande tra i due numeri interi $E\left(2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+1\right)$, $E\left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+1\right)$, si prenda una successione divergente di numeri interi e positivi (o nulli) K_n soddisfacenti alle seguenti condizioni [14]:

$$(39)\qquad (\alpha+\beta)K_n<\lambda_n,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{K_n}{\sqrt{n+1}}=0,$$

$$K_n\leqq\left(\frac{\delta E(\sqrt{n+1})}{\varepsilon_0+\varepsilon_1+ \dots +\varepsilon_{\delta E(\sqrt{n+1})}}\right)^{\frac{1}{4}},\qquad K_n\leqq\left(\frac{\delta E(\sqrt{n+1})}{\varepsilon_0'+\varepsilon_1'+ \dots +\varepsilon'_{\delta E(\sqrt{n+1})}}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Poniamo, per ogni n,

$$(40)\qquad \sigma_{\mu\nu}=S+\varepsilon_{\mu\nu}^{(n)}+Z_{\mu\nu}^{(n)},$$

e si faccia, per $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}\geqq K_n$, $Z_{\mu\nu}^{(n)}=0$, onde sarà, sempre per $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}\geqq K_n$,

$$|\varepsilon_{\mu\nu}^{(n)}|\leqq\tau_{K_n}.$$

Viceversa, per almeno uno dei due indici μ e ν, $<K_n$, si faccia $\varepsilon_{\mu\nu}^{(n)}=0$, onde sarà:

$$(41)\qquad \begin{aligned}|Z_{\mu\nu}^{(n)}|&\leqq|S|+(\nu+1)(\varepsilon_0+\varepsilon_1+ \dots +\varepsilon_\mu),\\ |Z_{\mu\nu}^{(n)}|&\leqq|S|+(\mu+1)(\varepsilon_0'+\varepsilon_1'+ \dots +\varepsilon_\nu').\end{aligned}$$

Veduto ciò, tenendo conto della (40) e della (32), si avrà senz'altro

$$(42)\qquad \left|\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\xi_i^{(n)}\sigma_{\mu_i\nu_i}}{n+1}-S\right|\leqq\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}|\xi_i^{(n)}||\varepsilon_{\mu_i\nu_i}^{(n)}|}{n+1}+\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}|\xi_i^{(n)}||Z_{\mu_i\nu_i}^{(n)}|}{n+1},$$

e quindi, per il nostro asserto, basterà dimostrare che il secondo membro di questa diseguaglianza tende a zero al crescere di n.

Si vada ora a separare nella sommatoria della prima espressione a secondo membro della (42), i termini per i quali è soddisfatta la condizione (33) da quelli per i quali è soddisfatta invece la condizione (36), e si osservi che è *sempre* $|\varepsilon_{\mu_i\nu_i}^{(n)}|\leqq\tau_{K_n}$, poichè è $0\leqq\tau_{K_n}$. Tenuto conto delle (35), (37) e (38), e per $\lambda_n>\frac{\beta(\alpha+\beta)}{2-\alpha-\beta}$, $\lambda_n>\alpha+\beta$, si ha:

$$\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}|\xi_i^{(n)}||\varepsilon_{\mu_i\nu_i}^{(n)}|}{n+1}\leqq\frac{(n+1)\tau_{K_n}}{n+1}+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2}{\alpha\beta}\lambda_n\cdot\frac{6}{\alpha\beta}\lambda_n\cdot\tau_{K_n}\leqq\left(1+2\cdot4\,\frac{6}{\alpha\beta}\right)\tau_{K_n}.$$

Manifestamente quest'ultima quantità tende a zero al crescere di n.

La seconda espressione a secondo membro della (42), può spezzarsi in tre parti, secondo che è $\nu<K_n$, oppure $\mu<K_n$ e $\nu\geqq K_n$, oppure, infine, $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}\geqq K_n$. Ma poichè in questo ultimo caso è sempre $Z_{\mu\nu}^{(n)}=0$, la sommatoria estesa a questi termini è nulla e perciò, maggiorando la seconda, si ha

$$(43)\qquad \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}|\xi_i^{(n)}||Z_{\mu_i\nu_i}^{(n)}|\leqq\frac{1}{n+1}\sum_{\substack{\nu<K_n\\ \alpha\mu+\beta\nu\leqq\lambda_n}}|\xi_{i_{\mu\nu}}^{(n)}||Z_{\mu\nu}^{(n)}|+\frac{1}{n+1}\sum_{\substack{\mu<K_n\\ \alpha\mu+\beta\nu\leqq\lambda_n}}|\xi_{i_{\mu\nu}}^{(n)}||Z_{\mu\nu}^{(n)}|.$$

---

[14] Per verificare la compatibilità di queste condizioni si proceda come al n.° 14.

Consideriamo la prima espressione del secondo membro. La sommatoria può essere spezzata in due parti, l'una estesa ai termini che verificano la condizione (33), l'altra a quelli che verificano la (36). In complesso i termini sono in numero certamente inferiore a $\frac{\lambda_n K_n}{\alpha}$; d'altronde quelli che verificano la (36) e per i quali è $\nu < K_n$, sono in numero certamente inferiore a $K_n E\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)$, cioè inferiore a $\frac{2K_n}{\alpha}$. Perciò quell'espressione, tenuto conto delle (35), (37) e (41), risulta, almeno da un certo n in poi, non maggiore di

$$\frac{1}{n+1}\left(\frac{\lambda_n K_n}{\alpha}|S|+\frac{2K_n}{\alpha}\cdot\frac{6}{\alpha\beta}\lambda_n\cdot|S|\right)+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\lambda_n K_n}{\alpha}\cdot K_n\left(\varepsilon_0+\dots+\varepsilon_{E\left(\frac{\lambda_n}{\alpha}\right)}\right)+$$
$$+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2K_n}{\alpha}\cdot\frac{6}{\alpha\beta}\lambda_n\cdot K_n\left(\varepsilon_0+\dots+\varepsilon_{E\left(\frac{\lambda_n}{\alpha}\right)}\right),$$

ossia, per la (38) ed essendo $\delta > 2\sqrt{\beta/\alpha}$, da un certo n in poi, non maggiore di

$$2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,|S|\left(1+2\,\frac{6}{\alpha\beta}\right)\frac{K_n}{\sqrt{n+1}}+2\delta\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\left(1+2\,\frac{6}{\alpha\beta}\right)K_n^2\,\frac{\varepsilon_0+\dots+\varepsilon_{\delta E(\sqrt{n+1})}}{\delta E(\sqrt{n+1})},$$

la quale espressione tende a zero al crescere di n, in forza delle condizioni (39). Analogamente si può procedere per la seconda espressione al secondo membro della (43).

LEONIDA TONELLI - *Direttore responsabile.* Finito di stampare il 21 marzo 1932 - X