ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIOVANNI RICCI

Sulla moltiplicazione delle serie

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 3, nº 3-4 (1934), p. 373-392
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1934_2_3_3-4_373_0>

SULLA MOLTIPLICAZIONE DELLE SERIE

di GIOVANNI RICCI (Pisa).

In questo lavoro stabiliremo, servendoci di elementi che si trovano in diversi autori che si sono occupati dell'argomento [1], alcuni criterî sufficienti per la *validità* della moltiplicazione di due serie convergenti. Con un procedimento semplice, che potrebbe dirsi un giuoco di scacchiera (LANDAU [10], BRODERICK [2]) sui campi di variabilità degl'indici di sommazione (n.° 2), si giunge a stabilire un lemma (n.° 3) che dà una condizione sufficiente in forma generale e dal quale scaturiscono (n.° 4) gran parte dei teoremi noti sull'argomento, e se ne possono ricavare dei nuovi (n.i 5-8) più generali e sempre abbastanza espressivi. Il procedimento è semplice e unitario, e potrebbe anche trovare posto in un corso elementare.

Al n.° 9 si ricorda un noto teorema che ci serve nel seguito e se ne espone, per comodità del lettore, la breve dimostrazione.

Al n.° 10, per rendere più ricco il quadro dei criterî sufficienti, si fa una digressione sul criterio sufficiente di ABEL (che segue dal teorema del n.° 9) ponendolo nella forma più raffinata che gli è consentita dai recenti studî sui teoremi cosiddetti *Tauberiani*.

Nel seguito (n.i 11-16) combinando il metodo usato al n.° 2 con quello già usato da G. H. HARDY ([4], [5], [6]) per stabilire i suoi classici criterî sufficienti (e che si basa essenzialmente su un classico teorema di E. CESÀRO), se ne stabiliscono altri più generali.

Si termina (n.i 17-19) col segnalare un'altra classe di criterî i quali, come più evidenti, possono considerarsi teoricamente meno importanti, ma tuttavia possono risultare di pratico impiego.

Ci proponiamo di applicare i risultati conseguiti allo studio delle serie doppie e a quello delle serie di DIRICHLET generali.

---

(1) Vedere l'elenco bibliografico alla fine; i numeri chiusi in parentesi [ ] si riferiscono a questo elenco.

1. - Siano $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (con a_m, b_n reali) due serie convergenti e siano $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...)$, $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, ...)$ due successioni crescenti di numeri reali e divergenti $a + \infty$. Ordiniamo per valori crescenti i numeri distinti della forma $\lambda_m + \mu_n$ $(m = 1, 2, 3, ...;\ n = 1, 2, 3, ...)$ e diciamo $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, ...)$ la successione ottenuta: dunque

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < ...., \quad \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < ...., \quad \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < ....;$$
$$\lambda_s \to +\infty, \quad \mu_s \to +\infty, \quad \nu_s \to +\infty \qquad \text{per } s \to +\infty.$$

Posto $c_p = \sum_{\lambda_m + \mu_n = \nu_p} a_m b_n$, la serie $\sum_{p=1}^{\infty} c_p$ si dice (seguendo HARDY-RIESZ) *prodotto di tipo* (λ_m, μ_n) delle due serie $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. (Per $\lambda_s = \mu_s = s$ e $\lambda_s = \mu_s = \log s$ si ottengono rispettivamente i due prodotti classici secondo CAUCHY e secondo DIRICHLET).

Posto $C(\omega) = \sum_{\nu_p \leqq \omega} c_p$ non sempre si verifica

$$C(\omega) \to \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \qquad \text{per } \omega \to +\infty \tag{L}$$

e studieremo alcune condizioni sufficienti per assicurare la validità di questa relazione limite.

2. - Senza ledere la generalità si può supporre $\lambda_1 = 0$, $\mu_1 = 0$ perchè in caso diverso ci si ridurrebbe a questo alterando le successioni $(\lambda_1, \lambda_2, ...)$ e $(\mu_1, \mu_2, ...)$ con costanti additive, con l'effetto di una traslazione di $C(\omega)$ lungo l'asse ω. Poniamo per t reale qualunque

$$\alpha(t) = \underset{\omega \geqq t}{\mathrm{Max}} \left(\left| \sum_{\lambda_m > \omega} a_m \right| \right), \qquad \beta(t) = \underset{\omega \geqq t}{\mathrm{Max}} \left(\left| \sum_{\mu_n > \omega} b_n \right| \right) \tag{2.1}$$

($\alpha(t)$ e $\beta(t)$ risultano non negative, non crescenti e $\alpha(t) \to 0$, $\beta(t) \to 0$ per $t \to +\infty$). Qui e nel seguito supporremo nulla ogni somma vuota di termini.

Osserviamo che per ogni coppia (t, t') risulta

$$\left| \sum_{t < \lambda_m \leqq t'} a_m \right| \leqq 2\alpha(t). \tag{2.2}$$

Per $t' \leqq t$ è evidente; per $t' > t$ si ha per le (2.1)

$$\left| \sum_{t < \lambda_m \leqq t'} a_m \right| = \left| \sum_{\lambda_m > t} a_m - \sum_{\lambda_m > t'} a_m \right| \leqq \alpha(t) + \alpha(t') \leqq 2\alpha(t).$$

Fissati in un piano due assi cartesiani (λ, μ) e la retta $\lambda + \mu = \omega$, con $\omega > 0$, consideriamo il triangolo rettangolo $(\lambda \geqq 0,\ \mu \geqq 0,\ \lambda + \mu \leqq \omega)$; fissati i numeri reali x, y, u, v con

$$0 \leqq u \leqq x, \qquad 0 \leqq v \leqq y$$

consideriamo le rette $\lambda=x$, $\lambda=u$, $\mu=y$, $\mu=v$. Ci si accorge subito, basandoci su questo schema, che il campo $\Gamma\equiv(\lambda_m+\mu_n\leqq\omega)$ risulta decomposto nei cinque campi Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, Γ_5 sotto definiti, dal complesso dei quali va tolto il campo Γ_6 sotto definito (alcuni dei quali campi potranno risultare anche vuoti per la incompatibilità delle condizioni perimetriche o anche per non contenere alcun nodo (λ_m, μ_n))

$$\Gamma_1\equiv(\lambda_m\leqq x,\ \mu_n\leqq y),\qquad \Gamma_2\equiv(\lambda_m\leqq u,\ y<\mu_n\leqq\omega-\lambda_m),\qquad \Gamma_3\equiv(\mu_n\leqq v,\ x<\lambda_m\leqq\omega-\mu_n),$$
$$\Gamma_4\equiv(x<\lambda_m\leqq\omega-v,\ v<\mu_n\leqq\omega-\lambda_m),\qquad \Gamma_5\equiv(y<\mu_n\leqq\omega-u,\ u<\lambda_m\leqq\omega-\mu_n),$$
$$\Gamma_6\equiv(\lambda_m+\mu_n\leqq\omega,\ \lambda_m>x,\ \mu_n>y)\quad\text{oppure}\quad \Gamma_6\equiv(\lambda_m+\mu_n>\omega,\ \lambda_m\leqq x,\ \mu_n\leqq y)$$

(rispettivamente per $x+y\leqq\omega$ e $x+y\geqq\omega$).

Abbiamo dunque $\Gamma\equiv\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4+\Gamma_5-\Gamma_6$, e il campo Γ_6 (che è vuoto per $x+y=\omega$) va tolto perchè computato due volte quando $x+y<\omega$ e computato in più entro Γ_1 quando $x+y>\omega$.

