

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MARIO SALVADORI

Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 5, n° 1
(1936), p. 51-72

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1936_2_5_1_51_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RICERCHE VARIAZIONALI PER GLI INTEGRALI DOPPI IN FORMA NON PARAMETRICA

di MARIO SALVADORI (Roma).

Prefazione ⁽¹⁾.

Le ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica vanno conseguendo oggi, specialmente nella scuola del TONELLI, un indirizzo che fa presagire un assetto della teoria del grado di perfezione di quello ormai raggiunto per il Calcolo delle Variazioni per gli integrali semplici. In quelle ricerche la funzione sotto il segno di integrale doppio dipende in generale dal punto (x, y) , da una funzione di tal punto e dalle derivate prime della funzione.

Pochi tentativi sostanziali sono stati invece fatti per lo studio dei problemi di minimo nel caso in cui la funzione sotto il segno di integrale doppio dipenda, oltrechè dalla funzione incognita e dalle sue derivate prime, anche dalle derivate seconde.

Seguendo una concezione che trovasi ampiamente sviluppata nel corso di Analisi Infinitesimale ⁽²⁾ del prof. M. PICONE, secondo la quale nel passaggio da una a due variabili l'ufficio della derivata prima dovrebbe essere sostituito per molti riguardi dalla derivata seconda mista o, più generalmente, da quella che il PICONE chiama la *derivata prima totale*, già il MANGERON ⁽³⁾ estendeva ad un particolare tipo di equazioni alle derivate parziali del 4° ordine, lineari, in 2 variabili, considerate in un dominio rettangolare i risultati classici dei problemi al contorno per le equazioni lineari del 2° ordine in una variabile, considerate in un intervallo. La fecondità di risultati di tale estensione fa ben presagire che, se si considera il problema di Calcolo delle Variazioni consistente nel minimizzare l'integrale doppio del tipo:

$$F[z] = \iint_R f\left(x, y, z(x, y), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) dx dy,$$

imponendo alla $z(x, y)$ di assumere valori prescritti sul contorno del dominio rettangolare R del piano (x, y) al quale è estesa l'integrazione, come i classici

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo.

⁽²⁾ Circolo Matematico di Catania, 1923.

⁽³⁾ Giornale di Matematiche Battaglini, 1933.

metodi della teoria delle equazioni differenziali lineari in una variabile hanno fornito criteri necessari di minimo per gli integrali semplici, così i metodi del MANGERON potrebbero fornire criteri per il problema sopraddetto.

Il prof. PICONE mi ha consigliato di studiare tale questione e ciò ha fatto oggetto del presente lavoro.

I risultati conseguiti sembrano veramente notevoli in quanto si riesce con mezzi semplici a conseguire l'estensione desiderata, pervenendo a teoremi che hanno certamente aspetto di elegante semplicità.

Con l'equazione di EULERO si riescono a stabilire condizioni necessarie per un'estremale del tipo di quelle di LEGENDRE e di JACOBI, dimostrando che il soddisfacimento in senso stretto di tali condizioni per un'estremale è sufficiente perchè questa fornisca un minimo debole. Devo osservare altresì che anche nello stabilire l'equazione di EULERO vi è qualche cosa da notare di un certo interesse se si seguono le direttive del DU BOIS-RAYMOND.

Ho voluto anche studiare criteri necessari di minimo forte nell'indirizzo di WEIERSTRASS e sono pervenuto, come è esposto alla fine del presente scritto, a costruire la funzione:

$$E[x, y, z(x, y), \alpha, \beta] = f(x, y, z(x, y), \beta) - f(x, y, z(x, y), \alpha) - (\beta - \alpha)f_\alpha(x, y, z(x, y), \alpha),$$

che nella teoria da me conseguita presta un ufficio profondamente analogo a quello della funzione di WEIERSTRASS nella teoria classica. Detta funzione consente, come già promettono ricerche in corso nell'indirizzo di E. E. LEVI, l'ottenimento di criteri sufficienti di minimo forte.

Gli aggregati di funzioni nei quali è qui considerato il funzionale $F[z]$ sono i seguenti: l'aggregato I' , costituito da tutte le funzioni continue nel dominio rettangolare R insieme alle loro derivate parziali del primo ordine e alla derivata totale del primo ordine:

$$z' = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

che soddisfano alla disuguaglianza:

$$-N < z(x, y) < N;$$

l'aggregato I'_0 delle funzioni di I' identicamente nulle sul contorno di R ; l'aggregato I'' , costituito da tutte le funzioni di I' la cui derivata totale del primo ordine z' è ancora di I' , dotate quindi di derivata totale seconda continua; l'aggregato I''_0 delle funzioni di I'' identicamente nulle sul contorno di R .

PARTE I.

§ 1. - **Premesse.** — Diamo alcune formule, di cui ci serviremo nella trattazione seguente.

1). *Formula di integrazione per parti.* - Se $u(x, y)$, $v(x, y)$ sono due funzioni definite al variare di (x, y) nel dominio rettangolare $R \begin{pmatrix} x_1 \leq x \leq x_2 \\ y_1 \leq y \leq y_2 \end{pmatrix}$, dell'aggregato Γ' ed inoltre è $u(x, y)$ nulla su FR , si ha:

$$(1) \quad \iint_{\dot{R}} u(x, y)v'(x, y)dxdy = \iint_{\dot{R}} v(x, y)u'(x, y)dxdy.$$

2). *Formula di Green.* - Siano $A(x, y)$ e $B(x, y)$ due funzioni dell'aggregato Γ' e $C(x, y)$ un'arbitraria funzione continua, definite in R . Sia inoltre $f(x, y)$ una funzione di classe Γ'' . Ha allora senso l'operatore lineare:

$$L(f) = (Af' + Bf)' + Bf' + Cf.$$

Orbene vale la seguente *formula di Green*: Se $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ sono due funzioni di classe Γ_0'' , si ha:

$$(2) \quad \iint_{\dot{R}} [\varphi L(\psi) - \psi L(\varphi)]dxdy = 0.$$

Ed invero riesce:

$$\iint_{\dot{R}} \varphi L(\psi)dxdy = \iint_{\dot{R}} \varphi(A\psi' + B\psi)'dxdy + \iint_{\dot{R}} \varphi(B\psi' + C\psi)dxdy,$$

onde segue, con una integrazione per parti nel primo integrale:

$$\iint_{\dot{R}} \varphi L(\psi)dxdy = \iint_{\dot{R}} A\varphi'\psi'dxdy + \iint_{\dot{R}} B(\varphi\psi' + \psi\varphi')dxdy + \iint_{\dot{R}} C\varphi\psi dxdy,$$

espressione quest'ultima simmetrica rispetto a φ e ψ .

c. v. d.

