ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ANTONIO SIGNORINI

Sopra alcune questioni di statica dei sistemi continui

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 2, nº 2 (1933), p. 231-251

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1933_2_2_2_231_0>

SOPRA ALCUNE QUESTIONI DI STATICA DEI SISTEMI CONTINUI

di ANTONIO SIGNORINI (Napoli).

Il teorema d'unicità della Statica elastica ordinaria garentisce che lo stress è individuato dalla sollecitazione totale (forze di massa + forze al contorno, attive e vincolari) se si assegna anche l'espressione effettiva del potenziale elastico; ma non è detto che, almeno pei sistemi omogenei, la determinazione dello stress non si possa talvolta raggiungere senza alcun dato numerico sui 21 moduli di elasticità: anzi questa favorevole circostanza si trova verificata proprio nei casi del problema di SAINT-VENANT che più hanno contatto colla Meccanica applicata (pressoflessione di un cilindro qualunque, torsione di un cilindro circolare od ellittico).

Uno degli scopi di questa Memoria è la ricerca di tutti i tipi di sollecitazione totale che — almeno nei limiti dell'Elastostatica ordinaria — dànno luogo in ogni sistema elastico omogeneo ad uno stress indipendente dalla natura del materiale (n.° 10).

Per effettuare tale ricerca conviene far capo ad alcune proprietà di media dello stress valide nella Statica di ogni sistema continuo, indipendentemente da ogni ipotesi sulla sua costituzione materiale e sul suo stato fisico (n.i 1, 2, 4); esse si prestano ad altre applicazioni, non solo nell'Elastostatica (ni. 3 ed 11), ma pure nelle teorie di Plasticità (n.° 5) e forse anche nella teoria della spinta delle terre.

La circostanza che nella ricerca in questione la dipendenza dello stress dal posto risulta lineare, ha portato a stabilire le proprietà generali di uno stress lineare (n.i 6, 7) e quelle sue proprietà particolari che hanno maggiore interesse in riguardo al problema di SAINT-VENANT (n.° 8) ed alla teoria della spinta delle terre (n.° 9).

I. - Proprietà di media dello stress.

1. - Preliminari.

Sia S un qualsiasi sistema continuo in quiete rispetto alla terna trirettangola $Ox_1x_2x_3$.

Rappresentando con C la configurazione attuale di S, con $P\equiv(x_1, x_2, x_3)$ il suo punto generico e con σ il suo contorno completo, scriviamo le equazioni fondamentali di CAUCHY nella forma

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &kF_r=\sum_{1}^{3}{}_s \frac{\partial X_{rs}}{\partial x_s} \;....\; C \\ &f_r=\sum_{1}^{3}{}_s X_{rs}\cos\widehat{nx_s}\;....\;\sigma \end{aligned}\right. \qquad (r=1, 2, 3),$$

ove resta sottinteso che

$$(2)\qquad X_{rs}=X_{sr} \qquad (r, s=1, 2, 3).$$

Detta $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ una qualunque funzione di P regolare in tutto C, dalle (1) segue

$$\int_C \varphi kF_r dC+\int_\sigma \varphi f_r d\sigma=$$

$$=\sum_{1}^{3}{}_s\left\{\int_C \frac{\partial(\varphi X_{rs})}{\partial x_s}dC+\int_\sigma \varphi X_{rs}\cos\widehat{nx_s}d\sigma\right\}-\sum_{1}^{3}{}_s\int_C X_{rs}\frac{\partial\varphi}{\partial x_s}dC:$$

onde basta applicare il teorema di GAUSS e convenire, una volta per tutte, di accennare col soprassegno il valor medio in C della generica funzione di P, per concludere che — indipendentemente dalle (2) — sussistono le eguaglianze

$$(3)\qquad \sum_{1}^{3}{}_s \overline{X_{rs}\frac{\partial\varphi}{\partial x_s}}=-\frac{1}{C}\left\{\int_C \varphi kF_r dC+\int_\sigma \varphi f_r d\sigma\right\} \qquad (r=1, 2, 3).$$

Esse possono pensarsi stabilite sotto la condizione che in C le singole X_{rs} siano uniformi, finite e continue insieme alle loro derivate parziali 1e; ma immediatamente si estendono al caso più generale in cui le X_{rs} (e le loro derivate parziali 1e) presentano sopra alcune superficie σ_d di C delle discontinuità di 1a specie compatibili colla condizione che gli sforzi agenti sulle due pagine di ciascun elemento delle σ_d si facciano equilibrio. Invero questa condizione è sufficiente perchè, riferendo le (3) ai singoli volumi in cui C è diviso dalle σ_d (completate, se occorre, con altre superficie) e sommando membro a membro, si ricostituiscano le (3) stesse *senza alcun contributo delle* σ_d.

Le (3) possono dunque applicarsi anche all'insieme di più sistemi continui mutuamente a contatto, nonchè ad ogni tipo di autotensioni [1] di S; in particolare allo stress dovuto alle più generali distorsioni elastiche [2] ed a quello

---

[1] Cfr., ad esempio, H. REISSNER: *Eigenspannungen und Eigenspannungsquellen* (Zeitschrift für angew. Mathematik und Mechanik, 1931) e P. NEMÉNYI: *Selbstspannungen elastischer Gebilde* (id., id.).

[2] SOMIGLIANA: *Sulla teoria delle distorsioni elastiche* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (5), XXIII, 1° sem. 1914 e Nuovo Cimento (6), XI, 1916).

che in un sistema elastico di regola accompagna una temperatura non uniforme [3].

La forma assunta dalle (3) per ogni tipo di autotensioni, cioè

$$\sum_{1}^{3} {}_s \overline{X_{rs} \frac{\partial \varphi}{\partial x_s}} = 0 \qquad (r=1,2,3),$$

in assenza di forze di massa permane quando per una certa regione di σ si tolga la condizione d'annullamento della forza superficiale esterna, purchè sulla regione stessa sia $\varphi = \text{cost}$.

2. - Valori medi delle caratteristiche dello stress e dei loro prodotti per le coordinate.

Poniamo

$$(4) \qquad \begin{cases} a_{pq} = -\dfrac{1}{C}\left\{ \displaystyle\int_C x_q \cdot kF_p dC + \int_\sigma x_q \cdot f_p d\sigma \right\} \\ b_{pqr} = -\dfrac{1}{C}\left\{ \displaystyle\int_C x_p x_q \cdot kF_r dC + \int_\sigma x_p x_q \cdot f_r d\sigma \right\} \quad (p,q,r=1,2,3). \\ c_{pqr} = \dfrac{1}{2}(b_{qrp} + b_{prq} - b_{pqr}) \end{cases}$$

Con questo la 2ª equazione cardinale (vettoriale) della Statica si traduce in

$$(2') \qquad a_{pq} = a_{qp};$$

mentre sono evidenti le identità

$$b_{pqr} = b_{qpr}, \qquad c_{pqr} = c_{qpr} \qquad (p,q,r=1,2,3).$$

Le a possono dunque ridursi a 6; ed a 18 tanto le b quanto le c. I prodotti $-Ca_{pq}$, $-Cb_{pqr}$ rispettivamente coincidono colle coordinate astatiche e colle coordinate iperastatiche [4] della sollecitazione totale. Le 18 c sono in corrispondenza biunivoca colle 18 b, anzi le ultime delle (4) implicano

$$2(c_{pqr} + c_{qrp} + c_{rpq}) = b_{pqr} + b_{qrp} + b_{rpq}$$

e

$$(5) \qquad b_{pqr} = c_{rpq} + c_{rqp} \qquad (p,q,r=1,2,3).$$

Dalle (3), sostituendo r con p ed assumende $\varphi \equiv x_q$, risulta — indipendentemente dalle (2)-(2′), ma in perfetto accordo con esse —

$$(\mathrm{I}) \qquad \overline{X}_{pq} = a_{pq} \qquad (p,q=1,2,3).$$

---

[3] Cfr., ad esempio, VOIGT: *Lehrbuch der Kristallphysik* (Teubner, Leipzig, 1928), VII Kapitel, VIII Abschnitt.