Denotando con $\sum\limits_{(i)}$ la somma estesa alle coppie (λ_m, μ_n) di Γ_i abbiamo per le (2.2)

$$\sum_{(1)} a_m b_n=\sum_{\lambda_m\leqq x} a_m\cdot\sum_{\mu_n\leqq y} b_n,$$
$$\Big|\sum_{(2)} a_m b_n\Big|\leqq\sum_{\lambda_m\leqq u}|a_m|\ \Big|\sum_{y<\mu_n\leqq\omega-\lambda_m} b_n\Big|\leqq 2\beta(y)\sum_{\lambda_m\leqq u}|a_m|$$
$$\Big|\sum_{(4)} a_m b_n\Big|\leqq\sum_{x<\lambda_m\leqq\omega-v}|a_m|\ \Big|\sum_{v<\mu_n\leqq\omega-\lambda_m} b_n\Big|\leqq 2\beta(v)\sum_{x<\lambda_m\leqq\omega-v}|a_m|,$$

e simmetricamente

$$\Big|\sum_{(3)} a_m b_n\Big|\leqq 2\alpha(x)\sum_{\mu_n\leqq v}|b_n|,\qquad \Big|\sum_{(5)} a_m b_n\Big|\leqq 2\alpha(u)\sum_{y<\mu_n\leqq\omega-u}|b_n|.$$

Per $x+y<\omega$ abbiamo

$$\Big|\sum_{(6)} a_m b_n\Big|\leqq\sum_{x<\lambda_m\leqq\omega-y}|a_m|\ \Big|\sum_{y<\mu_n\leqq\omega-\lambda_m} b_n\Big|\leqq 2\beta(y)\sum_{x<\lambda_m\leqq\omega-y}|a_m|$$

e anche per simmetria

$$\Big|\sum_{(6)} a_m b_n\Big|\leqq 2\alpha(x)\sum_{y<\mu_n\leqq\omega-x}|b_n|.$$

Quando sia $x+y>\omega$ si vede in modo analogo:

$$\Big|\sum_{(6)} a_m b_n\Big|\leqq 2\beta(\omega-x)\sum_{\omega-y<\lambda_m\leqq x}|a_m|,\qquad \Big|\sum_{(6)} a_m b_n\Big|\leqq 2\alpha(\omega-y)\sum_{\omega-x<\mu_n\leqq y}|b_n|.$$

Tenendo conto che le somme vuote di termini si considerano nulle e posto

$$M(\omega;\,x,y)=$$
$$=\mathrm{Max}\Big\{\mathrm{Min}\Big(\beta(y)\sum_{x<\lambda_m\leqq\omega-y}|a_m|,\ \alpha(x)\sum_{y<\mu_n\leqq\omega-x}|b_n|\Big),\ \mathrm{Min}\Big(\beta(\omega-x)\sum_{\omega-y<\lambda_m\leqq x}|a_m|,\ \alpha(\omega-y)\sum_{\omega-x<\mu_n\leqq y}|b_n|\Big)\Big\}$$

risulta in ogni caso
$$\Big|\sum_{(6)} a_m b_n\Big| \leqq 2M(\omega\,;\, x, y).$$

Poichè $C(\omega) = \sum_{(1)} + \sum_{(2)} + \sum_{(3)} + \sum_{(4)} + \sum_{(5)} - \sum_{(6)}$, passando ai moduli si ottiene

$$\frac{1}{2}\Big| C(\omega) - \sum_{\lambda_m \leqq x} a_m \cdot \sum_{\mu_n \leqq y} b_n \Big| \leqq M(\omega\,;\, x, y) +$$
$$+ \beta(y) \sum_{\lambda_m \leqq u} |a_m| + \alpha(x) \sum_{\mu_n \leqq v} |b_n| + \beta(v) \sum_{x < \lambda_m \leqq \omega - v} |a_m| + \alpha(u) \sum_{y < \mu_n \leqq \omega - u} |b_n|,$$

e questa limitazione ci permette di concludere col lemma che segue.

3. - **Lemma.** — Condizione sufficiente perchè valga la (L) è che si possano scegliere quattro funzioni $x(\omega)$, $y(\omega)$, $u(\omega)$, $v(\omega)$ della ω positiva sottoposte alle sole condizioni (²)

$$0 \leqq u(\omega) \leqq x(\omega), \qquad 0 \leqq v(\omega) \leqq y(\omega), \qquad x(\omega) \to +\infty, \qquad y(\omega) \to +\infty,$$
$$\text{per } \omega \to +\infty$$

in guisa da avere per $\omega \to +\infty$

(I) $$\beta(v) \sum_{x < \lambda_m \leqq \omega - v} |a_m| \to 0, \qquad \alpha(u) \sum_{y < \mu_n \leqq \omega - u} |b_n| \to 0$$

(II) $$M(\omega\,;\, x, y) \to 0$$

(III) $$\beta(y) \sum_{\lambda_m \leqq u} |a_m| \to 0, \qquad \alpha(x) \sum_{\mu_n \leqq v} |b_n| \to 0.$$

Osservazioni. - *a*) Quando si assuma $x(\omega) + y(\omega) = \omega$ risulta $M(\omega\,;\, x, y) = 0$ e la (II) è verificata.

b) È evidente che quando non si richieda la validità di (L), ma si richieda soltanto di individuare una successione $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ divergente a $+\infty$ di valori da assegnare a ω in guisa da avere

(L′) $$C(\omega_k) \to \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \text{per } k \to +\infty$$

risultano condizioni sufficienti quelle che si ottengono dalle (I), (II), (III) sostituendo a x, y, u, v rispettivamente $x_k = x(\omega_k)$, $y_k = y(\omega_k)$, ecc. e considerando le relazioni di limite in esse contenute per $k \to +\infty$.

(²) Basandoci sul criterio di Abel, che assicura la (L) tutte le volte che $C(\omega)$ converge, si potrebbe sostituire la condizione $x(\omega) \to +\infty$ con $x(\omega)$ *non decrescente*; ma sarebbe una finezza illusoria poichè si vede facilmente che se $x \to x_0$ (finito) le condizioni prima di (I) e seconda di (III), scritte sotto, portano di conseguenza che una delle due serie date converge assolutamente, e allora si ricade nel noto criterio di Mertens-Stieltjes, che del resto si ottiene ugualmente dal presente Lemma (vedi n.º 4, *a*)).

4. - Casi notevoli. — Si vede che dal precedente lemma discendono subito, come corollari, moltissimi dei criterî classici e caratteristici:

a) Se una almeno delle due serie $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge assolutamente vale la (L) (MERTENS [11], STIELTJES [16], [8]).

Infatti per $u=x=y=\frac{1}{2}\omega$, $v=0$ risulta $M(\omega; x, y)=0$ e tutte le condizioni (I) e (III) risultano verificate quando sia

(M) $$\sum_{\lambda_m \leqq \omega} |a_m| = O(1), \qquad \text{per } \omega \to +\infty.$$

b) Per $u=v=x=y=\frac{\omega}{2}$ le (I) e (II) risultano verificate e si ottengono le condizioni sufficienti (PRINGSHEIM [13], [4], BRODERICK [2])

(P) $$\beta(\omega)\sum_{\lambda_m \leqq \omega} |a_m| \to 0, \qquad \alpha(\omega)\sum_{\mu_n \leqq \omega} |b_n| \to 0, \qquad \text{per } \omega \to +\infty.$$

c) Per $u=x$, $v=y$, $x+y=\omega$ le (I) e (II) risultano verificate e si ottengono le condizioni sufficienti

(B) $$\beta(y)\sum_{\lambda_m \leqq x} |a_m| \to 0, \qquad \alpha(x)\sum_{\mu_n \leqq y} |b_n| \to 0, \qquad \text{per } x, y \to +\infty.$$

d) Posto $x=y=\frac{\omega}{2}$ determiniamo (come è evidentemente sempre possibile) le funzioni $u(\omega)$, $v(\omega)$ (con $u \to +\infty$, $v \to +\infty$) in guisa da verificare le (III); poichè $x+y=\omega$ la (II) è verificata e a soddisfare le (I) bastano le condizioni seguenti (NEDER [11])

(N) $$\sum_{\frac{\omega}{2} < \lambda_m \leqq \omega} |a_m| = O(1), \qquad \sum_{\frac{\omega}{2} < \mu_n \leqq \omega} |b_n| = O(1), \qquad \text{per } \omega \to +\infty;$$

e queste equivalgono alle seguenti che hanno l'aspetto (poichè $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ è convergente risulta $\sum_{\frac{\omega}{2} < \lambda_m \leqq \omega} a_m = o(1)$ e quindi soltanto l'aspetto!) di condizioni unilaterali

$$\sum_{\frac{\omega}{2} < \lambda_m \leqq \omega} (|a_m| - a_m) = O(1), \qquad \sum_{\frac{\omega}{2} < \mu_n \leqq \omega} (|b_n| - b_n) = O(1), \qquad \text{per } \omega \to +\infty$$

e queste, poichè

$$\frac{\omega}{2} \sum_{\frac{\omega}{2} < \lambda_m \leqq \omega} (|a_m| - a_m) \leqq \sum_{\frac{\omega}{2} < \lambda_m \leqq \omega} \lambda_m (|a_m| - a_m) \leqq \omega \sum_{\frac{\omega}{2} < \lambda_m \leqq \omega} (|a_m| - a_m)$$

$$\sum_{\lambda_m \leqq \omega} \lambda_m (|a_m| - a_m) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\frac{\omega}{2^{r+1}} < \lambda_m \leqq \frac{\omega}{2^r}} \lambda_m (|a_m| - a_m) \leqq K\omega\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) = 2K\omega,$$

equivalgono alle seguenti

$$\text{(N')} \qquad \sum_{\lambda_m \leqq \omega} \lambda_m(|a_m| - a_m) = O(\omega), \qquad \sum_{\mu_n \leqq \omega} \mu_n(|b_n| - b_n) = O(\omega), \quad \text{per } \omega \to +\infty.$$

e) Apparisce evidente che le (N') contengono come caso particolare le condizioni sufficienti del bellissimo teorema di HARDY-ROSENBLATT ([5], [15], [10], [6])

$$\text{(H)} \qquad a_m > -K \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m}, \qquad b_n > -K \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_n}.$$