3). *Alcune disuguaglianze integrali.* - Sia $\varphi(x, y)$ una funzione di classe Γ_0' . Dimostriamo che:

$$(3) \quad \iint_{\dot{R}} \varphi^2(x, y)dxdy \leq k_0 \iint_{\dot{R}} \varphi'^2(x, y)dxdy, \quad k_0 = \frac{(y_2 - y_1)^2(x_2 - x_1)^2}{\pi^4}$$

$$(4) \quad \iint_{\dot{R}} |\varphi(x, y)\varphi'(x, y)|dxdy \leq k_1 \iint_{\dot{R}} \varphi'^2(x, y)dxdy, \quad k_1 = \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{\pi^2}.$$

Ricordiamo infatti che, se $\eta(x)$ è continua con la sua derivata prima in (x_1, x_2) e nulla in x_1 e in x_2 , risulta:

$$(3') \quad \int_{x_1}^{x_2} \eta^2(x)dx \leq k_0' \int_{x_1}^{x_2} \eta'^2(x)dx, \quad k_0' = \frac{(x_2 - x_1)^2}{\pi^2}.$$

Ne segue:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \varphi^2(x, y) dx dy \leq \frac{(y_2 - y_1)^2}{x^2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \varphi_{yy}^2(x, y) dx dy,$$

e, poichè: $\varphi_y(x_1, y) = \varphi_y(x_2, y) = 0$, e ancora per la (3'):

$$\iint_R \varphi^2(x, y) dx dy \leq \frac{(y_2 - y_1)^2 (x_2 - x_1)^2}{x^4} \iint_R \varphi'^2(x, y) dx dy.$$

Per dimostrare la disuguaglianza (4), applichiamo la disuguaglianza di SCHWARZ:

$$\iint_R |\varphi(x, y) \varphi'(x, y)| dx dy \leq \left\{ \iint_R \varphi^2(x, y) dx dy \cdot \iint_R \varphi'^2(x, y) dx dy \right\}^{1/2}$$

onde per la (3), risulta l'asserto. Tenendo presenti le (3), (4), si dimostra in modo perfettamente analogo che i moduli degli integrali estesi ad R delle funzioni: $\varphi\varphi_x$; $\varphi\varphi_y$; $\varphi'\varphi_x$; $\varphi'\varphi_y$; $\varphi_x\varphi_y$; φ_x^2 ; φ_y^2 sono maggiorati dall'integrale esteso ad R di $\varphi'^2(x, y)$, moltiplicato per delle convenienti costanti.

§ 2. - Ci proponiamo di studiare in questo paragrafo l'equazione:

$$(5) \quad L_\lambda(u) \equiv [a(x, y)u'(x, y) + \lambda b(x, y)u(x, y)]' + \\ + \lambda [b(x, y)u'(x, y) + c(x, y)u(x, y)] = 0,$$

dove λ è un parametro, $a(x, y)$ e $b(x, y)$ sono funzioni di classe Γ' , essendo inoltre in R : $a(x, y) > 0$, e $c(x, y)$ è una funzione continua in R .

Più precisamente vogliamo vedere se ci sono valori di λ (autovalori), in corrispondenza ai quali esiste una soluzione $u(x, y)$ della (5) di classe Γ_0'' , non identicamente nulla in R , o, come diremo, autovalori del parametro λ per l'equazione differenziale (5) con le condizioni al contorno

$$(6) \quad u(x_1, y) = u(x_2, y) = u(x, y_1) = u(x, y_2) = 0.$$

a). Dimostriamo che $\lambda = 0$ non è autovalore per le (5), (6). Infatti, se lo zero fosse autovalore risulterebbe:

$$[a(x, y)u'(x, y)]' = 0,$$

onde:

$$a(x, y)u'(x, y) = X(x) + Y(y),$$

$$(7) \quad u(x, y) = \int_{x_1}^x d\xi \int_{y_1}^y \left[\frac{X(\xi)}{a(\xi, \eta)} + \frac{Y(\eta)}{a(\xi, \eta)} \right] d\eta + X_1(x) + Y_1(y),$$

e, poichè:

$$u(x_1, y) = u(x, y_1) = 0, \quad X_1(x) + Y_1(y) \equiv 0,$$

e, posto $1: a(x, y) = p(x, y) > 0$, la (7) diviene:

$$u(x, y) = \int_{x_1}^x X(\xi) d\xi \int_{y_1}^y p(\xi, \eta) d\eta + \int_{y_1}^y Y(\eta) d\eta \int_{x_1}^x p(\xi, \eta) d\xi.$$

Per le condizioni al contorno è inoltre $u(x_2, y) = u(x, y_2) = 0$, onde:

$$(8) \quad \int_{x_1}^{x_2} X(\xi) d\xi \int_{y_1}^y p(\xi, \eta) d\eta + \int_{y_1}^y Y(\eta) d\eta \int_{x_1}^{x_2} p(\xi, \eta) d\xi = 0$$

$$(9) \quad \int_{x_1}^x X(\xi) d\xi \int_{y_1}^{y_2} p(\xi, \eta) d\eta + \int_{y_1}^{y_2} Y(\eta) d\eta \int_{x_1}^x p(\xi, \eta) d\xi = 0,$$

cioè, derivando:

$$(8') \quad \int_{x_1}^{x_2} X(\xi) p(\xi, y) d\xi + Y(y) \int_{x_1}^{x_2} p(\xi, y) d\xi = 0$$

$$(9') \quad \int_{y_1}^{y_2} Y(\eta) p(x, \eta) d\eta + X(x) \int_{y_1}^{y_2} p(x, \eta) d\eta = 0.$$

Moltiplichiamo la (9') per $X(x)$ e integriamo fra x_1 e x_2 ; moltiplichiamo la (8') per $Y(y)$ e integriamo fra y_1 e y_2 :