[4] A. SIGNORINI: *Sollecitazioni iperastatiche* (Rend. del R. Istituto lombardo (2), LXV, 1932).

Dalle stesse (3), assumendo $\varphi \equiv x_p x_q$ e tenendo conto delle (5), si ottiene

$$\overline{x_q X_{rp}} + \overline{x_p X_{rq}} = c_{rpq} + c_{rqp}$$

nonchè

$$\overline{x_r X_{pq}} + \overline{x_q X_{pr}} = c_{pqr} + c_{prq}$$

e

$$\overline{x_p X_{qr}} + \overline{x_r X_{qp}} = c_{qrp} + c_{qpr}.$$

Facendo intervenire le (2) — ciò che pareggia il numero dei $\overline{X_{pq} x_r}$ a quello delle b o c — si conclude

$$\text{(II)} \qquad \overline{X_{pq} x_r} = c_{pqr} \qquad (p, q, r = 1, 2, 3).$$

Le (I) e (II) mettono in evidenza che per ogni S — anche quando non si escludano per lo stress discontinuità del tipo precisato al n.° 1 — i ventiquattro $\overline{X}_{pq}$ e $\overline{X_{pq} x_r}$ sono individuati, biunivocamente, dalle coordinate astatiche ed iperastatiche della sollecitazione totale (divise per C). Se la sollecitazione totale è iperastatica [5] si annulla ciascuno dei $\overline{X}_{pq}$, $\overline{X_{pq} x_r}$: e viceversa. Più in particolare, tutti i $\overline{X}_{pq}$ e $\overline{X_{pq} x_r}$ si annullano per ogni tipo di autotensioni.

3. - Valori medi dello strain in un sistema elastico linearmente non omogeneo. D'ora innanzi ci sarà comodo adoperare anche le notazioni [6]

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} X_s = X_{ss}, & X_4 = X_{23}, & X_5 = X_{31}, & X_6 = X_{12} \\ a_s = a_{ss}, & a_4 = a_{23}, & a_5 = a_{31}, & a_6 = a_{12} \qquad (s, t = 1, 2, 3) \\ c_{st} = c_{sst}, & c_{4t} = c_{23t}, & c_{5t} = c_{31t}, & c_{6t} = c_{12t} \end{cases}$$

che evidentemente riducono le (I), (II) alla forma

$$\text{(7)} \qquad \overline{X}_s = a_s, \qquad \overline{X_s x_t} = c_{st} \qquad (s = 1, \ldots, 6;\ t = 1, 2, 3).$$

In questo numero le (7) vengono applicate alle deformazioni infinitesime dei sistemi elastici (a partire da uno stato di riferimento nel quale tutte le particelle del sistema si trovino nello stato naturale relativo ad una stessa temperatura e sotto la condizione ulteriore di isotermia od isoentropia della deformazione). Non viene imposta l'omogeneità (e tanto meno l'isotropia) ma si suppone che il sistema elastico sia *linearmente non omogeneo*; cioè che i 21 moduli [7] d'elasticità siano rappresentati da altrettante funzioni lineari delle coordinate,

$$m_{rs} + \sum_1^3{}_t\, \mu_{rst} x_t$$

$$(r, s = 1, \ldots, 6;\ m_{rs} = m_{sr},\ \mu_{rst} = \mu_{srt};\ m, \mu \text{ cost.}).$$

---

[5] Cfr. loc. cit. [4].

[6] Cfr. VOIGT, op. cit. [3].

[7] Cfr. VOIGT, op. cit. [3], pag. 564.

Questa condizione ha carattere invariantivo rispetto alla scelta di $Ox_1x_2x_3$ e dal lato fisico non è certo troppo restrittiva.

In relazione alle (6) modifichiamo anche le notazioni ε_r, γ_s $(r, s=1, 2, 3)$ abituali per le caratteristiche di deformazione, sostituendo γ_1, γ_2, γ_3 rispettivamente con ε_4, ε_5, ε_6. Pei sistemi in esame, E_l, la mutua dipendenza fra strain e stress resta così espressa dalle sei equazioni locali

$$(8) \qquad -\varepsilon_r=\sum_{1}^{6}{}_s \{ m_{rs}+\sum_{1}^{3}{}_t \mu_{rst}x_t \} X_s \qquad (r=1,...., 6);$$

onde basta prendere i valori medi in C ed applicare le (7) per ottenere

$$(8') \qquad -\bar{\varepsilon}_r=\sum_{1}^{6}{}_s m_{rs}a_s+\sum_{1}^{6}{}_s \sum_{1}^{3}{}_t \mu_{rst}c_{st} \qquad (r=1, 2,...., 6).$$

Altrove [8] abbiamo indicate diverse conseguenze delle (8′) nel caso particolare dell'omogeneità ($\mu\equiv 0$): qui ci limiteremo a rilevare che da esse immediatamente risulta quanto segue.

Per ogni E_l la variazione di volume concomitante alla deformazione elastica,

$$\delta V=C\sum_{1}^{3}{}_r \bar{\varepsilon}_r,$$

è espressa da una combinazione lineare omogenea delle coordinate astatiche ed iperastatiche della sollecitazione totale, formata con una parte degli m e μ.

Basta che la sollecitazione totale sia iperastatica perchè si annulli ognuno dei sei $\bar{\varepsilon}_r$, cioè *le deformazioni elastiche di ogni E_l, quando siano dovute alla più generale distorsione del sistema o anche ad una qualsiasi sollecitazione iperastatica, risultano sempre rigide in media*; in particolare, non dànno mai luogo a variazione di volume.

Nel caso dell'omogeneità l'annullamento simultaneo dei sei $\bar{\varepsilon}_r$ si verifica soltanto quando la sollecitazione totale è astatica.

4. - Una diseguaglianza di Schwarz.

Ritornando ad un S generico, intendiamo che la terna di riferimento sia terna centrale del volume C; in modo da avere

$$(9) \qquad \int_C x_r dC=0, \qquad \int_C x_r x_s dC=0 \qquad (r, s=1, 2, 3\,;\ r\neq s).$$

Questa convenzione — eccetto che al n.° 9 — verrà sempre mantenuta nel seguito;

---

[8] *Alcune proprietà di media nell'Elastostatica ordinaria* (Rend. della R. Accademia dei Lincei (6), XV, 1° sem. 1932).

e accanto ad essa ci saranno convenienti le notazioni

$$(10) \qquad \varrho_t^2 = \frac{1}{C}\int_C x_t^2 dC \qquad (t=1,2,3)$$

e

$$(11) \qquad L_s = a_s + \sum_1^3{}_t \frac{c_{st}}{\varrho_t^2} x_t \qquad (s=1,2,\ldots,6).$$

Le 21 costanti m_{rs} $(r, s=1, 2, \ldots, 6;\ m_{rs}=m_{sr})$ rappresentino attualmente i coefficienti di una qualunque forma quadratica definita o semidefinita positiva in sei variabili, Q.