5. - Basta un semplice sguardo alle condizioni (H), (N) (che potremmo dire del tipo di HARDY-NEDER) e alle condizioni (P), (B) (che potremmo dire del tipo PRINGSHEIM-BRODERIK) per accorgerci che ciascuno dei due tipi di condizioni ha una qualità positiva che si riflette in una qualità negativa dell' altro. Nel primo tipo, come ben lo mostrano le eleganti condizioni (N) di NEDER, il campo di variabilità dell' indice di ciascuna somma si allontana indefinitamente, ma d'altronde ciascuna condizione è imposta ad una serie indipendentemente dall' altra; nel secondo tipo (P), (B) al bilancio di ciascuna condizione partecipano (sotto aspetto diverso) ambedue le serie, ma d'altronde il campo di variabilità dell' indice di sommazione non si allontana indefinitamente.

L' allontanarsi oltre ogni limite del campo di variabilità dell' indice di sommazione può rendere le condizioni meno restrittive per l'andamento della somma dei valori assoluti dei termini; mentre il partecipare di ambedue le serie a soddisfare una condizione può permettere a una di esse di sfruttare la circostanza che l'altra (pur non essendo assolutamente convergente) abbia favorevoli la crescenza e l'irregolarità della somma dei moduli dei termini.

Può sorgere il desiderio di abbinare in un unico tipo di condizioni i pregi dei due tipi noti; a questo desiderio in certo senso rispondono: in primo luogo il lemma sopra dimostrato (quando si rifletta che sono suoi immediati corollarî i teoremi dei n.i 6-8) e in secondo luogo i teoremi dei n.i 13-16.

6. - TEOREMA. — *Condizione sufficiente perchè valga la* (L) *è che si possano determinare due funzioni* $x(\omega)$, $y(\omega)$ *di* ω ($\omega \geqq 0$), *soddisfacenti alla condizione*

$$x(\omega) + y(\omega) \geqq \omega,$$

in guisa da avere

$$\text{(6.1)} \qquad \sum_{x < \lambda_m \leqq \omega} |a_m| = O(1), \qquad \sum_{y < \mu_n \leqq \omega} |b_n| = O(1),$$

$$\text{(6.2)} \qquad \text{Min} \left\{ \beta(\omega - x) \sum_{\omega - y < \lambda_m \leqq x} |a_m|, \quad \alpha(\omega - y) \sum_{\omega - x < \mu_n \leqq y} |b_n| \right\} \to 0, \quad \text{per } \omega \to +\infty.$$

Osservazioni. - *a*) Per soddisfare alla (6.2) occorre Max $(\omega - x, \omega - y) \to +\infty$.

b) Quando sia $x < \theta\omega$, $y < \theta\omega$ con θ indipendente da ω e $\theta < 1 < 2\theta$, allora la (6.2) è conseguenza della (6.1) e il criterio si riduce a quello di NEDER (n.° 4, *d*)).

Questa proposizione discende dal lemma generale dimostrato: infatti

1°) se una almeno delle due condizioni $x(\omega) \to +\infty$, $y(\omega) \to +\infty$ non è verificata, le (6.1) portano di conseguenza che una almeno delle due serie $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge assolutamente e (n.° 4, a)) la proposizione in questo caso è vera.

2°) se $x(\omega) \to +\infty$ e $y(\omega) \to +\infty$, allora basta scegliere le due funzioni $u(\omega)$, $v(\omega)$ (con $u(\omega) \to +\infty$, $v(\omega) \to +\infty$) in guisa da soddisfare alle (III), e il teorema è vero come conseguenza del lemma del n.° 3.

Quando si assuma $x(\omega) + y(\omega) = \omega$ la (6.2) è verificata e abbiamo

TEOREMA. - *Condizione sufficiente perchè valga la* (L) *è che si possa determinare una funzione* $z(\omega)$ *di* $\omega(\omega \geqq 0)$ *in guisa da avere*

$$(\mathrm{N}^*) \qquad \sum_{z < \lambda_m \leqq \omega} |a_m| = O(1), \qquad \sum_{\omega - z < \mu_n \leqq \omega} |b_n| = O(1).$$

E queste condizioni (N*) semplici quanto le (N) presentano su queste il vantaggio, che si potrebbe dire in termini espressivi, della possibile collaborazione fra le due serie da moltiplicare.

7. - Ai teoremi del numero precedente possiamo dare la forma che loro compete quando si deducano dal lemma contenuto nell'osservazione b) del n.° 3. In particolare possiamo dedurre il seguente criterio.

TEOREMA. - *Se esistono una costante* K *e due successioni di numeri reali*

$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots), \qquad (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots)$$

per cui si abbia

$$(7.1) \qquad \begin{cases} 0 \leqq \delta_k < 1, & (k = 1, 2, 3, \ldots); \\ \omega_k \to +\infty, \quad \dfrac{1}{\omega_k^{1-\delta_k}} = O(1 - \delta_k) & \text{per } k \to +\infty \end{cases}$$

$$(7.2) \qquad a_m > -K \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m^{\delta_k}}, \qquad \text{per } \omega_k - \omega_k^{\delta_k} < \lambda_m \leqq \omega_k$$

$$(7.3) \qquad \sum_{\omega_k^{\delta_k} < \mu_n \leqq \omega_k} |b_n| = O(1), \qquad \text{per } k \to +\infty,$$

allora vale la relazione limite

$$(\mathrm{L}') \qquad C(\omega_k) \to \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \qquad \text{per } k \to +\infty.$$

Tenendo presenti le condizioni sufficienti per (L′) analoghe alle (N*), si vede che basta dimostrare la validità di

$$(7.4) \qquad \sum_{\omega_k - \omega_k^{\delta_k} < \lambda_m \leqq \omega_k} |a_m| = O(1), \qquad \text{per } k \to +\infty$$

poichè questa insieme alla (7.3) ci assicura la validità di (L'). Poniamo

$$z_k = \omega_k - \omega_k^{\delta_k}, \qquad \lambda_{m_0-1} \leqq z_k < \lambda_{m_0}, \qquad \lambda_m = \omega_k \theta_m ;$$

essendo $\delta_k < 1$, risulta per $k \to +\infty$

$$\sum_{z_k<\lambda_m\leqq\omega_k} |a_m| = \sum_{z_k<\lambda_m\leqq\omega_k} a_m + \sum_{z_k<\lambda_m\leqq\omega_k} (|a_m| - a_m) = O(1) + (|a_{m_0}| - a_{m_0}) + \sum_{z_k<\lambda_m\leqq\omega_k}{}^{*}(|a_m| - a_m)$$

dove in $\sum^*$ si conviene di sopprimere il termine $|a_{m_0}| - a_{m_0}$.

Per il fatto che $\theta^{-\delta_k}$ non cresce col crescere di θ abbiamo:

$$\frac{1}{2}\sum_{z_k<\lambda_m\leqq\omega_k} |a_m| \leqq O(1) + K \sum_{z_k<\lambda_m\leqq\omega_k}{}^{*} \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m^{\delta_k}} = O(1) + K\omega_k^{1-\delta_k} \sum_{\frac{z_k}{\omega_k}<\theta_m\leqq 1}{}^{*} \frac{\theta_m - \theta_{m-1}}{\theta_m^{\delta_k}}$$

$$\leqq O(1) + K\omega_k^{1-\delta_k} \int_{\frac{z_k}{\omega_k}}^{1} \frac{d\theta}{\theta^{\delta_k}} = O(1) + K\frac{\omega_k^{1-\delta_k}}{1-\delta_k}\left\{1 - \left(\frac{z_k}{\omega_k}\right)^{1-\delta_k}\right\}$$

$$= O(1) + K\frac{\omega_k^{1-\delta_k}}{1-\delta_k}\left\{1 - \left(1 - \frac{1}{\omega_k^{1-\delta_k}}\right)^{1-\delta_k}\right\}$$

$$= O(1) + K\frac{\omega_k^{1-\delta_k}}{1-\delta_k}\left\{\binom{1-\delta_k}{1}\frac{1}{\omega_k^{1-\delta_k}} - \binom{1-\delta_k}{2}\left(\frac{1}{\omega_k^{1-\delta_k}}\right)^2 + \dots\right\}$$

$$\leqq O(1) + K + \frac{K}{\omega_k^{1-\delta_k}(1-\delta_k)}\left\{-\binom{1-\delta_k}{2} + \binom{1-\delta_k}{3} - \binom{1-\delta_k}{4} + \dots\right\},$$

e poichè per $\mu > 0$ abbiamo

$$0 = 1 - \binom{\mu}{1} + \binom{\mu}{2} - \binom{\mu}{3} + \dots$$

risulta, tenendo conto dell'ultima in (7.1),

$$\sum_{z_k<\lambda_m\leqq\omega_k} |a_m| \leqq O(1) + \frac{2K\delta_k}{\omega_k^{1-\delta_k}(1-\delta_k)} = O(1),$$

e la (7.4) è dimostrata.