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} p(\xi, \eta) X^2(\xi) d\xi d\eta + \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} p(\xi, \eta) X(\xi) Y(\eta) d\xi d\eta = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} p(\xi, \eta) X(\xi) Y(\eta) d\xi d\eta + \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} p(\xi, \eta) Y^2(\eta) d\xi d\eta = 0$$

e, sommando le due precedenti:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} p(\xi, \eta) [X(\xi) + Y(\eta)]^2 d\xi d\eta = 0.$$

Ne segue: $X(x) + Y(y) = 0$, e quindi: $u(x, y) \equiv 0$, contrariamente alla ipotesi che $u(x, y)$ non sia identicamente nulla in R .

b). TEOREMA. - *L'equazione differenziale (5) ammette un autovalore positivo λ_+ ed un autovalore negativo λ_- , i cui moduli λ_+ e $|\lambda_-|$ sono il minimo del funzionale:*

$$D(\varphi) = \iint_R a(x, y) \varphi'^2(x, y) dx dy$$

rispettivamente negli aggregati Φ_1 e Φ_2 (supposti non vuoti) delle funzioni di Γ_0'' , soddisfacenti le condizioni:

$$(10) \quad H(\varphi) = \iint_{\bar{R}} [2b(x, y)\varphi(x, y)\varphi'(x, y) + c(x, y)\varphi^2(x, y)] dx dy = -1$$

$$(11) \quad H(\varphi) = \iint_{\bar{R}} [2b(x, y)\varphi(x, y)\varphi'(x, y) + c(x, y)\varphi^2(x, y)] dx dy = +1.$$

Consideriamo le funzioni $\varphi(x, y)$ del campo Φ_1 , supposto non vuoto. Sotto le condizioni imposte esiste certamente un estremo inferiore finito $\lambda_+ \geq 0$ per i valori di $D(\varphi)$. Dimostriamo che λ_+ è autovalore per le (5), (6). Premettiamo a questo 2 lemmi.

c). Per ogni funzione $\varphi(x, y)$ di Γ_0'' ha senso il seguente operatore lineare:

$$L_\lambda(\varphi) = [a\varphi' + \lambda b\varphi]' + \lambda[b\varphi' + c\varphi].$$

Inoltre, essendo λ_+ l'estremo inferiore di $D(\varphi)$ in Φ_1 , si può trovare una successione infinita di funzioni $\varphi_h(x, y)$ di Φ_1 , tali che:

$$(12) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} D(\varphi_h) = \lambda_+.$$

Orbene risulta:

$$(13) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \iint_{\bar{R}} \varphi_h L_{\lambda_+}(\varphi_h) dx dy = 0.$$

(Lemma I). - Si ha invero:

$$\iint_{\bar{R}} \varphi_h L_{\lambda_+}(\varphi_h) dx dy = \iint_{\bar{R}} \varphi_h \{ [a\varphi_h' + \lambda_+ b\varphi_h]' + \lambda_+ [b\varphi_h' + c\varphi_h] \} dx dy$$

e con una integrazione per parti, tenendo presente la (10):

$$\iint_{\bar{R}} \varphi_h L_{\lambda_+}(\varphi_h) dx dy = \iint_{\bar{R}} a\varphi_h'^2 dx dy + \lambda_+ \iint_{\bar{R}} (2b\varphi_h\varphi_h' + c\varphi_h^2) dx dy = D(\varphi_h) - \lambda_+,$$

onde, passando al limite per $h \rightarrow \infty$ e tenendo presente la (12), resta dimostrato l'asserto.

Consideriamo ora una successione infinita di funzioni $\psi_n(x, y)$ di Γ_0'' . Sussiste il seguente:

Lemma II. - Se per qualunque h

$$(14) \quad \left| \iint_{\bar{R}} \psi_n L_{\lambda_+}(\psi_n) dx dy \right| < B,$$

dove B è indipendente da h , risulta:

$$(15) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \iint_{\bar{R}} \varphi_h L_{\lambda_+}(\psi_h) dx dy = 0.$$

Infatti, se così non fosse, si potrebbe scegliere fra le coppie (φ_h, ψ_h) una successione infinita di coppie $(\bar{\varphi}_h, \bar{\psi}_h)$ ed un numero ϱ indipendente da h tali che:

$$(16) \quad \iint_{\bar{R}} \bar{\varphi}_h L_{\lambda_+}(\bar{\psi}_h) dx dy \gtrless \varrho,$$

dove vale il segno superiore per $\varrho > 0$ ed il segno inferiore per $\varrho < 0$.

Si consideri la successione di funzioni:

$$\chi_h = \bar{\varphi}_h + k \bar{\psi}_h \dots \begin{cases} k < 0 & \text{per } \varrho > 0, \\ k > 0 & \text{per } \varrho < 0, \end{cases}$$

che risultano nulle su FR . Si ha:

$$\iint_{\bar{R}} \chi_h L_{\lambda_+}(\chi_h) dx dy = \iint_{\bar{R}} [\bar{\varphi}_h L_{\lambda_+}(\bar{\varphi}_h) + k \{ \bar{\varphi}_h L_{\lambda_+}(\bar{\psi}_h) + \bar{\psi}_h L_{\lambda_+}(\bar{\varphi}_h) \} + k^2 \bar{\psi}_h L_{\lambda_+}(\bar{\psi}_h)] dx dy$$

e per la formula di GREEN a pagina 3:

$$\iint_{\bar{R}} \chi_h L_{\lambda_+}(\chi_h) dx dy = \iint_{\bar{R}} [\bar{\varphi}_h L_{\lambda_+}(\bar{\varphi}_h) + 2k \bar{\varphi}_h L_{\lambda_+}(\bar{\psi}_h) + k^2 \bar{\psi}_h L_{\lambda_+}(\bar{\psi}_h)] dx dy$$

e tenendo presenti le (14), (16):

$$\iint_{\bar{R}} \chi_h L_{\lambda_+}(\chi_h) dx dy \leq \iint_{\bar{R}} \bar{\varphi}_h L_{\lambda_+}(\bar{\varphi}_h) dx dy + 2k\varrho + k^2 B.$$