Per effetto delle (9) risulta

$$\int_C dC \sum_1^6{}_{rs} m_{rs} L_r L_s = C \sum_1^6{}_{rs} m_{rs} \left\{ a_r a_s + \sum_1^3{}_t \frac{c_{rt} c_{st}}{\varrho_t^2} \right\}.$$

Facendo intervenire anche le (7) subito si trova

$$\int_C dC \sum_1^6{}_{rs} m_{rs} X_r L_s = C \sum_1^6{}_{rs} m_{rs} \left\{ a_s \overline{X}_r + \sum_1^3{}_t \frac{c_{st}}{\varrho^2} \overline{X_r x_t} \right\} = \int_C dC \sum_1^6{}_{rs} m_{rs} L_r L_s.$$

In conseguenza dalla disuguaglianza evidente

$$\int_C dC \sum_1^6{}_{rs} m_{rs} (X_r - L_r)(X_s - L_s) \geqslant 0$$

si può trarre

$$(\mathrm{III}) \qquad \int_C dC \sum_1^6{}_{rs} m_{rs} X_r X_s \geqslant C \sum_1^6{}_{rs} m_{rs} \left\{ a_r a_s + \sum_1^3{}_t \frac{c_{rt} c_{st}}{\varrho_t^2} \right\} :$$

anzi, se la Q è proprio definita, vale il segno di eguaglianza quando e soltanto quando le singole X si identificano colle omologhe L.

Ad esempio, detta k una certa cost. pos. caratteristica della natura di S, lo stress non potrà verificare in tutto C una condizione del tipo

$$(12) \qquad \sum_1^6{}_{rs} m_{rs} X_r X_s \leqslant k^2$$

altro che se le coordinate astatiche ed iperastatiche della sollecitazione totale si uniformano alla limitazione

$$(12') \qquad \sum_1^6{}_{rs} m_{rs} \left\{ a_r a_s + \sum_1^3{}_t \frac{c_{rt} c_{st}}{\varrho_t^2} \right\} \leqslant k^2.$$

5. - Applicazione alla torsione di un solido nello stato plastico.

Sia $\tau_{\max}$ il massimo della grandezza dello sforzo (specifico) tangenziale, per tutti gli elementi di superficie appartenenti a C (σ inclusa). La teoria di Plasticità di TRESCA e SAINT-VENANT notoriamente impone allo stress una condizione del tipo

(13) $$\tau_{\max} \leqslant k:$$

e in conseguenza anche delle condizioni del tipo (12), ad esempio ([9])

(13′) $$X_{12}^2 + X_{13}^2 \leqslant k^2 \ldots\ C.$$

Particolarizziamo la configurazione di S supponendo che σ comprenda due facce piane, σ' e σ'', di forma qualsiasi e magari diverse, ma normali ad uno stesso asse centrale di C, x_1; e insieme si abbia

$$\varrho_2 = \varrho_3 = \varrho$$

(come automaticamente si verifica se C ammette x_1 quale asse di rotazione).

Particolarizziamo anche la sollecitazione di S, identificando la forza di massa col peso e limitando la sollecitazione superficiale a σ' e σ'': ciò che, per solo effetto dell'ipotesi d'equilibrio, implica

$$\int_{\sigma'} (x_2 f_3 - x_3 f_2)\, d\sigma' = -\int_{\sigma''} (x_2 f_3 - x_3 f_2)\, d\sigma'' = \textit{momento torcente} = M_1.$$

Infine siano x_1', x_1'' le due cost. cui si riduce la x_1 rispettivamente su σ' e σ'' ed $l = |x_1'' - x_1'|$ la distanza del piano di σ' da quello di σ''.

Applicando la (12′) al caso (13′), subito si ottiene, come ora vedremo,

(14) $$\frac{l\,|M_1|}{\sqrt{2}\varrho C} \leqslant k:$$

in altri termini, posto [cfr. n.° 8, in fine]

$$M_k = \frac{k\varrho C}{l},$$

la (13) *può verificarsi solo finchè*

$$|M_1| \leqslant \sqrt{2} M_k.$$

Direttamente l'applicazione della (12′) al caso (13′) fornisce

$$\sum_{5}^{6}{}_r \left\{ a_r^2 + \sum_{1}^{3}{}_t \frac{c_{rt}^2}{\varrho_t^2} \right\} \leqslant k^2;$$

ne risulta (tenendo conto anche dell'ipotesi $\varrho_2 = \varrho_3 = \varrho$)

$$k^2 \geqslant \frac{1}{\varrho^2}(c_{52}^2 + c_{63}^2).$$

([9]) Condizioni locali del tipo (12) s'incontrano anche nelle teorie di Plasticità più recenti [cfr., ad esempio, NÁDAI: *Mechanik des bildsamen Zustandes der Werkstoffe*, Berlin, Springer, 1927].

Ricordiamo che

$$\begin{cases} c_{52} \equiv c_{312} = \frac{1}{2}(b_{123} + b_{321} - b_{312}) \\ c_{63} \equiv c_{123} = \frac{1}{2}(b_{231} + b_{132} - b_{123}). \end{cases}$$

Per la sollecitazione supposta è

$$b_{123} - b_{132} = -\frac{1}{C}\left\{ x_1' \int_{\sigma'} (x_2 f_3 - x_3 f_2) d\sigma' + x_1'' \int_{\sigma''} (x_2 f_3 - x_3 f_2) d\sigma'' \right\} = \frac{M_1}{C}(x_1'' - x_1').$$

In conseguenza si ha

$$c_{52}^2 + c_{63}^2 = \frac{1}{4}\left\{ \left[b_{321} + \frac{M_1}{C}(x_1'' - x_1') \right]^2 + \left[b_{321} - \frac{M_1}{C}(x_1'' - x_1') \right]^2 \right\} =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{ b_{321}^2 + \frac{M_1^2 l^2}{C^2} \right\} \geqslant \frac{l^2 M_1^2}{2C^2},$$

ciò che evidentemente corrisponde alla (14).

II. - Stress lineare.

6. - Espressione di uno stress lineare mediante le coordinate astatiche ed iperastatiche della sollecitazione totale.

Sempre limitandoci ai soli problemi statici, supponiamo che lo stress sia *lineare*, cioè che le singole X siano funzioni lineari ([10]) delle nostre x,

$$X_s = l_{s0} + \sum_{1}^{3}{}_t\, l_{st} x_t \qquad (s = 1, 2, \ldots, 6;\ l \equiv \text{cost.}).$$

Necessariamente risulta [cfr. (7), (9) e (10)]

$$a_s = \overline{X_s} = l_{s0}, \qquad c_{st} = \overline{X_s x_t} = \varrho_t^2 l_{st} \quad (s = 1, 2, \ldots, 6;\ t = 1, 2, 3);$$

onde le singole X non possono differire dalle omologhe L [cfr. (11)]. In particolare rimane stabilito che *se lo stress è lineare, esso resta completamente individuato non appena siano note* (insieme a C) *le ventiquattro coordinate astatiche ed iperastatiche della sollecitazione totale*: le sei coordinate astatiche (oltre che i $\overline{X}$) individuano lo stress nel baricentro di C.

Le precedenti osservazioni possono estendersi ad una qualunque combinazione lineare a coefficienti costanti delle X: basta che nel suo complesso essa sia funzione lineare delle x, perchè non possa differire da ciò che si ottiene riferendola alle L invece che alle X, ecc.

([10]) La proprietà supposta evidentemente ha carattere invariantivo rispetto alla scelta di $Ox_1x_2x_3$.

Inoltre il fatto che la condizione di linearità identifica le X colle L porta di conseguenza [cfr. n.° 4, in fine] che uno stress lineare minimizza il valor medio in C di ciascuna forma quadratica definita positiva a coefficienti costanti [in sei variabili] nell'insieme di tutti gli stress che corrispondono ai suoi stessi valori delle ventiquattro a e b [insieme evidentemente più ampio di quello costituito dagli stress che corrispondono alla stessa sollecitazione totale].