Più in particolare si conclude:

Se

$$0 \leqq \delta_k < 1, \qquad (k = 1, 2, 3, \dots);$$

$$\omega_k \to +\infty, \qquad \omega_k^{\delta_k - 1} = O(1-\delta_k), \qquad \sum_{\omega_k^{\delta_k}<n\leqq\omega_k} |b_n| = O(1), \quad \text{per } k \to +\infty;$$

$$a_m > -\frac{K}{m^{\delta_k}}, \qquad \text{per } \omega_k - \omega_k^{\delta_k} < m \leqq \omega_k,$$

allora

$$\sum_{s\leqq\omega_k} (a_1 b_{s-1} + a_2 b_{s-2} + \dots + a_{s-1} b_1) \to \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \qquad \text{per } k \to +\infty.$$

8. - In maniera analoga a quella seguita al numero precedente, dal primo teorema del n.° 6 ricaviamo il seguente

TEOREMA. - *Condizione sufficiente perchè valga la* (L) *è che esistano tre numeri* K, δ, δ' *con* $0<\delta<1$, $0<\delta'<1$ *pei quali si abbia*

$$(8.1) \qquad a_m > -K\frac{\lambda_m-\lambda_{m-1}}{\lambda_m^{\delta}}, \qquad b_n > -K\frac{\mu_n-\mu_{n-1}}{\mu_n^{\delta'}}$$

$$(8.2) \qquad \operatorname{Min}\Big\{\sum_{\omega^{\delta'}<\lambda_m\leqq\omega}|a_m|, \quad \sum_{\omega^{\delta}<\mu_n\leqq\omega}|b_n|\Big\}=O(1), \qquad \text{per } \omega\to+\infty.$$

Questo teorema vale anche per $\delta=\delta'=1$ poichè riconduce al teorema di HARDY-ROSENBLATT (n.° 4, *e*)). Quando è $\delta=1$, $\delta'<1$ (si vedrebbe facilmente che) per assicurare la validità del teorema occorre sostituire alla (8.2) la condizione seguente

$$(8.3) \qquad \operatorname{Min}\Big\{\sum_{\omega^{\delta'}<\lambda_m\leqq\omega}|a_m|, \quad \sum_{\theta\omega<\mu_n\leqq\omega}|b_n|\Big\}=O(1), \qquad \text{per } \omega\to+\infty$$

essendo $0<\theta<1$, θ indipendente da ω.

9. - Poniamo

$$(9.1) \qquad \begin{cases} A=\sum_{m=1}^{\infty}a_m, \quad B=\sum_{n=1}^{\infty}b_n, \quad A(x)=\sum_{\lambda_m\leqq x}a_m, \quad B(x)=\sum_{\mu_n\leqq x}b_n, \\ C^{(1)}(\omega)=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}C(u)du. \end{cases}$$

Poichè

$$(9.2) \qquad C(\omega)=\sum_{\lambda_m+\mu_n\leqq\omega}a_mb_n=\sum_{\lambda_m\leqq\omega}a_m\sum_{\mu_n\leqq\omega-\lambda_m}b_n=\sum_{\lambda_m\leqq\omega}a_mB(\omega-\lambda_m),$$

tenendo conto che $B(x)=0$ per $x<0$ e posto $v=\omega+\lambda_m-u$, con un giuoco di inversioni nell'ordine di somme e integrali abbiamo

$$\omega C^{(1)}(\omega)=\int_0^{\omega}\sum_{\lambda_m\leqq u}a_mB(u-\lambda_m)du=\int_0^{\omega}\sum_{\lambda_m\leqq\omega}a_mB(u-\lambda_m)du=\sum_{\lambda_m\leqq\omega}\int_0^{\omega}a_mB(u-\lambda_m)du$$

$$=\sum_{\lambda_m\leqq\omega}\int_{\lambda_m}^{\omega}a_mB(u-\lambda_m)du=\sum_{\lambda_m\leqq\omega}\int_{\lambda_m}^{\omega}a_mB(\omega-v)dv=\int_0^{\omega}\sum_{\lambda_m\leqq v}a_m\cdot B(\omega-v)dv$$

$$(9.3) \qquad =\int_0^{\omega}A(v)B(\omega-v)dv.$$

Osserviamo che è

$$A(v)B(\omega-v)=AB+(A(v)-A)B+(B(\omega-v)-B)A+(A(v)-A)(B(\omega-v)-B)$$

ed essendo $A(x) \to A$, $B(x) \to B$ per $x \to +\infty$ è anche per $\omega \to +\infty$

$$\frac{1}{\omega}\int_0^\omega (A(v)-A)dv \to 0, \qquad \frac{1}{\omega}\int_0^\omega (B(\omega-v)-B)dv \to 0,$$

$$\frac{1}{\omega}\int_0^\omega (A(v)-A)(B(\omega-v)-B)dv \to 0.$$

Per queste dalla (9.3) segue subito

$$(\mathrm{L}^{(1)}) \qquad C^{(1)}(\omega) \to AB, \qquad \text{per } \omega \to +\infty,$$

e questa relazione limite, dovuta a E. CESÀRO [3] (³) e la cui dimostrazione è riportata qui per comodità del lettore, ci servirà in ciò che segue.

10. - Digressione sul criterio sufficiente di Abel. — Osserviamo che

$$\varliminf_{\omega\to+\infty} C(\omega) \leq \varliminf_{\omega\to+\infty} C^{(1)}(\omega) \leq \varlimsup_{\omega\to+\infty} C^{(1)}(\omega) \leq \varlimsup_{\omega\to+\infty} C(\omega);$$

infatti se per $\omega > \omega_0$ risulta $C(\omega) > \gamma$ abbiamo per $\omega \to +\infty$

$$\omega C^{(1)}(\omega) = \int_0^{\omega_0} C(u)du + \int_{\omega_0}^{\omega} C(u)du > O(1) + \int_{\omega_0}^{\omega} \gamma du = O(1) + \gamma(\omega-\omega_0) = \gamma\omega + O(1).$$

Dunque per la $(\mathrm{L}^{(1)})$ si conclude colle seguenti limitazioni che traducono in simboli il criterio sufficiente di ABEL:

$$\varliminf_{\omega\to+\infty} C(\omega) \leq \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \varlimsup_{\omega\to+\infty} C(\omega);$$

anzi si può aggiungere che se in una di queste limitazioni vale il segno $=$, per esempio se $\varliminf_{\omega\to+\infty} C(\omega) = AB$, allora la funzione $C(\omega)$ soddisfa alla condizione

$$\frac{1}{\omega}\int_0^\omega |C(u)-AB|\,du \to 0, \qquad \text{per } \omega \to +\infty.$$

Infatti per ipotesi è $|C(\omega)-AB| - (C(\omega)-AB) \to 0$, e quindi per $(\mathrm{L}^{(1)})$

$$\int_0^\omega |C(u)-AB|\,du = \int_0^\omega (C(u)-AB)du + \int_0^\omega \{|C(u)-AB| - C(u) + AB\}\,du$$
$$= o(\omega) + o(\omega).$$

Ma, in conseguenza della $(\mathrm{L}^{(1)})$, possiamo dare al criterio sufficiente di ABEL una forma più raffinata in base ai risultati di recenti studî sui teoremi cosiddetti Tauberiani, e precisamente di quelli che riguardano i procedimenti aritmetici di sommazione (⁴). Infatti vale il seguente

---

(³) Per questa forma, collegata al tipo (λ_m, μ_n), vedere E. LANDAU [9], H. BOHR [1] e M. RIESZ [14].