Scegliendo k in modo che sia: $2k\varrho + k^2 B < 0$ e tenendo presente la (13), risulta, per h sufficientemente grande:

$$(17) \quad \iint_{\bar{R}} \chi_h L_{\lambda_+}(\chi_h) dx dy < 0.$$

Ma con una integrazione per parti si ottiene:

$$\iint_{\bar{R}} \chi_h L_{\lambda_+}(\chi_h) dx dy = \iint_{\bar{R}} \alpha \chi_h'^2 dx dy + \lambda_+ \iint_{\bar{R}} [2b \chi_h \chi_h' + c \chi_h^2] dx dy < 0,$$

onde segue che λ_+ non può essere nullo e che $H(\chi_h)$ è negativo. Posto allora:

$$\varphi_h = \chi_h : \left| \iint_{\bar{R}} [2b \chi_h \chi_h' + c \chi_h^2] dx dy \right|^{1/2},$$

si ottiene una successione di funzioni del campo Φ_1 , per le quali la (17) diviene:

$$\iint_{\bar{R}} \alpha \varphi_n'^2 dx dy - \lambda_+ < 0,$$

il che è assurdo, essendo λ_+ l'estremo inferiore di $D(\varphi)$ nel campo Φ_1 .

d). Possiamo ora dimostrare il teorema di cui alla lettera b), operando per assurdo. D. MANGERON nella sua tesi di laurea (loc. cit.) ha dimostrato l'esistenza della funzione di GREEN relativa all'espressione:

$$M(x, y) = [a(x, y)u'(x, y)]'$$

e alle condizioni al contorno $u(x, y) = 0$ su FR ; ha dimostrato cioè l'esistenza di una funzione $G(x, y, \xi, \eta)$ (funzione di MANGERON), di classe Γ_0' tale che:

$$(18) \quad u(x, y) = \iint_{\bar{R}} G(x, y, \xi, \eta) M(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Nel caso dell'equazione differenziale (5) di pagina 4, essendo:

$$(au')' = -\lambda[(bu)' + bu' + cu],$$

otteniamo:

$$(19) \quad u(x, y) = -\lambda \iint_{\bar{R}} G(x, y, \xi, \eta) [(bu)' + bu' + cu] d\xi d\eta.$$

La (19) è l'equazione di FREDHOLM corrispondente all'equazione differenziale (5) e alle condizioni al contorno $u(x, y) = 0$ su FR . Supponiamo che λ_+ non sia autovalore della (19). Esiste allora certamente per ogni h una soluzione φ_h della equazione non omogenea:

$$(20) \quad [\alpha \varphi_h' + \lambda_+ b \varphi_h]' + \lambda_+ [b \varphi_h' + c \varphi_h] = 2b \varphi_h' + c \varphi_h$$

ed è della forma:

$$\varphi_h(x, y) = \iint_{\bar{R}} I(x, y, \xi, \eta) [2b \varphi_h'(\xi, \eta) + c \varphi_h(\xi, \eta)] d\xi d\eta.$$

Dimostriamo che le φ_h soddisfano la condizione (14) del lemma II. Infatti, essendo per la (20): $L_{\lambda_+}(\varphi_h) = 2b \varphi_h' + c \varphi_h$, applicando la disuguaglianza di SCHWARZ, risulta:

$$(21) \quad \left[\iint_{\bar{R}} \varphi_h L_{\lambda_+}(\varphi_h) dx dy \right]^2 = \left[\iint_{\bar{R}} (2b \varphi_h' + c \varphi_h) dx dy \iint_{\bar{R}} I(x, y, \xi, \eta) [2b \varphi_h' + c \varphi_h] d\xi d\eta \right]^2 \leq \\ \leq \iint_{\bar{R}} (2b \varphi_h' + c \varphi_h)^2 dx dy \cdot \iint_{\bar{R}} dx dy \left[\iint_{\bar{R}} I(x, y, \xi, \eta) [2b \varphi_h' + c \varphi_h] d\xi d\eta \right]^2 \leq \\ \leq \iint_{\bar{R}} (2b \varphi_h' + c \varphi_h)^2 dx dy \cdot \iint_{\bar{R}} dx dy \left[\iint_{\bar{R}} I^2(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \cdot \iint_{\bar{R}} (2b \varphi_h' + c \varphi_h)^2 d\xi d\eta \right] = \\ = \left[\iint_{\bar{R}} (2b \varphi_h' + c \varphi_h)^2 dx dy \right]^2 \cdot \iint_{\bar{R}} dx dy \iint_{\bar{R}} I^2(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Detto M il massimo valore di $b(x, y)$ e $c(x, y)$ in R ed m il minimo (positivo) di $a(x, y)$ in R , avremo:

$$(2b\varphi_{h'} + c\varphi_h)^2 \leq 4M^2\varphi_{h'}^2 + 4M^2|\varphi_h\varphi_{h'}| + M^2\varphi_h^2,$$

e tenendo presenti le (4), (5) del paragrafo 3:

$$(22) \quad \iint_R (2b\varphi_{h'} + c\varphi_h)^2 dx dy \leq \left\{ 4 \frac{M^2}{m} + 4 \frac{M^2}{m} k_1 + \frac{M^2}{m} k_0 \right\} \iint_R a\varphi_{h'}^2 dx dy.$$

Poichè per $h \rightarrow \infty$ l'integrale a secondo membro di (22) tende a λ_+ , fissato $\varrho > 0$, per h sufficientemente grande sarà:

$$\iint_R (2b\varphi_{h'} + c\varphi_h)^2 dx dy \leq \left\{ 4 \frac{M^2}{m} (1 + k_1) + \frac{M^2}{m} k_0 \right\} (\lambda_+ + \varrho) = N,$$

onde per la (21):

$$\left| \iint_R \psi_h L_{\lambda_+}(\psi_h) dx dy \right| \leq N \cdot \left[\iint_R dx dy \iint_R \Gamma^2(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \right]^{1/2} < B,$$

dove B è indipendente da h . Ne segue allora per il lemma II che:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \iint_R \varphi_h L_{\lambda_+}(\varphi_h) dx dy = \lim_{h \rightarrow \infty} \iint_R (2b\varphi_h\varphi_{h'} + c\varphi_h^2) dx dy = 0,$$

il che è assurdo per essere φ_h funzione dell'aggregato Φ_1 .