7. - Condizioni necessarie e sufficienti affinchè le equazioni di Cauchy ammettano una soluzione lineare.

Le equazioni indefinite di CAUCHY impongono alle forze di massa concomitanti ad uno stress lineare le condizioni

$$kF_r \equiv \text{cost.} = \tilde{\omega}_r \dots C \qquad (r=1,2,3), \tag{15}$$

sostanzialmente equivalenti, pei sistemi omogenei, a quella che l'unica forza di massa agente su S sia il peso. Intendendo che le (15) siano verificate (insieme alle equazioni cardinali della Statica) cerchiamo le altre condizioni da imporre alla sollecitazione totale di S perchè le equazioni di CAUCHY ammettano una soluzione lineare: vogliamo dire, perchè il sistema (1) sia compatibile con espressioni lineari delle singole X.

Converrà eliminare formalmente le forze di massa, ponendo

$$\left\{\begin{aligned} & X^*_{rr} = X_{rr} - \sum_1^3{}_t\, \tilde{\omega}_t x_t \\ & X^*_{rs} = X_{rs} \\ & f^*_r = f_r - \cos\widehat{nx_r} \sum_1^3{}_t\, \tilde{\omega}_t x_t : \end{aligned}\right. \qquad (r, s=1,2,3;\ r \neq s) \tag{15'}$$

con che il sistema (1) si trasforma in

$$\left\{\begin{aligned} & \sum_1^3{}_s \frac{\partial X^*_{rs}}{\partial x_s} = 0 \dots C \\ & \sum_1^3{}_s \cos\widehat{nx_s} X^*_{rs} = f^*_r \dots \sigma, \end{aligned}\right. \qquad (r=1,2,3) \tag{1_*}$$

mentre le equazioni cardinali della Statica si riassumono in

$$\int_\sigma f^*_r d\sigma = 0, \qquad \int_\sigma (x_s f^*_r - x_r f^*_s) d\sigma = 0 \qquad (r, s=1,2,3). \tag{16}$$

Si riconosce subito che le condizioni cercate coincidono con quelle cui occorre sottoporre ulteriormente le f^* se si vuole che il sistema (1_*) sia compatibile con espressioni lineari delle singole X^*.

Poniamo [cfr. (4)]

$$(17)\qquad \begin{cases} a^*_{pq} = -\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_\sigma x_q f^*_p \, d\sigma \\ b^*_{pqr} = -\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_\sigma x_p x_q f^*_r \, d\sigma \\ c^*_{pqr} = \dfrac{1}{2}(b^*_{qrp} + b^*_{prq} - b^*_{pqr}); \end{cases} \qquad (p, q, r = 1, 2, 3)$$

ciò che corrisponde a riferire le solite a, b, c alla sola sollecitazione superficiale ausiliaria definita dalle f_*.

Se (1_*) ammette una soluzione lineare, essa non può esser data [cfr. numero precedente] altro che da

$$(18)\qquad X^*_{rs} = a^*_{rs} + \sum_1^3{}_t \frac{c^*_{rst}}{\varrho_t^2} x_t \qquad (r, s = 1, 2, 3).$$

Introducendo queste espressioni delle X^*_{rs} nelle equazioni indefinite (1_*) semplicemente si trova

$$\sum_1^3{}_s \frac{1}{\varrho_s^2} c^*_{rss} = 0,$$

cioè

$$(19)\qquad \sum_1^3{}_s \frac{1}{\varrho_s^2} b^*_{ssr} = 0 \qquad (r = 1, 2, 3);$$

invece le equazioni al contorno dànno luogo per le f^* alle tre equazioni integrali

$$(20)\qquad f^*_r = \sum_1^3{}_s \cos \widehat{nx_s} \left\{ a^*_{rs} + \sum_1^3{}_t \frac{c^*_{rst}}{\varrho_t^2} x_t \right\} \ldots.\ \sigma.$$

Viceversa, se insieme alle (16) sussistono le (20), risulta

$$0 = \int_\sigma f^*_r \, d\sigma = -\int_C dC \sum_1^3{}_s \frac{c^*_{rss}}{\varrho_s^2} = -\frac{C}{2} \sum_1^3{}_s \frac{b^*_{ssr}}{\varrho_s^2} \qquad (r = 1, 2, 3)$$

e tutte le (1_*) sono soddisfatte dalle (18).

Resta così stabilito che *le equazioni di Cauchy ammettono una soluzione lineare quando e soltanto quando la sollecitazione totale soddisfa* (insieme alle equazioni cardinali della Statica) *le condizioni locali* (15) *e* (20). La circostanza che le (20) riducono [11] il 1° e 2° gruppo delle (16) rispettivamente alle (19) e ad $a^*_{rs} = a^*_{sr}$ $(r, s = 1, 2, 3)$, porta poi subito a riconoscere che l'insieme delle condizioni trovate fa dipendere la sollecitazione totale (ed il corrispondente stress lineare) da 24 costanti arbitrarie; le quali possono sempre identificarsi colle tre $\tilde{\omega}$, colle sei coordinate astatiche della sollecitazione superficiale e con

---

[11] Indipendentemente dalle (20) il 1° gruppo delle (16) coincide colle (19) tutte le volte che C è un elissoide [cfr. n.° 1, in fine].

quindici (opportunamente scelte) delle diciotto coordinate iperastatiche della sollecitazione stessa ([12]).

8. - Stress lineare in un cilindro retto non sollecitato sulla superficie laterale. La condizione di linearità dello stress è molto restrittiva: per un cilindro retto non sollecitato sulla superficie laterale non esistono tipi di stress lineare diversi da quelli che si incontrano in Elastostatica nella soluzione del problema di SAINT-VENANT ([13]). Indipendentemente dai risultati del numero precedente, l'asserto può stabilirsi con un procedimento che forse si presta ad utili estensioni.

Alle convenzioni del n.° 4 aggiungiamo quella che l'asse x_1 sia parallelo alle generatrici del cilindro. L'assenza di ogni sollecitazione sulla superficie laterale σ_l resta così tradotta da

$$\sum_{2}^{3}{}_s X_{rs} \cos \widehat{nx_s} = 0 \;\ldots.\; \sigma_l \qquad (r=1,2,3). \tag{21}$$

Come subito dimostreremo, basta combinare le (21) colla condizione di linearità dello stress,

$$X_{rs} = l_{rs} + \sum_{1}^{3}{}_t l_{rst} x_t \qquad (r, s = 1, 2, 3;\; l \equiv \text{cost.}), \tag{22}$$

perchè risulti che:

a) qualunque sia la forma del nostro cilindro C, X_{22}, X_{23} ed X_{33} devono annullarsi identicamente;

b) anche X_{12}, X_{13} devono annullarsi identicamente se il cilindro non è ellittico;

c) se la sezione di C col piano $x_1 = 0$ è l'ellisse

$$\frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1,$$

dev'essere

$$X_{12} = -q\,\frac{x_3}{a_3^2} \quad , \qquad X_{13} = q\,\frac{x_2}{a_2^2} \tag{23}$$

con q costante.

Per tutti i punti del contorno a della generica sezione normale A di C pensiamo scritte le equazioni

$$\Big(l_{r2} + \sum_{1}^{3}{}_t l_{r2t} x_t\Big) \cos nx_2 + \Big(l_{r3} + \sum_{1}^{3}{}_t l_{r3t} x_t\Big) \cos nx_3 = 0 \qquad (r=1,2,3) \tag{24}$$

che risultano dalla combinazione di (22) con (21).