(⁴) Alcune delle più importanti tappe nello studio dei teoremi Tauberiani di questa classe

TEOREMA. - *Se ad ogni numero positivo τ si possono fare corrispondere due numeri $\omega_0=\omega_0(\tau)$, $\theta=\theta(\tau)$ positivi dipendenti da τ, tali che per ogni coppia ω, ω' con*

$$\omega_0(\tau)\leqq\omega\leqq\omega'\leqq\omega(1+\theta(\tau)) \tag{10.1}$$

si abbia

$$C(\omega')-C(\omega)>-\tau \tag{S}$$

allora

$$C(\omega)\to\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cdot\sum_{n=1}^{\infty}b_n,\qquad \text{per } \omega\to+\infty. \tag{L}$$

Infatti per $\omega\to+\infty$ risulta, attraverso semplici trasformazioni

$$\begin{aligned}C(\omega)-AB&=C^{(1)}(\omega(1+\theta))-AB+C(\omega)-\left(\frac{1+\theta}{\theta}-\frac{1}{\theta}\right)C^{(1)}(\omega(1+\theta))\\&=o(1)+C(\omega)+\frac{1}{\theta}\{C^{(1)}(\omega(1+\theta))-C^{(1)}(\omega)\}-\\&\quad-\frac{1}{\theta}\{(1+\theta)C^{(1)}(\omega(1+\theta))-C^{(1)}(\omega)\}\\&=o(1)+C(\omega)+\frac{o(1)}{\theta}-\frac{1}{\theta\omega}\int_{\omega}^{\omega(1+\theta)}C(u)du=o(1)-\frac{1}{\theta\omega}\int_{\omega}^{\omega(1+\theta)}\{C(u)-C(\omega)\}du\\&<o(1)+\tau,\end{aligned}$$

e per l'arbitrarietà di τ

$$\overline{\lim_{\omega\to+\infty}}\{C(\omega)-AB\}\leqq 0. \tag{10.2}$$

Poichè dalle (10.1) si ha $\omega'\leqq\omega(1+\theta)\leqq\omega'(1+\theta)$ si conclude che vale la disuguaglianza $C(\omega')-C(\omega)<\tau$ tutte le volte che

$$\omega_0(\tau)\leqq\frac{\omega}{1+\theta(\tau)}\leqq\omega'\leqq\omega.$$

In base a questa osservazione abbiamo, analogamente a quanto abbiamo veduto per la (10.2)

$$\begin{aligned}C(\omega)-AB&=C^{(1)}(\omega)-AB+C(\omega)-\left(\frac{1+\theta}{\theta}-\frac{1}{\theta}\right)C^{(1)}(\omega)\\&=o(1)+C(\omega)+\frac{1}{\theta}\left\{C^{(1)}(\omega)-C^{(1)}\left(\frac{\omega}{1+\theta}\right)\right\}-\frac{1+\theta}{\theta}\left\{C^{(1)}(\omega)-\frac{1}{1+\theta}C^{(1)}\left(\frac{\omega}{1+\theta}\right)\right\}\\&=o(1)+C(\omega)+\frac{o(1)}{\theta}-\frac{1+\theta}{\theta\omega}\int_{\frac{\omega}{1+\theta}}^{\omega}C(u)du=o(1)-\frac{1+\theta}{\theta\omega}\int_{\frac{\omega}{1+\theta}}^{\omega}\{C(u)-C(\omega)\}du\\&>o(1)-\tau,\end{aligned}$$

---

particolare si potrebbero distinguere coi nomi HARDY, LANDAU, R. SCHMIDT, SZÁSZ; la condizione (S) è del tipo LANDAU-SCHMIDT. Per ciò che segue in questo numero vedere O. SZÁSZ: *Verallgemeinerung und neuer Beweis einiger Sätze Tauberscher Art*, Sitzungsberichte Akad. Wissensch. zu München, 1929, pp. 325-340; vedi pp. 337-338.

e per l'arbitrarietà di τ

(10.3)
$$\underline{\lim}_{\omega\to+\infty}\{C(\omega)-AB\}\geqq 0.$$

Da (10.2) e (10.3) segue la (L), c. d. d.

11. - D'altronde per l'ultima delle (9.1) abbiamo

(11.1)
$$C^{(1)}(\omega)=C(\omega)-\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\{C(\omega)-C(u)\}\,du=C(\omega)-\frac{1}{\omega}\,C^*(\omega),$$

dove abbiamo posto

(11.2)
$$C^*(\omega)=\int_0^\omega\{C(\omega)-C(u)\}\,du.$$

Per la $(L^{(1)})$ e la (11.1) si vede che quando risulti

(L*)
$$C^*(\omega)=o(\omega), \qquad \text{per } \omega\to+\infty$$

vale la (L). Il metodo di Hardy consiste appunto nel ricercare condizioni sufficienti perchè valga la (L*); e ci proponiamo tale ricerca nei n.i 12-16. Intanto procuriamoci, seguendo Hardy, un'espressione di $C^*(\omega)$ adatta allo scopo.

Sia $\nu_p\leqq\omega<\nu_{p+1}$; per $\nu_p\leqq u\leqq\omega$ risulta $C(u)=C(\omega)$. Dalla (11.2), osservando che $\nu_1=\lambda_1+\mu_1=0$, otteniamo

(11.3)
$$\begin{aligned}C^*(\omega)&=\sum_{s=1}^{p-1}\{C(\nu_p)-C(\nu_s)\}(\nu_{s+1}-\nu_s)=\nu_pC(\nu_p)-\sum_{s=1}^{p-1}C(\nu_s)(\nu_{s+1}-\nu_s)\\&=\nu_pC(\nu_p)-\sum_{s=1}^{p-1}(\nu_{s+1}-\nu_s)\sum_{r=1}^{s}c_r=\nu_pC(\nu_p)-\sum_{r=1}^{p-1}c_r(\nu_p-\nu_r)\\&=\nu_pC(\nu_p)-\nu_pC(\nu_{p-1})+\sum_{r=1}^{p-1}\nu_rc_r=\sum_{r=1}^{p}\nu_rc_r=\sum_{\lambda_m+\mu_n\leqq\omega}(\lambda_m+\mu_n)a_mb_n\\&=\sum_{\lambda_m\leqq\omega}\lambda_ma_mB(\omega-\lambda_m)+\sum_{\mu_n\leqq\omega}\mu_nb_nA(\omega-\mu_n).\end{aligned}$$

Una semplice ispezione sulle proposizioni a cui perverremo ci mostra che non si altera la generalità supponendo

$$\sum_{m=1}^{\infty}a_m=0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=0,$$

cioè supponendo

(11.4)
$$A(x)\to 0, \qquad B(x)\to 0, \qquad \text{per } x\to+\infty.$$

12. - Per semplicità di scrittura poniamo

(12.1)
$$X(t,t')=\sum_{t<\lambda_m\leqq t'}\lambda_m|a_m|, \qquad Y(t,t')=\sum_{t<\mu_n\leqq t'}\mu_n|b_n|$$

convenendo di considerare nulle le somme vuote di termini. Ricordando la definizione dei campi $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_6$ data al n.° 2 abbiamo, con significato evidente dei simboli:

$$C^*(\omega) = \Big(\sum_{(1)} + \sum_{(2)} + \sum_{(3)} + \sum_{(4)} + \sum_{(5)} - \sum_{(6)}\Big)(\lambda_m + \mu_n) a_m b_n. \tag{12.2}$$

Andiamo a valutare le varie somme. In primo luogo è

$$\sum_{(1)} (\lambda_m + \mu_n) a_m b_n = \sum_{\lambda_m \leqq x} \lambda_m a_m \cdot \sum_{\mu_n \leqq y} b_n + \sum_{\mu_n \leqq y} \mu_n b_n \cdot \sum_{\lambda_n \leqq x} a_m.$$

Per questa somma osserviamo:

1°) esiste un numero K tale che qualunque siano x e y si ha

$$\Big|\sum_{\lambda_m \leqq x} a_m\Big| < K, \qquad \Big|\sum_{\mu_n \leqq y} b_n\Big| < K; \tag{12.3}$$

2°) posto $\lambda_s \leqq x < \lambda_{s+1}$, $A(\lambda_0) = 0$, risulta

$$\sum_{\lambda_m \leqq x} \lambda_m a_m = \sum_{\lambda_m \leqq x} \lambda_m \{A(\lambda_m) - A(\lambda_{m-1})\} = \lambda_s A(\lambda_s) + \sum_{m=1}^{s-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) A(\lambda_m)$$

$$= \lambda_s A(\lambda_s) + \sum_{\lambda_m \leqq \lambda_s^{\frac{1}{2}}} (\lambda_{m+1} - \lambda_m) A(\lambda_m) + \sum_{\lambda_s^{\frac{1}{2}} < \lambda_m \leqq \lambda_{s-1}} (\lambda_{m+1} - \lambda_m) A(\lambda_m),$$

da cui per le (11.4), (12.3), (2.1)

$$\Big|\sum_{\lambda_m \leqq x} \lambda_m a_m\Big| \leqq \lambda_s |A(\lambda_s)| + K\lambda_s^{\frac{1}{2}} + \alpha(\lambda_s^{\frac{1}{2}}) \cdot \lambda_s = o(\lambda_s), \qquad \text{per } s \to +\infty.$$