Resta così dimostrato che λ_+ è autovalore per le (5), (6) e, siccome lo zero non è autovalore, ne segue $\lambda_+ > 0$. Detta u_+ l'autosoluzione corrispondente a λ_+ , sarà:

$$(au'_+ + \lambda_+ bu_+)' + \lambda_+(bu'_+ + cu_+) = 0,$$

e moltiplicando per u_+ e integrando in R :

$$(23) \quad \iint_R au_+'^2 dx dy = -\lambda_+ \iint_R (2bu_+u_+' + cu_+^2) dx dy,$$

dove l'integrale a secondo membro è negativo. Determinando il fattore costante e arbitrario che figura in u_+ in modo che questo integrale assuma il valore -1 , si vede come, essendo u_+ una funzione dell'aggregato Φ_1 e risultando per la (23): $D(u_+) = \lambda_+$, la u_+ è la funzione che dà il minimo di $D(\varphi)$ nel campo Φ_1 .

In modo perfettamente analogo si dimostra l'esistenza dell'autovalore negativo λ_- .

PARTE II.

Trattazione di un problema di calcolo delle variazioni per gli integrali doppi in forma non parametrica.

Posizione del problema. — Sia $f(x, y, z, t)$ una funzione di 4 variabili definita al variare di (x, y) nel dominio rettangolare $R \begin{pmatrix} x_1 \leq x \leq x_2 \\ y_1 \leq y \leq y_2 \end{pmatrix}$ del piano (x, y) , di z nell'intervallo $(-N, N)$ e di t in $(-\infty, \infty)$, dotata di derivate continue fino al 4° ordine. Diciamo Γ'_g la totalità delle funzioni $z(x, y)$ di classe Γ' , il cui diagramma cartesiano è interno al dominio Ω così definito: $x_1 \leq x \leq x_2$; $y_1 \leq y \leq y_2$; $-N < z < N$, soddisfacenti alla condizione di assumere sul contorno di R gli stessi valori di una funzione $g(x, y)$ prescritta di classe Γ' , il cui diagramma cartesiano sia interno a Ω . Detta $z'(x, y)$ la derivata totale di una funzione z di Γ'_g , la funzione $f(x, y, z(x, y), z'(x, y))$ al variare di (x, y) in R risulta limitata e continua e quindi à senso l'integrale:

$$F[z(x, y)] = \iint_R f(x, y, z(x, y), z'(x, y)) dx dy,$$

che risulta funzione di $z(x, y)$.

Scopo della presente trattazione è la ricerca del minimo di $F[z]$ in Γ'_g .

§ 1. - La condizione di Eulero. — Sia $z_0(x, y)$ una funzione di Γ'_g estremante (minimizzante) per $F[z]$ in Γ'_g . Diciamo intorno I_ϱ della z_0 la totalità delle funzioni di Γ'_g soddisfacenti la condizione: $|z(x, y) - z_0(x, y)| \leq \varrho$. Per ogni funzione di Γ'_g contenuta in un certo intorno I_ϱ della z_0 sarà: $F[z] \geq F[z_0]$. Sia $\eta(x, y)$ la più arbitraria funzione di classe Γ'_0 ; detto M il massimo modulo della $\eta(x, y)$ in R , al variare di ε nell'intervallo $(-\frac{\varrho}{M}, \frac{\varrho}{M})$ e di (x, y) in R , la funzione: $z(x, y, \varepsilon) = z_0(x, y) + \varepsilon \eta(x, y)$ è contenuta in I_ϱ e poichè è della totalità Γ'_g , risulterà: $F[z(x, y, \varepsilon)] \geq F[z_0(x, y)]$.

Poniamo: $F[z(x, y, \varepsilon)] = \varphi(\varepsilon)$, con che: $F[z_0(x, y)] = \varphi(0)$. La funzione $\varphi(\varepsilon)$ presenta nel punto $\varepsilon = 0$, interno al suo intervallo di definizione $(-\frac{\varrho}{M}, \frac{\varrho}{M})$, un punto di minimo, onde:

$$(24) \quad \left(\frac{d\varphi}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0,$$

$$(25) \quad \left(\frac{d^2\varphi}{d\varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=0} \geq 0.$$

Esprimiamo la condizione (24). Poichè è:

$$\left(\frac{d\varphi}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \iint_R [f_z(x, y, z_0(x, y), z_0'(x, y))\eta(x, y) + f_{z'}(x, y, z_0(x, y), z_0'(x, y))\eta'(x, y)] dx dy,$$

posto: $f_z(x, y, z_0, z_0') = \overset{\circ}{f}_z(x, y)$, $f_{z'}(x, y, z_0, z_0') = \overset{\circ}{f}_{z'}(x, y)$, la condizione (24) diviene:

$$(26) \quad \iint_{\bar{R}} [\overset{\circ}{f}_z(x, y)\eta(x, y) + \overset{\circ}{f}_{z'}(x, y)\eta'(x, y)] dx dy = 0.$$

La (26) è la condizione di Eulero che deve essere necessariamente soddisfatta da ogni funzione estremante $z_0(x, y)$ di Γ'_g .

Integrando per parti al modo di DU BOIS-REYMOND, dalla (26) si ha:

$$(27) \quad \iint_{\bar{R}} \eta'(x, y) \left[\overset{\circ}{f}_{z'}(x, y) + \int_{x_1}^x \int_{y_1}^y \overset{\circ}{f}_{z''}(t, v) dt dv \right] dx dy = 0.$$

Posto:

$$\psi(x, y) = \overset{\circ}{f}_{z'}(x, y) + \int_{x_1}^x \int_{y_1}^y \overset{\circ}{f}_{z''}(t, v) dt dv,$$

la (27) diviene:

$$\iint_{\bar{R}} \eta'(x, y) \psi(x, y) dx dy = 0,$$

che può scriversi:

$$(27') \quad \iint_{\bar{R}} \eta'(x, y) [\psi(x, y) - A(x) - B(y)] dx dy = 0,$$

poichè integrando per parti risulta:

$$\iint_{\bar{R}} \eta'(x, y) [A(x) + B(y)] dx dy = \iint_{\bar{R}} \eta(x, y) [A(x) + B(y)]' dx dy = 0.$$