([12]) Naturalmente le espressioni che risultano per le X_{rs} dalle (18) e (15′) coincidono con quelle indicate al numero precedente.

([13]) Cfr., ad esempio, COLONNETTI: *La Statica delle Costruzioni* (Torino, U. T. E. T., 1928), Vol. I, Parte 2ª.

Integrando su a ed applicando il teorema di GAUSS nel piano, si trova

$$l_{r22}+l_{r33}=0 \qquad (r=1,2,3). \tag{25}$$

Collo stesso procedimento — pur di moltiplicare preventivamente la (24) per x_2, x_3, x_2^2, x_2x_3 — si ottiene

$$\left\{\begin{aligned} &l_{r2}+l_{r21}x_1=0, \qquad l_{r3}+l_{r31}x_1=0, \qquad 3l_{r22}+l_{r33}=0,\\ &l_{r23}\int_A x_3^2 dA+l_{r32}\int_A x_2^2 dA=0. \end{aligned}\right. \qquad (r=1,2,3) \tag{25'}$$

In complesso le (25)-(25′) forniscono [cfr. (10)]

$$l_{rs}+l_{rs1}x_1=0, \qquad l_{r22}=l_{r33}=0, \qquad l_{r23}\varrho_3^2+l_{r32}\varrho_2^2=0$$
$$(r=1,2,3\,;\ s=2,3);$$

ne segue [cfr. (22)]

$$X_{r2}=-q_r\frac{x_3}{\varrho^2}, \qquad X_{r3}=q_r\frac{x_2}{\varrho_2^2} \ldots\ldots C \qquad (r=1,2,3;\ q\equiv\text{cost.}) \tag{26}$$

e parallelamente le (24) si riducono a

$$q_r\left\{-\frac{x_3}{\varrho_3^2}\cos\widehat{nx_2}+\frac{x_2}{\varrho_2^2}\cos\widehat{nx_3}\right\}=0 \ldots\ldots a. \tag{27}$$

Per effetto delle (26) l'identità $X_{23}=X_{32}$ si traduce in

$$q_2\frac{x_2}{\varrho_2^2}\equiv-q_3\frac{x_3}{\varrho_3^2}$$

e può verificarsi solo per $q_2=q_3=0$: ciò che vuol dire

$$X_{22}=X_{23}=X_{33}=0 \ldots\ldots C.$$

Allora, detto s l'arco di a, le (27) si riassumono in

$$q_1\frac{d}{ds}\left\{\frac{x_2^2}{\varrho_2^2}+\frac{x_3^2}{\varrho_3^2}\right\}=0 \ldots\ldots a. \tag{27'}$$

Se il cilindro non è ellittico la (27′) dà come necessaria conseguenza $q_1=0$, cioè

$$X_{12}=X_{13}=0 \ldots\ldots C.$$

Invece nel caso c) — essendo notoriamente $a_2=2\varrho_2$, $a_3=2\varrho_3$ — la (27′) lascia arbitraria la cost. q_1; e basta porre $q=4q_1$ per portare le espressioni (26) di X_{12}, X_{13} a coincidere colle (23).

Qualunque sia la forma del cilindro le proprietà ora stabilite riducono le equazioni indefinite di CAUCHY a

$$\frac{\partial X_{11}}{\partial x_1}=kF_1\equiv\text{cost.}=\tilde{\omega}, \qquad F_2=F_3=0 \ldots\ldots C$$

(cilindro pesante a generatrici verticali): la prima non differisce da

$$l_{111} = \tilde{\omega}.$$

Per quanto poi riguarda la sollecitazione sulle due basi, si riconosce subito che per ciascuna di queste la risultante delle forze esterne è puramente normale; mentre il momento torcente può esser $\neq 0$ nel solo caso del cilindro ellittico. Invero, detta l l'altezza del cilindro, sia σ' la base appartenente al piano $x_1 = -\frac{l}{2}$. Su σ' le f_1, f_2, f_3 rispettivamente coincidono con X_{11}, X_{12}, X_{13}: onde l'asserto immediatamente risulta da b) (se il cilindro non è ellittico) ovvero (se il cilindro è ellittico) dalle (23) combinate colle eguaglianze evidenti

$$(28) \qquad \int_{\sigma'} x_2 d\sigma' = \int_{\sigma'} x_3 d\sigma' = 0 = \int_{\sigma'} x_2 x_3 d\sigma'.$$

Nel caso del cilindro ellittico il momento torcente

$$M_1 = \int_{\sigma'} (x_2 f_3 - x_3 f_2) d\sigma'$$

resta legato a q dall'uguaglianza

$$M_1 = q \int_{\sigma'} \left\{ \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} \right\} d\sigma' = \frac{\pi}{2} a_2 a_3 q,$$

la quale permette di dare alle (23) la forma definitiva

$$(29) \qquad X_{12} = -\frac{2M_1}{\pi a_3^3 a_2} x_3, \qquad X_{13} = \frac{2M_1}{\pi a_2^3 a_3} x_2.$$

In ogni caso, posto

$$N = \int_{\sigma'} f_1 d\sigma', \qquad M_2 = \int_{\sigma'} f_1 x_3 d\sigma', \qquad M_3 = -\int_{\sigma'} f_1 x_2 d\sigma', \qquad P = \tilde{\omega} C,$$

per effetto di (28) e (10) gli l_{11}, l_{112}, l_{113} restano legati ad N, M_2, M_3 dalle semplici relazioni

$$\begin{cases} N = \displaystyle\int_{\sigma'} \left(l_{11} - \tilde{\omega} \frac{l}{2} \right) d\sigma' = A l_{11} - \frac{P}{2} \\ M_2 = l_{113} \displaystyle\int_{\sigma'} x_3^2 d\sigma' = l_{113} \varrho_3^2 A \\ M_3 = -l_{112} \displaystyle\int_{\sigma'} x_2^2 d\sigma' = -l_{112} \varrho_2^2 A, \end{cases}$$

le quali subito permettono di precisare anche l'espressione definitiva di X_{11},

$$(30) \qquad X_{11} = \frac{1}{A} \left\{ N + \frac{P}{2} + \frac{P}{l} x_1 - \frac{M_3 x_2}{\varrho_2^2} + \frac{M_2 x_3}{\varrho_3^2} \right\}.$$

Si rilevi che se il cilindro è circolare e si pone $\varrho = a_2/2 = a_3/2$, risulta dalle (29) che il massimo (in tutto C) di $\sqrt{X_{12}^2 + X_{13}^2}$ ha come valore $|M_1| l/\varrho C$.

9. - Stress lineare in un sistema disgregato ([14]) con superficie libera.

Tornando ad una C generica, poniamo le condizioni seguenti:

α) Per ogni elemento di superficie appartenente a C (σ inclusa) lo sforzo interno agente sopra una determinata faccia (tutte le volte che non si annulla) formi colla normale all'elemento uscente dalla faccia opposta un angolo acuto θ non superiore ad un certo angolo costante $\Theta < \frac{\pi}{2}$ (da pensarsi individuato dalla natura di S).

β) La forza superficiale esterna si annulli in ogni punto P_l di una certa regione σ_l di σ.

γ) Lo stress sia lineare e [cfr. (15)] l'unica forza di massa agente su S sia il peso.

Per solo effetto di α), la β) equivale a

$$X_{rs} = 0 \;....\; \sigma_l \qquad (r, s = 1, 2, 3). \tag{31}$$

Invero, se si esclude l'asserto, la β) — in quanto impone l'annullamento di una delle tensioni principali — porta ad attribuire a ciascun P_l una quadrica delle tensioni degenere in un cilindro o magari in due piani paralleli; ciò che implica l'esistenza di valori di θ prossimi quanto si vuole a $\frac{\pi}{2}$, contrariamente all'ipotesi $\theta \leqslant \Theta < \frac{\pi}{2}$.