Dunque

$$\sum_{\lambda_m \leqq x} \lambda_m a_m \cdot \sum_{\mu_n \leqq y} b_n = o(x), \qquad \text{per } x \to +\infty;$$

$$\sum_{\mu_n \leqq y} \mu_n b_n \cdot \sum_{\lambda_m \leqq x} a_m = o(y), \qquad \text{per } y \to +\infty;$$

e

$$\sum_{(1)} (\lambda_m + \mu_n) a_m b_n = o(x) + o(y), \qquad \text{per } x \to +\infty,\ y \to +\infty. \tag{12.4}$$

Proseguendo nella valutazione delle somme abbiamo ([5])

$$\sum_{(2)} = \sum_{\lambda_m \leqq u} \lambda_m a_m \sum_{y < \mu_n \leqq \omega - \lambda_m} b_n + \sum_{y < \mu_n \leqq \omega - u} \mu_n b_n \cdot \sum_{\lambda_m \leqq u} a_m + \sum_{\omega - u < \mu_n \leqq \omega} \mu_n b_n \sum_{\lambda_m \leqq \omega - \mu_n} a_m$$

e si conclude per le (12.1), (12.3), (2.2) e (9.1)

$$\Big|\sum_{(2)}\Big| \leqq 2\beta(y) X(-1, u) + |A(u)|\, Y(y, \omega - u) + KY(\omega - u, \omega),$$

([5]) Per scrivere meno, in questo numero e nel successivo, tralasciamo di segnare dopo i simboli di somma $\sum_{(1)}, \ldots, \sum_{(6)}$ il termine generale, che è sempre $(\lambda_m + \mu_n) a_m b_n$.

e simmetricamente

$$\Big|\sum_{(3)}\Big| \leq 2\alpha(x)\,Y(-1,\,v)+|\,B(v)\,|\,X(x,\,\omega-v)+KX(\omega-v,\,\omega).$$

Analogamente

$$\sum_{(4)} = \sum_{x<\lambda_m\leqq\omega-v}\lambda_m a_m \sum_{v<\mu_n\leqq\omega-\lambda_m} b_n + \sum_{v<\mu_n\leqq\omega-x}\mu_n b_n \sum_{x<\lambda_m\leqq\omega-\mu_n} a_n,$$

da cui:

$$\Big|\sum_{(4)}\Big| \leqq 2\beta(v)X(x,\,\omega-v)+2\alpha(x)\,Y(v,\,\omega-x)$$

$$\Big|\sum_{(5)}\Big| \leqq 2\alpha(u)\,Y(y,\,\omega-u)+2\beta(y)X(u,\,\omega-y).$$

Per $x+y\leqq\omega$ abbiamo

$$\sum_{(6)} = \sum_{x<\lambda_m\leqq\omega-y}\lambda_m a_m \sum_{y<\mu_n\leqq\omega-\lambda_m} b_n + \sum_{y<\mu_n\leqq\omega-x}\mu_n b_n \sum_{x<\lambda_m\leqq\omega-\mu_n} a_m,$$

da cui:

$$\Big|\sum_{(6)}\Big| \leqq 2\beta(y)X(x,\,\omega-y)+2\alpha(x)\,Y(y,\,\omega-x)$$

e per $x+y\geqq\omega$ si trova analogamente

$$\Big|\sum_{(6)}\Big| \leqq 2\beta(\omega-y)X(\omega-y,\,x)+2\alpha(\omega-x)\,Y(\omega-x,\,y).$$

13. - Supponiamo che $x=x(\omega)$, $y=y(\omega)$ siano due funzioni di ω ($\geqq 0$) tali da avere

$$x\to+\infty,\qquad y\to+\infty,\qquad x=O(\omega),\qquad y=O(\omega),\quad \text{per } \omega\to+\infty;$$

allora è possibile scegliere due funzioni $u=u(\omega)$, $v=v(\omega)$ in guisa da avere

$$\begin{array}{lll} u\to+\infty, & \beta(y)X(-1,\,u)=o(\omega), & Y(\omega-u,\,\omega)=o(\omega)\\ v\to+\infty, & \alpha(x)\,Y(-1,\,v)=o(\omega), & X(\omega-v,\,\omega)=o(\omega). \end{array}$$

Osservando che in base alle (12.1) per ogni quaterna di numeri reali $(t_1,\,t_2,\,t_3,\,t_4)$ per la quale sia $t_1\leqq t_2$, $t_3\leqq t_4$, e del resto qualunque, è

$$X(t_2,\,t_3)\leqq X(t_1,\,t_4),\qquad Y(t_2,\,t_3)\leqq Y(t_1,\,t_4),$$

si conclude che con tale scelta di funzioni x, y, u, v di ω si verifica, per $\omega\to+\infty$:

$$\Big|\sum_{(1)}\Big|=o(\omega),\qquad \Big|\sum_{(2)}\Big|\leqq o(\omega)+|\,A(u)\,|\,Y(y,\,\omega),\qquad \Big|\sum_{(3)}\Big|\leqq o(\omega)+|\,B(v)\,|\,X(x,\,\omega)$$

$$\Big|\sum_{(4)}\Big|\leqq 2\beta(v)X(x,\,\omega)+2\alpha(x)\,Y(0,\,\omega-x),\qquad \Big|\sum_{(5)}\Big|\leqq 2\alpha(u)\,Y(y,\,\omega)+2\beta(y)X(0,\,\omega-y)$$

$$\Big|\sum_{(6)}\Big|\leqq 2\,\mathrm{Max}\,\{\beta(y)X(x,\,\omega-y)+\alpha(x)\,Y(y,\,\omega-x),$$
$$\beta(\omega-y)X(\omega-y,\,x)+\alpha(\omega-x)\,Y(\omega-x,\,y)\}$$

e poichè $A(u)\rightarrow 0$, $B(v)\rightarrow 0$, $\alpha(u)\rightarrow 0$, $\beta(v)\rightarrow 0$ ne risulta dimostrato il seguente

TEOREMA. - *Affinchè valga la* (L) *è sufficiente che si possano scegliere due funzioni* $x=x(\omega)$, $y=y(\omega)$ *di* $\omega\geqq 0$, *sottoposte alle condizioni*

$$x\rightarrow+\infty,\qquad x=O(\omega),\qquad y\rightarrow+\infty,\qquad y=O(\omega),\quad \text{per } \omega\rightarrow+\infty$$

in guisa da avere, per $\omega\rightarrow+\infty$:

$$\text{(I*)}\qquad \sum_{x<\lambda_m\leqq\omega}\lambda_m|a_m|=O(\omega),\qquad \sum_{y<\mu_n\leqq\omega}\mu_n|b_n|=O(\omega)$$

$$\text{(II*)}\qquad \beta(y)\sum_{\lambda_m\leqq\omega-y}\lambda_m|a_m|=o(\omega),\qquad \alpha(x)\sum_{\mu_n\leqq\omega-y}\mu_n|b_n|=o(\omega)$$

$$\text{(III*)}\qquad \beta(\omega-y)\sum_{\omega-y<\lambda_m\leqq x}\lambda_m|a_m|=o(\omega),\qquad \alpha(\omega-x)\sum_{\omega-x<\mu_n\leqq y}\mu_n|b_n|=o(\omega).$$

Osservazioni. - *a*) Le due condizioni (III*) sono da tralasciare, come identicamente verificate, quando le due funzioni $x(\omega)$, $y(\omega)$ soddisfano alla limitazione $x(\omega)+y(\omega)\leqq\omega$.

b) Si vede subito, poichè

$$x\sum_{x<\lambda_m\leqq\omega}|a_m|\leqq\sum_{x<\lambda_m\leqq\omega}\lambda_m|a_m|\leqq\omega\sum_{x<\lambda_m\leqq\omega}|a_m|,$$

che allorquando è possibile soddisfare alle (I*) con due funzioni $x(\omega)$, $y(\omega)$ tali che

$$x=O(\omega),\qquad \omega=O(x),\qquad y=O(\omega),\qquad \omega=O(y),\quad \text{per } \omega\rightarrow+\infty,$$

le due condizioni (I*) equivalgono alle (6.1) e le condizioni successive sono conseguenze di queste: si ritorna così al criterio di NEDER (vedi n.° 4, *d*)).

c) È superfluo osservare come anche a questo criterio si può dare la forma che gli compete quando si richieda la validità, anzichè di (L), di una relazione come la (L′) del n.° 3.