Cerchiamo ora le 2 funzioni $A(x)$ e $B(y)$, non ancora precisate, affinché, con una $\eta(x, y)$ di Γ'_0 , risulti:

$$(28) \quad \eta'(x, y) = \psi(x, y) - A(x) - B(y).$$

Integrando la (28) fra x_1 e x e fra y_1 e y , si ottiene:

$$\eta(x, y) = \int_{x_1}^x \int_{y_1}^y \psi(t, u) dt du - \left\{ (y - y_1) \int_{x_1}^x A(t) dt + (x - x_1) \int_{y_1}^y B(u) du \right\}.$$

Perchè $\eta(x, y)$ sia nulla per $x = x_2$ e $y = y_2$ deve essere:

$$(29') \quad \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^y \psi(t, u) dt du - \left\{ (y - y_1) \int_{x_1}^{x_2} A(x) dx + (x_2 - x_1) \int_{y_1}^y B(u) du \right\} = 0$$

$$(29'') \quad \int_{x_1}^x \int_{y_1}^{y_2} \psi(t, u) dt du - \left\{ (y_2 - y_1) \int_{x_1}^x A(t) dt + (x - x_1) \int_{y_1}^{y_2} B(y) dy \right\} = 0.$$

Deriviamo la (29') rispetto a y e la (29'') rispetto a x , dividendo poi la prima per $(x_2 - x_1)$ e la seconda per $(y_2 - y_1)$; si perviene così al sistema di 2 equazioni integrali non omogenee nelle funzioni incognite $A(x)$ e $B(y)$:

$$(30) \quad \begin{cases} B(y) + \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} A(x) dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \psi(x, y) dx \\ A(x) + \frac{1}{y_2 - y_1} \int_{y_1}^{y_2} B(y) dy = \frac{1}{y_2 - y_1} \int_{y_1}^{y_2} \psi(x, y) dy, \end{cases}$$

che, posto:

$$a = -\frac{1}{y_2 - y_1} \int_{y_1}^{y_2} B(y) dy, \quad b = -\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} A(x) dx,$$

può scriversi:

$$(30') \quad \begin{cases} B(y) = b + \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \psi(x, y) dx \\ A(x) = a + \frac{1}{y_2 - y_1} \int_{y_1}^{y_2} \psi(x, y) dy. \end{cases}$$

Sostituendo il valore di $A(x)$ e $B(y)$ dato dalle (30') nella prima delle (30), si ottiene

$$a + b = -\frac{1}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \psi(x, y) dx dy;$$

ed alla stessa equazione si perviene sostituendo nella seconda delle (30) gli stessi valori di $A(x)$ e $B(y)$ dati dalle (30'). Tale equazione può dunque esser soddisfatta in infiniti modi, onde abbiamo così dimostrata l'esistenza delle funzioni $A(x)$ e $B(y)$.

Mediante tali funzioni la (27') diventa:

$$\iint_R [\psi(x, y) - A(x) - B(y)]^2 dx dy = 0,$$

da cui risulta: $\psi(x, y) = A(x) + B(y)$, cioè:

$$\overset{\circ}{f}_z(x, y) + \int_{x_1}^x \int_{y_1}^y \overset{\circ}{f}_z(t, v) dt dv = A(x) + B(y),$$

dal che si deduce che $\overset{\circ}{f}_z(x, y)$ risulta dotata di derivata totale, il cui valore è $\overset{\circ}{f}_z(x, y)$. Si ha dunque il teorema: *Se la funzione $z = z_0(x, y)$ della totalità Γ'_g fornisce un estremo per il funzionale $F[z]$, essa è tale che la funzione $f_z(x, y, z_0, z_0')$ riesce dotata di derivata totale, risultando:*

$$(31) \quad [f_z(x, y, z_0(x, y), z_0'(x, y))] + f_z(x, y, z_0(x, y), z_0'(x, y)) = 0.$$

L'equazione differenziale (31) sarà per noi l'equazione differenziale di Eulero del problema proposto.

Se si suppone z_0 di classe Γ_g'' , l'equazione alle derivate totali (31) si può scrivere sotto forma di equazione alle derivate parziali come segue:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f_{z'}(x, y, z_0(x, y), z_0'(x, y)) + f_z(x, y, z_0(x, y), z_0'(x, y)) = 0,$$

dove $z_0'(x, y) = \frac{\partial^2 z_0}{\partial x \partial y}$.

§ 2. - La condizione di Legendre. — Riprendiamo la (25) a pag. 10. Si è visto che l'estremante $z_0(x, y)$ deve soddisfare la (25) la quale, con evidenti notazioni, può scriversi:

$$(25') \iint_R [\overset{\circ}{f}_{zz}(x, y)\eta^2(x, y) + 2\overset{\circ}{f}_{z'z'}(x, y)\eta(x, y)\eta'(x, y) + \overset{\circ}{f}_{z'z'}(x, y)\eta'^2(x, y)] dx dy \geq 0.$$

Ogni estremante $z_0(x, y)$ di Γ_g' deve soddisfare la (25'), che diremo la condizione di Jacobi. Dimostriamo ora che: Se $z_0(x, y)$ è una funzione di Γ_g' minimizzante per $F[z]$ nel campo Γ_g' , deve essere in R :

$$(32) \quad f_{z'z'}(x, y, z_0(x, y), z_0'(x, y)) \geq 0,$$

(condizione di Legendre). Posto:

$$\overset{\circ}{f}_{z'z'}(x, y) = a(x, y); \quad \overset{\circ}{f}_{zz}(x, y) = b(x, y); \quad \overset{\circ}{f}_{zz}(x, y) = c(x, y),$$

supponiamo che al variare di (x, y) nel dominio rettangolare $R_1 \left(\begin{smallmatrix} \xi_1 \leq x \leq \xi_2 \\ \eta_1 \leq y \leq \eta_2 \end{smallmatrix} \right)$ contenuto in R , risulti: $a(x, y) < -p < 0$, dove p è una quantità positiva. Poniamo

$$\eta(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{per } (x, y) \text{ esterno a } R_1. \\ \text{sen}^2 \frac{n\pi(x - \xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} \text{sen}^2 \frac{n\pi(y - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} & \text{per } (x, y) \text{ interno a } R_1 \text{ o su } FR_1. \end{cases}$$