In conseguenza di (31) e γ) la σ_l deve interamente appartenere ad un certo piano λ. Detta i la grandezza dell'inclinazione di λ rispetto all'orizzonte, diamo ad x_1 l'orientamento ([15]) della verticale discendente e (disponendo anche di O, della direzione di x_3 e del verso positivo di x_2) attribuiamo a λ l'equazione

$$x_1 \cos i + x_2 \sin i = 0,$$

alla quale evidentemente si accompagna la disuguaglianza

$$x_1 \cos i + x_2 \sin i > 0 \tag{32}$$

per tutti i punti *sottostanti a* λ.

Con queste notazioni il contenuto di β) e γ) resta completamente incluso nelle equazioni [cfr. (31)]

$$X_{rs} = d_{rs}(x_1 \cos i + x_2 \sin i) \tag{33}$$
$$(r, s = 1, 2, 3\,;\; d \equiv \text{cost.};\; d_{rs} = d_{sr})$$

([14]) Ci atteniamo alla denominazione proposta da ALMANSI nella Memoria: *Sull'equilibrio dei sistemi disgregati* [Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, XL, 1904-1905].

([15]) In questo numero non ci atteniamo alla convenzione fissata in principio al n.° 4 (convenzione che è però mantenuta in tutti i numeri seguenti).

e [cfr. (1)]

$$\left\{\begin{array}{l} d_{11}\cos i+d_{12}\sin i=\text{cost. pos.}=\tilde{\omega} \\ d_{21}\cos i+d_{22}\sin i=0 \\ d_{31}\cos i+d_{32}\sin i=0. \end{array}\right. \tag{34}$$

Subordinatamente ad esse, a) si esaurisce, come ora vedremo, in

$$i\leqslant\Theta \tag{35}$$

più un certo numero di disuguaglianze per d_{22}, d_{23}, d_{33} (e la condizione che in C non esistano punti al disopra di λ).

Da a) e (33) risulta in primo luogo che in ogni punto di C non appartenente a λ deve aversi [16]

$$0<X_{rr}=d_{rr}(x_1\cos i+x_2\sin i) \qquad (r=1, 2, 3)\,; \tag{36}$$

onde nessuna delle d_{rr} può annullarsi, λ *non può tagliare* C, le d_{rr} devono essere tutte tre positive o tutte tre negative. Allora la 2ª delle (34) fornisce

$$\operatorname{tg} i=\left|\frac{d_{12}}{d_{22}}\right|=\left|\frac{X_{21}}{X_{22}}\right|\leqslant\frac{\sqrt{X_{21}^2+X_{23}^2}}{X_{22}}$$

e la (35) appare evidente non appena si riferisca a) agli elementi di superficie normali ad x_2.

Facciamo intervenire l'equazione che (in ciascun punto di C non situato su λ) definisce le tre tensioni principali,

$$\left|\begin{array}{lll} X_{11}-\xi, & X_{12}, & X_{13} \\ X_{21}, & X_{22}-\xi, & X_{23} \\ X_{31}, & X_{32}, & X_{33}-\xi \end{array}\right|=0: \tag{37}$$

e sia

$$K=\frac{1-\sin\Theta}{1+\sin\Theta}.$$

Soddisfatte le (36) la a) sarà completamente verificata quando e soltanto quando per due qualunque, ξ' e ξ'', delle tre radici di (37) risulti [17]

$$K\leqslant\frac{\xi'}{\xi''}\leqslant\frac{1}{K}. \tag{38}$$

Ponendo

$$\xi=\delta(x_1\cos i+x_2\sin i) \tag{39}$$

le (38) si semplificano (con evidente significato dei simboli) in

$$K\leqslant\frac{\delta'}{\delta''}\leqslant\frac{1}{K} \tag{40}$$

---

[16] Cfr. a) ed il breve ragionamento con cui abbiamo stabilito le (31), rilevando che le (34) escludono l'annullamento simultaneo delle sei d.

[17] Cfr., ad esempio, ALMANSI, loc. cit. [14], n.° 6 del cap. II.

e la (37) in

(41) $$\begin{vmatrix} d_{11}-\delta, & d_{12}, & d_{13} \\ d_{21}, & d_{22}-\delta, & d_{23} \\ d_{31}, & d_{32}, & d_{33}-\delta \end{vmatrix} = 0.$$

Le tre radici (reali) di questa equazione (secolare) non solo non possono dipendere ([18]) da P, ma devono aver tutte il segno ([19]) comune alle tre d_{rr}; ciò che implica

$$D_{33} = d_{11}d_{22} - d_{12}^2 > 0.$$

Insieme a ([20])

$$\cos i = \frac{\tilde{\omega} d_{22}}{D_{33}},$$

dovrà dunque aversi $d_{22} > 0$, cioè: 1°) tanto le tre d_{rr}, quanto le tre radici di (41) devono esser tutte positive; 2°) in C [cfr. (32)] non esistono punti al disopra di λ.

Ulteriormente le (34) [e (35)] permettono di sostituire alla (41)

$$0 = \cos^2 i \begin{vmatrix} d_{11}-\delta, & d_{12}, & d_{13} \\ d_{21}, & d_{22}-\delta, & d_{23} \\ d_{31}, & d_{32}, & d_{33}-\delta \end{vmatrix} = \cos i \begin{vmatrix} \tilde{\omega} - \delta \cos i, & -\delta \sin i, & 0 \\ d_{21}, & d_{22}-\delta, & d_{23} \\ d_{31}, & d_{32}, & d_{33}-\delta \end{vmatrix}$$

nonchè

(41′) $$\begin{vmatrix} \tilde{\omega} \cos i - \delta, & -\delta \sin i, & 0 \\ -\delta \sin i, & d_{22}-\delta, & d_{23} \\ 0, & d_{32}, & d_{33}-\delta \end{vmatrix} = 0.$$

Concludendo, *le nostre* α), β), γ) *richiedono che* (in C non esistano punti al disopra di λ e) *i non superi* Θ; *ciò supposto, tutti e soli gli stress del tipo voluto si ottengono*:

a) *assegnando le tre costanti* d_{22}, d_{23} *e* d_{33} *in guisa che le tre radici* (certamente reali) *di* (41′) *siano tutte positive e soddisfino alle* (40);

b) *introducendo le tre costanti* d_{31}, d_{21}, d_{11} *colle posizioni* (indipendenti da d_{33})

(42) $$d_{31} = -d_{32} \operatorname{tg} i, \qquad d_{21} = -d_{22} \operatorname{tg} i, \qquad d_{11} = d_{22} \operatorname{tg}^2 i + \frac{\tilde{\omega}}{\cos i};$$

c) *adottando le* (33).

Rinunziando alla completa discussione di *a*) indicheremo sommariamente lo sviluppo ulteriore del solo caso

$$d_{23} = d_{32} = 0;$$

che è poi il solo che si può presentare [cfr. la prima delle (42)] se il nostro S preme contro una parete piana, priva d'attrito e normale ([21]) ad x_3.

([18]) Donde l'esistenza delle superficie isostatiche, ecc.

([19]) Cfr. ancora *a*) tenendo presenti (39) e (36).

([20]) Cfr. le prime due delle (34).

([21]) Un'analoga condizione in riguardo ad x_2 per $i > 0$ è incompatibile [cfr. la 2ª delle (42)] colla linearità dello stress.