14\. - Il progresso conseguito coll'innestare il metodo di HARDY sul procedimento esposto al n.° 2 può essere posto in evidenza dalla forma che assume il teorema precedente nel caso in cui la scelta delle due funzioni $x(\omega)$ e $y(\omega)$ sia possibile in guisa da avere $x(\omega)+y(\omega)=\omega$. In questo caso abbiamo:

TEOREMA. - *Affinchè valga la* (L) *è sufficiente che si possa scegliere una funzione non negativa* $z=z(\omega)$ *di* $\omega\geqq 0$ *in guisa da avere*, per $\omega\rightarrow+\infty$:

$$\text{(I**)}\qquad \sum_{z<\lambda_m\leqq\omega}\lambda_m|a_m|=O(\omega),\qquad \sum_{\omega-z<\mu_n\leqq\omega}\mu_n|b_n|=O(\omega)$$

$$\text{(II**)}\qquad \beta(\omega-z)\sum_{\lambda_m\leqq z}\lambda_m|a_m|=o(\omega),\qquad \alpha(z)\sum_{\mu_n\leqq\omega-z}\mu_n|b_n|=o(\omega).$$

Infatti se $z\rightarrow+\infty$, $\omega-z\rightarrow+\infty$ questa proposizione è immediata conseguenza della precedente. Se per $\omega \to +\infty$ è $\underline{\lim}\, z$ finito allora la prima di (I**) e la seconda di (II**) equivalgono a

$$\sum_{\lambda_m \leqq \omega} \lambda_m |a_m| = O(\omega), \qquad \sum_{\mu_n \leqq \omega} \mu_n |b_n| = o(\omega)$$

e vale la (L) poichè da queste seguono le (N′) (vedi n.° 4, *d*)); lo stesso si dica quando $\underline{\lim}\,(\omega - z)$ è finito.

15. - In particolare per esempio si ha

Se esistono due numeri δ, ε *con* $0<\delta<1$, $0<\varepsilon<1$ *pei quali*

$$\sum_{\frac{\omega}{2}<\lambda_m \leqq \omega} |a_m| = O(1), \qquad \sum_{\lambda_m > \omega} a_m = o\left(\frac{1}{\omega^{\delta}}\right),$$

$$\sum_{\omega-\omega^{\varepsilon}<\mu_n \leqq \omega} \mu_n |b_n| = O(\omega), \qquad \sum_{\mu_n \leqq \omega} \mu_n |b_n| = O(\omega^{1+\delta\varepsilon}),$$

allora vale la (L).

Infatti posto $z = \omega^{\varepsilon}$, dalla prima di queste seguono subito la prima di (I**) e la prima di (II**), e dalle tre successive seguono la seconda di (I**) e la seconda di (II**).

16. - Poichè da $\lambda_m a_m > -K(\lambda_m - \lambda_{m-1})$ segue $\sum_{\lambda_m \leqq \omega} \lambda_m |a_m| = O(\omega)$ (vedi n.° 4, *e*)) e le prime condizioni in (I**) e (II**) risultano verificate, vale la proposizione seguente:

Affinchè valga la (L) *è sufficiente che esistano una costante* K *e una funzione* $z = z(\omega)$ *di* $\omega \geqq 0$, *per le quali*

$$a_m > -K\frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m}, \qquad \sum_{\omega - z < \mu_n \leqq \omega} \mu_n |b_n| = O(\omega), \qquad \alpha(z) \sum_{\mu_n \leqq \omega - z} \mu_n |b_n| = o(\omega).$$

17. - Per terminare accenneremo a un'altra classe di criterî sufficienti dimostrandone uno come esempio. Tale classe di criterî è quella che si presenta più spontaneamente ed è stata già segnalata in [7] per ciò che riguarda il prodotto secondo CAUCHY (cioè di tipo (m, n)). Poichè per l'estensione al prodotto di tipo più generale (λ_m, μ_n) sembrano necessarie condizioni supplementari da imporre alle successioni $(\lambda_1, \lambda_2, ...)$, $(\mu_1, \mu_2, ...)$ e inoltre la dimostrazione sembra richiedere considerazioni più minute riteniamo opportuno esporre la dimostrazione.

Dalla (9.2) ricaviamo per $\omega \to +\infty$:

$$C(\omega) - AB = o(1) + \sum_{\lambda_m \leqq \omega} a_m \{B(\omega - \lambda_m) - B\} = o(1) + \sum_{\mu_n \leqq \omega} b_n \{A(\omega - \mu_n) - A\}. \tag{17.1}$$

Dunque perchè valga la (L) è sufficiente che risulti

$$\mathrm{Min}\left\{\sum_{\lambda_m\leqq\omega}|a_m\{B(\omega-\lambda_m)-B\}|,\ \sum_{\mu_n\leqq\omega}|b_n\{A(\omega-\mu_n)-A\}|\right\}\to 0.$$

In base a questa osservazione dimostreremo il seguente

TEOREMA. - *Supponiamo che*

1°) *esistano due numeri* δ, ε *con* $0<\delta<1$, $0<\varepsilon<1$, $\delta+\varepsilon\geqq 1$ *tali che*

$$(17.2)\qquad a_m=O\left(\frac{\lambda_m-\lambda_{m-1}}{\lambda_m^\delta}\right),\quad \text{per } m\to+\infty;\qquad B(\omega)-B=o\left(\frac{1}{\omega^\varepsilon}\right),\quad \text{per } \omega\to+\infty;$$

2°) *esista un intero* N *e un numero reale* K, *positivi e abbastanza grandi in guisa che sia*

$$(17.3)\qquad \left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^\delta\left(\frac{\lambda_s-\lambda_{m-1}}{\lambda_s-\lambda_m}\right)^\varepsilon<K\lambda_s^{\delta+\varepsilon-1}$$

per ogni coppia di interi m, s *tali che* $\lambda_m\leqq\lambda_{s-N}$; *allora vale la* (L).

Osservazioni. - *a*) Si verifica subito che per $\lambda_m=m$ e $\lambda_m=\log(m+1)$ l'ipotesi 2°) è soddisfatta poichè per $N=2$ in ambedue i casi il primo membro della (17.3) non supera 2^ε.

b) Altrettanto facilmente si verifica che l'ipotesi 2°) è soddisfatta quando sia $\lambda_m=\lambda(m)$, con $\lambda(x)$ funzione convessa, cioè per cui:

$$2\lambda\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqq\lambda(x_1)+\lambda(x_2).$$

18. - Poichè ci servirà nella dimostrazione, consideriamo la funzione

$$\varphi(\theta)=\frac{1}{\theta^\delta(1-\theta)^\varepsilon},\qquad (0<\theta<1).$$

Dal fatto che

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\varphi(\theta)}\right)_{\theta=+0}>0,\qquad \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\varphi(\theta)}\right)_{\theta=1-0}<0,\qquad \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\varphi(\theta)}\right)>0\quad \text{per } 0<\theta<1,$$

si conclude che esiste un punto $\gamma=\gamma(\delta,\varepsilon)$, dipendente da δ e ε, interno all'intervallo (0, 1) tale che: per $0<\theta<\gamma$ la funzione $\varphi(\theta)$ è decrescente, mentre per $\gamma<\theta<1$ la funzione $\varphi(\theta)$ è crescente. Osserviamo inoltre che esiste l'integrale

$$(18.1)\qquad \int_0^1\varphi(\theta)d\theta=\frac{\Gamma(1-\delta)\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-\delta-\varepsilon)}.$$

19. - Posto $\bar{B}(\omega)=\underset{t\geqq\omega}{\mathrm{Max}}\,(|B(t)-B|)$ da (17.2) ricaviamo che esiste una funzione $\tau(\omega)$ di $\omega\geqq 0$ limitata, non crescente e tendente a zero per $\omega\to+\infty$ tale che

$$(19.1)\qquad \bar{B}(\omega)\leqq\frac{\tau(\omega)}{\omega^\varepsilon}.$$

Dunque per le nostre ipotesi esiste una costante K_1 tale che

$$|a_m| < K_1 \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m^\delta} \quad \text{per } m \geqq 2; \qquad \tau(\omega) < K_1. \tag{19.2}$$