La $\eta(x, y)$ così definita è della totalità Γ_0' . Risulta poi:

$$\eta'(x, y) = \frac{4\pi^2 n^2}{(\xi_2 - \xi_1)(\eta_2 - \eta_1)} \text{sen} \frac{n\pi(x - \xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} \text{sen} \frac{n\pi(y - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} \cos \frac{n\pi(x - \xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} \cos \frac{n\pi(y - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1}.$$

Posto: $\alpha(x) = \frac{n\pi(x - \xi_1)}{\xi_2 - \xi_1}$, $\beta(y) = \frac{n\pi(y - \eta_1)}{\eta_2 - \eta_1}$, la (25') diviene:

$$(33) \iint_R [a\eta'^2 + 2b\eta\eta' + c\eta^2] dx dy = \\ = \iint_{R_1} \left[a \frac{16\pi^4 n^4}{(\xi_2 - \xi_1)^2 (\eta_2 - \eta_1)^2} \text{sen}^2 a(x) \text{sen}^2 \beta(y) \cos^2 a(x) \cos^2 \beta(y) + \right. \\ \left. + 2b \frac{4\pi^2 n^2}{(\xi_2 - \xi_1)(\eta_2 - \eta_1)} \text{sen}^3 a(x) \text{sen}^3 \beta(y) \cos a(x) \cos \beta(y) + \right. \\ \left. + c \text{sen}^4 a(x) \text{sen}^4 \beta(y) \right] dx dy \geq 0$$

e maggiorando $a(x, y)$ con $-p$, $b(x, y)$ col suo massimo modulo B in R_1 , $c(x, y)$ col suo massimo modulo C in R_1 , si vede che il primo membro della (25') non supera:

$$-p \frac{\pi^4 n^4}{4(\xi_2 - \xi_1)(\eta_2 - \eta_1)} + 2B4\pi^2 n^2 + C(\xi_2 - \xi_1)(\eta_2 - \eta_1)$$

per qualunque valore di n . E poichè tale quantità è certo negativa per valori di n sufficientemente grandi, ne segue l'asserto.

Diremo che la condizione di LEGENDRE è soddisfatta *in senso stretto*, se in tutto R risulta: $\overset{\circ}{f}'_{z'z}(x, y) > 0$. Nella trattazione seguente supporremo la condizione di LEGENDRE sempre soddisfatta in senso stretto.

§ 3. - **La condizione di Jacobi.** — Abbiamo visto nel paragrafo 2 che condizione necessaria affinché z_0 fornisca il minimo di $F[z]$ nella totalità Γ'_g è che sia:

$$(25') \quad G[\eta] = \iint_{\bar{R}} [\overset{\circ}{f}'_{z'z}\eta'^2 + 2\overset{\circ}{f}'_{z'z'}\eta\eta' + \overset{\circ}{f}'_{zz}\eta^2] dx dy \geq 0.$$

qualunque sia $\eta(x, y)$ della totalità Γ'_0 ; bisogna cioè che il minimo del funzionale $G(\eta)$ nella totalità Γ'_0 sia lo zero.

Cominciamo a vedere la condizione necessaria e sufficiente perchè sia verificata la (25') nella ipotesi che la $\eta(x, y)$ appartenga all'aggregato Γ_0'' .

La funzione $\eta(x, y)$ minimizzante per $G[\eta]$ dovrà soddisfare l'equazione di EULERO relativa al funzionale $G[\eta]$, cioè la:

$$(34) \quad [a(x, y)\eta'(x, y) + b(x, y)\eta(x, y)]' + b(x, y)\eta'(x, y) + c(x, y)\eta(x, y) = 0.$$

La (34) è l'equazione di Jacobi relativa al funzionale $F[z]$; essa è ovviamente soddisfatta dalla $\eta(x, y) \equiv 0$. I coefficienti di tale equazione verificano la condizione di appartenere alla classe Γ'' se la estrema z_0 appartiene alla classe Γ'' e, ponendoci in tale ipotesi, ci proponiamo di *vedere sotto quali condizioni la $\eta(x, y) \equiv 0$ dà realmente il minimo di $G[\eta]$* . A tale scopo consideriamo l'equazione differenziale:

$$(5) \quad (au' + \lambda bu)' + \lambda(bu' + cu) = 0,$$

dove λ è un parametro e $u(x, y)$ una generica $\eta(x, y)$. Nel paragrafo 2 della parte I^a abbiamo determinato un autovalore positivo λ_+ (esistente se la totalità Φ_1 non è vuota) ed uno negativo λ_- (esistente se la totalità Φ_2 non è vuota) cui corrispondono due autosoluzioni della (5) appartenenti alla totalità Γ_0'' . Orbene: *Ogniquale volta è soddisfatta in senso stretto la condizione di Legendre condizione necessaria e sufficiente perchè sia soddisfatta la condizione di Jacobi per $\eta(x, y)$ in Γ_0'' è che la totalità Φ_- delle funzioni di Γ_0'' che rendono negativo $H(\varphi)$ sia vuota o che risulti $\lambda_+ \geq 1$* . È evidente che se la Φ_- è vuota la condizione di JACOBI è ampiamente soddisfatta.

Consideriamo dunque il caso di Φ_- non vuota. A questa totalità appartiene la u_+ corrispondente al valore λ_+ del parametro λ . Pertanto, se fosse $\lambda_+ < 1$, ne dedurremo:

$$\lambda_+ \iint_{\bar{R}} (2bu_+u'_+ + cu_+^2) dx dy > \iint_{\bar{R}} (2bu_+u'_+ + cu_+^2) dx dy$$

e quindi per la (23):

$$\iint_{\bar{R}} (au_+^2 + 2bu_+u'_+ + cu_+^2) dx dy < 0,$$

cioè la (25') non sarebbe verificata per qualunque η di Γ_0'' . Resta così dimostrata la necessità della condizione $\lambda_+ \geq 1$. Dimostriamone la sufficienza. Consideriamo la totalità delle funzioni $u(x, y)$ di Φ_- ; le funzioni:

$$u : \left\{ - \iint_{\bar{R}} (2buu' + cu^2) dx dy \right\}^{1/2}$$

appartengono alla totalità Φ_+ , onde, essendo λ_+ il minimo di $D(\varphi)$ in Φ_+ , risulterà:

$$(35') \quad \iint_{\bar{R}} \frac{au'^2}{-\iint_{\bar{R}} (2buu' + cu^2) dx dy} dx dy \geq \lambda_+$$

onde:

$$(35'') \quad \iint_{\bar{R}} au'^2 dx dy \geq -\lambda_+ \iint_{\bar{R}} (2buu' + cu^2) dx dy.$$