Posto

$$R_2=(d_{22}+\tilde{\omega}\cos i)^2-4d_{22}\tilde{\omega}\cos^3 i>0$$

e [cfr. (35)]

$$R_i=\left(2\,\frac{\cos^2 i}{\cos^2\Theta}-1\right)^2-1\geqslant 0,$$

nel caso in esame le tre radici di (41′) restano rappresentate da

$$\left.\begin{matrix}\delta_1\\ \delta_2\end{matrix}\right\}=\frac{d_{22}+\tilde{\omega}\cos i\pm\sqrt{R_2}}{2\cos^2 i},\qquad \delta_3=d_{33}.$$

La condizione che esse siano tutte positive si esaurisce nelle disuguaglianze

$$d_{22}>0,\qquad d_{33}>0;$$

ed è pur facile riconoscere che, in definitiva, le (40) si precisano in

$$\tilde{\omega}\cos i\left\{2\frac{\cos^2 i}{\cos^2\Theta}-1-\sqrt{R_i}\right\}\leqslant d_{22}\leqslant\tilde{\omega}\cos i\left\{2\frac{\cos^2 i}{\cos^2\Theta}-1+\sqrt{R_i}\right\}\tag{43}$$

e

$$K\cdot\frac{d_{22}+\tilde{\omega}\cos i+\sqrt{R_2}}{2\cos^2 i}\leqslant d_{33}\leqslant\frac{1}{K}\cdot\frac{d_{22}+\tilde{\omega}\cos i-\sqrt{R_2}}{2\cos^2 i}.\tag{44}$$

Per $i=\Theta$ le (43) degenerano in

$$d_{22}=\tilde{\omega}\cos\Theta$$

ed anche d_{12}, d_{11} [cfr. (42)] restano univocamente determinate insieme a ([22])

$$\left\{\begin{aligned}X_{11}&=\tilde{\omega}(1+\sin^2\Theta)(x_1+x_2\operatorname{tg}\Theta)\\ X_{22}&=\tilde{\omega}\cos^2\Theta(x_1+x_2\operatorname{tg}\Theta)\\ X_{12}&=-\tilde{\omega}\cos\Theta\sin\Theta(x_1+x_2\operatorname{tg}\Theta).\end{aligned}\right.$$

Per $i<\Theta$ è specialmente interessante il caso $i=0$. Allora dev'essere [cfr. le ultime delle (42)]

$$X_{11}=\tilde{\omega}x_1,\qquad X_{12}=0,$$

mentre le (43) e (44) si semplificano in

$$\left\{\begin{aligned}&\tilde{\omega}K\leqslant d_{22}\leqslant\frac{\tilde{\omega}}{K}\\ &\frac{K}{2}(d_{22}+\tilde{\omega}+|d_{22}-\tilde{\omega}|)\leqslant d_{33}\leqslant\frac{1}{2K}(d_{22}+\tilde{\omega}-|d_{22}-\tilde{\omega}|);\end{aligned}\right.$$

X_{22} resta compresa tra $K\tilde{\omega}x_1$ (spinta attiva) e $\tilde{\omega}x_1/K$ (spinta passiva); ecc.

([22]) Cfr., ad esempio, l'articolo di H. Reissner sulla teoria della spinta delle terre nella *Enzyklopädie der math. Wissenschaften* (Bd. IV, 28).

III. - Problemi di equilibrio elastico nei quali lo stress non dipende dalla natura del materiale.

10. - Riprendiamo tutte le convenzioni e notazioni del n.° 3 limitatamente a sistemi omogenei, E_0; riducendosi i 21 moduli di elasticità ad altrettante costanti m, le (8) si semplificano in

$$-\varepsilon_r = \sum_{1}^{6}{}_s\, m_{rs} X_s \qquad (r=1, 2, \dots, 6). \tag{45}$$

Ci proponiamo di stabilire che *per ogni* E_0 *lo stress risulta indipendente dai valori di tutte le* m (e lineare) *quando e soltanto quando la sollecitazione totale soddisfa* (insieme alle equazioni cardinali della Statica) *le condizioni locali* (15) *e* (20).

La proprietà diretta è conseguenza immediata dei risultati del n.° 7. Invero, le condizioni ora specificate per la sollecitazione totale sono quelle stesse che occorrono e bastano affinchè il sistema (1) sia compatibile con espressioni lineari delle singole X, le solite L: e per convincersi che tali L (singolarmente indipendenti dalle m) dànno proprio le caratteristische dello stress concomitante in E_0 alla sollecitazione supposta, basta pensare al teorema di MENABREA e al fatto che, una volta fissata la sollecitazione compatibilmente colle condizioni in esame, le L minimizzano

$$W = \frac{1}{2} \int_C dC \sum_{1}^{6}{}_{rs}\, m_{rs} X_r X_s$$

nell'insieme di tutte le soluzioni di (1) [cfr. n.° 6, in fine]. Alla stessa conclusione si perviene facendo diretto appello al teorema d'unicità dell'Elastostatica ed osservando che se nelle (45) si assume $X \equiv L$ si ottengono per le singole ε espressioni sempre compatibili (pel solo fatto di esser lineari nelle x) con tutte le condizioni di congruenza del SAINT-VENANT:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{\partial \varepsilon_6}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_5}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_4}{\partial x_1}\right\} \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x_3 \partial x_1} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\frac{\partial \varepsilon_4}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_6}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_5}{\partial x_2}\right\} \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}\left\{\frac{\partial \varepsilon_5}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_4}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_6}{\partial x_3}\right\} \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_4}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x_2^2} \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_5}{\partial x_3 \partial x_1} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x_3^2} \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_6}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x_1^2}.
\end{aligned}\right. \tag{46}$$

Per stabilire la proprietà inversa — sempre per effetto dei risultati del n.° 7 — basterà provare che se, in corrispondenza alla sollecitazione supposta, le singole caratteristiche dello stress in E_0 risultano indipendenti dalle m, necessariamente ciascuna di tali X è funzione lineare delle x.

Le m sono vincolate solo dalle sei disuguaglianze necessarie e sufficienti perchè la forma quadratica

$$W=\frac{1}{2}\sum_{1}^{6}{}_{rs}\, m_{rs}X_rX_s$$

sia definita positiva. Quindi, se le singole X non dipendono dagli m, insieme alle equazioni che direttamente risultano dall'eliminazione delle ε fra le (46) e (45) dovranno verificarsi (in tutto C) anche tutte le equazioni ricavabili dalle condizioni del SAINT-VENANT mediante la materiale sostituzione delle singole ε con ciò che si ottiene dai secondi membri delle (45) ponendo $=1$ uno qualsiasi degli m e tutti gli altri $=0$.

In base a questo, riferendosi ad m_{44} si trova

$$\frac{\partial^2 X_4}{\partial x_1 \partial x_r}=0=\frac{\partial^2 X_4}{\partial x_2 \partial x_3} \qquad (r=1,2,3). \tag{47}$$

Riferendosi ad m_{55}, m_{66} si aggiungono, fra le altre, le condizioni

$$\frac{\partial^2 X_5}{\partial x_1 \partial x_2}=0=\frac{\partial^2 X_6}{\partial x_1 \partial x_3}. \tag{48}$$

Riferendosi invece ad $m_{45}=m_{54}$ (ciò che corrisponde a sostituire nelle equazioni del SAINT-VENANT la ε_4 con X_5, la ε_5 con X_4 e tutte le altre ε con 0) si ottiene anche

$$\frac{\partial^2 X_4}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2 X_5}{\partial x_1 \partial x_2}; \tag{49}$$

e riferendosi ad m_{46},

$$\frac{\partial^2 X_4}{\partial x_3^2}=\frac{\partial^2 X_5}{\partial x_1 \partial x_3}. \tag{50}$$

Nel loro complesso le (47), (48), (49) e (50) implicano l'annullamento di tutte le derivate parziali 2e della X_4; e riprendendo il ragionamento dopo un'opportuna permutazione degli indici rimane stabilito che pure X_5, X_6 devono essere funzioni lineari delle x.