Con queste posizioni abbiamo

$$\sum_{\lambda_m \leqq \omega} |a_m \{B(\omega - \lambda_m) - B\}| \leqq \sum_{\lambda_m \leqq \omega} |a_m| \bar{B}(\omega - \lambda_m) = \Phi(\omega) \tag{19.3}$$

e per la (17.1) il teorema risulterà dimostrato se riusciremo a provare che $\Phi(\omega) \to 0$ per $\omega \to +\infty$; anzi, poichè per $\lambda_m \leqq \omega < \lambda_{m+1}$ risulta $\Phi(\lambda_m) \geqq \Phi(\omega)$, basterà provare che

$$\Phi(\lambda_s) \to 0, \qquad \text{per } s \to +\infty. \tag{19.4}$$

Sia λ_s abbastanza grande da avere

$$\lambda_s - \lambda_s^{\frac{1}{2}} > \gamma \lambda_s > \lambda_2 \tag{19.5}$$

e definiamo gl'interi r e t colle limitazioni

$$\lambda_{r-1} \leqq \gamma \lambda_s < \lambda_r, \qquad \lambda_{t-1} \leqq \lambda_s - \lambda_s^{\frac{1}{2}} < \lambda_t. \tag{19.6}$$

Conviene spezzare la somma che dà $\Phi(\lambda_s)$ in (19.3) come segue ($\lambda_1 = 0$)

$$\Phi(\lambda_s) \leqq |a_1| \bar{B}(\lambda_s) + \sum_{(1)}^{*} + |a_r| \bar{B}(\lambda_s - \lambda_r) + \sum_{(2)}^{*} + |a_t| \bar{B}(\lambda_s - \lambda_t) + \sum_{(3)}^{*} + \sum_{(4)}^{*},$$

dove le somme analoghe $\sum\limits_{(1)}^{*}$, $\sum\limits_{(2)}^{*}$, $\sum\limits_{(3)}^{*}$, $\sum\limits_{(4)}^{*}$ (da considerarsi nulle quando risultino vuote di termini) hanno il termine generale $|a_m| \bar{B}(\lambda_s - \lambda_m)$ e sono estese rispettivamente ai campi

$$\lambda_2 \leqq \lambda_m \leqq \mathrm{Min}\,(\lambda_{r-1}, \lambda_{s-N}), \qquad \lambda_{r+1} \leqq \lambda_m \leqq \mathrm{Min}\,(\lambda_{t-1}, \lambda_{s-N}),$$
$$\lambda_{t+1} \leqq \lambda_m \leqq \lambda_{s-N}, \qquad \lambda_{s-N+1} \leqq \lambda_m \leqq \lambda_s.$$

Poichè $\bar{B}(\omega)$ è limitato, $\bar{B}(\lambda_s) \to 0$, $|a_s| \to 0$ e la somma $\sum\limits_{(4)}^{*}$ contiene soltanto un numero finito di termini si conclude

$$\Phi(\lambda_s) = o(1) + \sum_{(1)}^{*} + \sum_{(2)}^{*} + \sum_{(3)}^{*}. \tag{19.7}$$

Poniamo $\lambda_m = \theta_m \lambda_s$. Per le (19.1), (19.2), (19.6), per l'esistenza dell'integrale (18.1), per l'andamento di $\varphi(\theta)$ e per essere $\delta + \varepsilon \geqq 1$ otteniamo:

$$\sum_{(1)}^{*} \leqq K \sum_{(1)} \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m^\delta} \frac{\tau(\lambda_s - \lambda_m)}{(\lambda_s - \lambda_m)^\varepsilon} \leqq K_1 \tau((1-\gamma)\lambda_s) \sum_{(1)} \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m^\delta (\lambda_s - \lambda_m)^\varepsilon} \tag{19.8}$$
$$\leqq o(1) \lambda_s^{1-\delta-\varepsilon} \sum_{(1)} \frac{\theta_m - \theta_{m-1}}{\theta_m^\delta (1 - \theta_m)^\varepsilon} \leqq o(1) \int_0^1 \frac{d\theta}{\theta^\delta (1-\theta)^\varepsilon} = o(1).$$

Nella valutazione di $\sum\limits_{(2)}^{*}$ e $\sum\limits_{(3)}^{*}$, che si fa in modo analogo, entra in giuoco la (17.3):

$$\sum_{(2)}^{*} \leqq K_1 \sum_{(2)} \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m^{\delta}} \frac{\tau(\lambda_s - \lambda_m)}{(\lambda_s - \lambda_m)^{\varepsilon}} \leqq K_1 \tau(\lambda_s^{\frac{1}{2}}) \sum_{(2)} \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m^{\delta}(\lambda_s - \lambda_m)^{\varepsilon}} \tag{19.9}$$

$$\leqq o(1) \cdot K \lambda_s^{\delta+\varepsilon-1} \sum_{(2)} \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_{m-1}^{\delta}(\lambda_s - \lambda_{m-1})^{\varepsilon}} = o(1) \sum_{(2)} \frac{\theta_m - \theta_{m-1}}{\theta_{m-1}^{\delta}(1 - \theta_{m-1})^{\varepsilon}}$$

$$\leqq o(1) \int_0^1 \frac{d\theta}{\theta^{\delta}(1-\theta)^{\varepsilon}} = o(1).$$

$$\sum_{(3)}^{*} \leqq K_1 \sum_{(3)} \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m^{\delta}} \frac{\tau(\lambda_s - \lambda_m)}{(\lambda_s - \lambda_m)^{\varepsilon}} \leqq K_1^2 \sum_{(3)} \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m^{\delta}(\lambda_s - \lambda_m)^{\varepsilon}} \tag{19.10}$$

$$\leqq K K_1^2 \lambda_s^{\delta+\varepsilon-1} \sum_{(3)} \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_{m-1}^{\delta}(\lambda_s - \lambda_{m-1})^{\varepsilon}} = K K_1^2 \sum_{(3)} \frac{\theta_m - \theta_{m-1}}{\theta_{m-1}^{\delta}(1 - \theta_{m-1})^{\varepsilon}}$$

$$\leqq K K_1^2 \int_{1-\lambda_s^{-\frac{1}{2}}}^{1} \frac{d\theta}{\theta^{\delta}(1-\theta)^{\varepsilon}} = K K_1^2 o(1) = o(1).$$

Introducendo le (19.8), (19.9) e (19.10) nella (19.7) otteniamo la (19.4) e il teorema è dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

1. H. BOHR: *Über die Summabilität Dirichletscher Reihen,* Nachrichten der König. Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1909, pp. 247-262; vedi p. 255.
2. T. S. BRODERICK: *On Dirichlet Multiplication of infinite series,* Proceedings London Math. Soc., s. 2, vol. 22 (1924), pp. 468-482; vedi pp. 470-473.
3. E. CESÀRO: *Sur la multiplication des séries,* Bulletin des Sciences Mathématiques, s. II, vol. 14 (1890), pp. 114-120.
4. G. H. HARDY: *The multiplication of conditionally convergent series,* Proceedings London Math. Soc., s. 2, vol. 6 (1908), pp. 410-423.
5. —: *On the multiplication of Dirichlet's series,* Proceedings London Math. Soc., s. 2, vol. 10 (1912), pp. 396-405.
6. —: *Note on the multiplication of series,* Journal London Math. Soc., vol. 2 (1927), pp. 169-171.
7. G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD: *Contributions to the arithmetic theory of series,* Proceedings London Math. Soc., s. 2, vol. 11 (1913), pp. 411-478; vedi pp. 460-466.
8. E. LANDAU: *Über die Multiplikation Dirichlet'scher Reihen,* Rendiconti Circolo Mat. Palermo, vol. 24 (1907), pp. 81-160; vedi pp. 86-89.
9. —: *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen,* Leipzig (1909), vedi pp. 752-754, 762-767, 904.
10. —: *Über einen Satz des Herrn Rosenblatt,* Jahresberichte Deutschen-Math.-Vereinigung, Bd. 29 (1920), p. 238.

11. F. Mertens: *Über die Multiplicationsregel für zwei unendliche Reihen,* Journal für Mathematik, Bd. 79 (1875), pp. 182-184.

12. L. Neder: *Über Taubersche Bedingungen,* Proceedings London Math. Soc., s. 2, vol. 23 (1925), pp. 172-184; vedi pp. 176-179.

13. A. Pringsheim: *Vorlesungen über Zahlen-und Funktionenlehre,* Erster Band, Leipzig (1923), pp. 496-498, 944.

14. M. Riesz: *Sur la sommation des séries de Dirichlet,* Comptes rendus Acad. des Sciences, t. 149 (1909), pp. 18-21.

15. A. Rosenblatt: *Über einen Satz des Herrn Hardy,* Jahresberichte Deutschen-Math.-Vereinigung, Bd. 23 (1914), pp. 80-84.

16. T. J. Stieltjes: *Note sur la multiplication de deux séries,* Nouvelles Annales de Mathématiques, s. III, vol. 6 (1887), pp. 210-215.