Riferiamoci ora ad m_{14}. Questo, essendo già dimostrata la linearità della X_4, equivale a sostituire nelle (46) la ε_4 con X_1 e tutte le altre ε con 0: onde semplicemente si ottiene [in parallelo alle (47)]

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial x_1 \partial x_r}=0=\frac{\partial^2 X_1}{\partial x_2 \partial x_3} \qquad (r=1,2,3).$$

Riferendosi ad m_{15}, m_{16} si aggiungono le condizioni

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial x_2^2}=0=\frac{\partial^2 X_1}{\partial x_3^2}.$$

In modo del tutto analogo si riconosce che devono annullarsi, in tutto C, anche tutte le derivate parziali 2e di X_2 ed X_3, c. d. d.

11. - Proprietà di minimo nella soluzione del problema di Saint-Venant ([23]).

Particolarizziamo E_0 colla condizione che si tratti di un cilindro retto, sollecitato soltanto sulle due basi, σ' e σ'', da forze puramente normali.

Come al n.° 8, assumiamo x_1 parallelo alle generatrici del cilindro; indichiamo con l l'altezza del cilindro, con σ' la base appartenente al piano $x_1 = -\frac{l}{2}$, con A l'area di σ'; e poniamo

$$\left\{\begin{aligned} N &= \int_{\sigma'} f_1 d\sigma' = -\int_{\sigma''} f_1 d\sigma'' \\ M_2 &= \int_{\sigma'} x_3 f_1 d\sigma' = -\int_{\sigma''} x_3 f_1 d\sigma'' \\ M_3 &= -\int_{\sigma'} x_2 f_1 d\sigma' = \int_{\sigma''} x_2 f_1 d\sigma''. \end{aligned}\right.$$

Tra tutte le sollecitazioni (del tipo indicato) corrispondenti ad assegnati valori di N, M_2, M_3, quella che figura nella soluzione del problema di SAINT-VENANT, cioè

(51) $$f_1 = \pm \frac{1}{A}\left(N - \frac{M_3 x_2}{\varrho_2^2} + \frac{M_2 x_3}{\varrho_3^2}\right) \dots \left\{\begin{matrix}\sigma' \\ \sigma''\end{matrix}\right.,$$

è caratterizzata dalla proprietà di dar luogo ad uno stress indipendente dalla natura del materiale [cfr. numero precedente e n.° 8].

Aggiungiamo la condizione

(52) $$m_{15} = m_{16} = 0,$$

anche meno restrittiva di quella che (per ogni P) il piano normale ad x_1 sia piano di simmetria elastica ([24]).

Basta questo perchè la sola (III) dia modo di stabilire che (nell'insieme già specificato) *la sollecitazione* (51) *è pure caratterizzata dalla proprietà di minimizzare il lavoro di deformazione,*

$$W = \frac{1}{2}\int_C dC \sum_{rs}^{6}{}_{1}\, m_{rs} X_r X_s.$$

Invero, essendo tutte le forze esterne ([25]) parallele ad x_1, risulta

(53) $$\left\{\begin{aligned} & a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0 \\ & c_{22} = c_{32} = c_{42} = 0 = c_{23} = c_{33} = c_{43} \end{aligned}\right.$$

([23]) In quest'ordine d'idee cfr., almeno pei sistemi isotropi, G. SUPINO: *Un criterio di scelta tra soluzioni elastiche a risultanti eguali* (Atti del Congresso int. dei Matematici in Bologna, tomo VI, sez. 5ª).

([24]) Cfr., ad esempio, VOIGT, op. cit. ([3]), VII Kapitel, I Abschnitt.

([25]) È superfluo avvertire che intervengono anche le equazioni cardinali della Statica; ma forse conviene rilevare che la proprietà di minimo suenunciata naturalmente si estende al caso di un cilindro pesante (omogeneo, a generatrici verticali).

e insieme

$$(54)\quad \begin{cases} a_1 = -\frac{1}{C}\left\{-\frac{l}{2}\int\limits_{\sigma'} f_1 d\sigma' + \frac{l}{2}\int\limits_{\sigma''} f_1 d\sigma''\right\} = \frac{N}{A} \\ c_{12} \equiv c_{112} = b_{121} = -\frac{1}{C}\left\{-\frac{l}{2}\int\limits_{\sigma'} x_2 f_1 d\sigma' + \frac{l}{2}\int\limits_{\sigma''} x_2 f_1 d\sigma''\right\} = -\frac{M_3}{A} \\ c_{13} \equiv c_{113} = b_{131} = -\frac{1}{C}\left\{-\frac{l}{2}\int\limits_{\sigma'} x_3 f_1 d\sigma' + \frac{l}{2}\int\limits_{\sigma''} x_3 f_1 d\sigma''\right\} = \frac{M_2}{A}. \end{cases}$$

Evidentemente dev'essere, per ciascun t,

$$\sum_{1}^{6}{}_{rs}\, m_{rs}\frac{c_{rt}}{\varrho_t}\cdot\frac{c_{st}}{\varrho_t} \geqslant 0,$$

nonchè

$$\sum_{5}^{6}{}_{rs}\, m_{rs}\frac{c_{rt}}{\varrho_t}\cdot\frac{c_{st}}{\varrho_t} \geqslant 0.$$

Ciò permette di ricavare da (III) e (52) che, insieme a

$$W \geqslant \frac{C}{2}\left\{m_{11}\frac{N^2}{A^2} + \sum_{1}^{6}{}_{rs}\, m_{rs}\sum_{2}^{3}{}_{t}\frac{c_{rt}c_{st}}{\varrho_t^2}\right\} \geqslant \frac{C}{2}\left\{\frac{m_{11}}{A^2}\left(N^2 + \frac{M_3^2}{\varrho_2^2} + \frac{M_2^2}{\varrho_3^2}\right) + \sum_{2}^{3}{}_{t}\sum_{5}^{6}{}_{rs}\, m_{rs}\frac{c_{rt}c_{st}}{\varrho_t^2}\right\},$$

deve aversi

$$W \geqslant \frac{Cm_{11}}{2A^2}\left(N^2 + \frac{M_3^2}{\varrho_2^2} + \frac{M_2^2}{\varrho_3^2}\right).$$

Anzi l'uguaglianza rimane esclusa tutte le volte che [accanto a (53) e (54)] non si abbia

$$\begin{cases} c_{r1} = 0 & (r = 1, 2, \ldots, 6) \\ c_{52} = c_{62} = 0 = c_{53} = c_{63}: \end{cases}$$

cioè [cfr. n.i 8, 6 e 2] tutte le volte che le singole coordinate astatiche ed iperastatiche della sollecitazione totale non abbiano i valori che corrispondono alla sollecitazione (51). Nel caso opposto è

$$W = \frac{Cm_{11}}{2A^2}\left(N^2 + \frac{M_3^2}{\varrho_2^2} + \frac{M_2^2}{\varrho_3^2}\right)$$

allora ed allora soltanto [cfr. n.o 6, in fine] che la sollecitazione totale proprio s'identifica colla (51), c. d. d.

Alla proprietà di minimo ora stabilita ne fa riscontro una perfettamente analoga nella torsione del cilindro ellittico: ove figura una sollecitazione puramente tangenziale invece che puramente normale, si pensa assegnato il momento torcente, ecc.