Ma $\lambda_+ \geq 1$; quindi:

$$\iint_{\bar{R}} (au'^2 + 2buu' + cu^2) dx dy \geq 0 \quad \text{c. v. d.}$$

Ma se osserviamo che ogni funzione $\eta(x, y)$ di classe Γ_0' può essere approssimata in R per polinomi della stessa classe, verificanti sul contorno di R le stesse condizioni di η , in maniera che le derivate prime parziali e totale convergono verso le omonime della η (*), possiamo ritenere dimostrato il seguente teorema: *Ogni-*

(*) Ed invero detto $P_n(x, y)$ un polinomio che al divergere di n approssimi puntualmente ed uniformemente in R la $u'(x, y)$, si ha che, come è facile verificare, il polinomio:

$$Q_n(x, y) = \int_{x_1}^x \int_{y_1}^y P_n(s, t) ds dt - \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \int_{x_1}^x \int_{y_1}^{y_2} P_n(s, t) ds dt - \\ - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^y P_n(s, t) ds dt + \frac{(x - x_1)(y - y_1)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} P_n(s, t) ds dt$$

soddisfa le condizioni volute.

qualvolta è soddisfatta in senso stretto la condizione di Legendre, condizione necessaria e sufficiente affinché per un'estremale di classe Γ_g'' sia soddisfatta la condizione di Jacobi è che la totalità Φ_- sia vuota o che risulti $\lambda_+ \geq 1$. Diremo che la condizione di JACOBI è soddisfatta in senso stretto ogniqualevolta $\lambda_+ > 1$.

§ 4. - Il minimo debole.

TEOREMA. - Se $z_0(x, y)$ è un'estremale di classe Γ_g'' , soddisfacente in senso stretto la condizione di Legendre ($a(x, y) > 0$ in R) e la condizione di Jacobi, z_0 fornisce il minimo debole di $F[z]$ nella totalità Γ_g' .

Sia I_δ un intorno di z_0 e δ' un numero tali che per (x, y, z, z') varianti nel dominio limitato: $x_1 \leq x \leq x_2$; $y_1 \leq y \leq y_2$; $|z - z_0| \leq \delta$; $|z' - z_0'| \leq \delta'$ le derivate terze della $f(x, y, z, z')$ rispetto a z e z' siano maggiorate in modulo da un numero A . Dimosteremo che si possono trovare due numeri ϱ e ϱ' , minori rispettivamente di δ e δ' tali che appena: $|z - z_0| < \varrho$ e $|z' - z_0'| < \varrho'$, risulta: $F[z] \geq F[z_0]$, cioè: $\Delta F \geq 0$. Poniamo: $z(x, y) = z_0(x, y) + \eta(x, y)$, dove $\eta(x, y)$ è una generica funzione di I_0' . Per le funzioni z dell'intorno ora definito sarà: $|\eta(x, y)| < \varrho$ e $|\eta'(x, y)| < \varrho'$. Osserviamo ora che:

$$f(x, y, z_0 + \eta, z_0' + \eta') - f(x, y, z_0, z_0') = (\overset{\circ}{f}_z \eta + \overset{\circ}{f}_{z'} \eta') + \\ + \frac{1}{2} (\overset{\circ}{f}_{zz} \eta^2 + 2\overset{\circ}{f}_{zz'} \eta \eta' + \overset{\circ}{f}_{z'z'} \eta'^2) + \frac{1}{3!} (\overset{\circ}{f}_{zzz} \eta^3 + 3\overset{\circ}{f}_{zzz'} \eta^2 \eta' + 3\overset{\circ}{f}_{zz'z'} \eta \eta'^2 + \overset{\circ}{f}_{z'z'z'} \eta'^3),$$

dove le derivate soprasssegnate della f sono calcolate in punti del tipo:

$$(x, y, z_0 + \theta \eta, z_0' + \theta \eta'),$$

dove: $0 \leq \theta \leq 1$, e le $\overset{\circ}{f}_z, \overset{\circ}{f}_{z'}$, ecc. sono le $f_z, f_{z'}$, ecc. calcolate per $z = z_0$ e $z' = z_0'$. Integrando in R la precedente uguaglianza ed osservando che l'integrale della prima parentesi a secondo membro è nullo per la condizione di EULERO, si ha:

$$\Delta F = \iint_R (a\eta'^2 + 2b\eta\eta' + c\eta^2) dx dy + \\ + \frac{1}{3!} \iint_R (\overset{\circ}{f}_{zzz} \eta^3 + 3\overset{\circ}{f}_{zzz'} \eta^2 \eta' + 3\overset{\circ}{f}_{zz'z'} \eta \eta'^2 + \overset{\circ}{f}_{z'z'z'} \eta'^3) dx dy;$$

e ponendo

$$(36) \quad Q = \frac{A}{3!} \iint_R (|\eta^3| + 3\eta^2 |\eta'| + 3|\eta| \eta'^2 + |\eta'^3|) dx dy$$

si ha in definitiva:

$$(37) \quad \Delta F \geq \iint_R a\eta'^2 dx dy + \iint_R (2b\eta\eta' + c\eta^2) dx dy - Q.$$

Distinguiamo due casi. Il secondo integrale a secondo membro della (37) sia positivo: sarà allora a maggior ragione:

$$(37') \quad \Delta F \geq \iint_R a\eta'^2 dx dy - Q.$$

Il detto integrale sia negativo; allora per la condizione di JACOBI, essendo (vedi (35'') a pag. 15):

$$\iint_R (2b\eta\eta' + c\eta^2) dx dy \geq -\frac{1}{\lambda_+} \iint_R a\eta'^2 dx dy,$$

risulta

$$(37'') \quad \Delta F \geq \frac{\lambda_+ - 1}{\lambda_+} \iint_R a\eta'^2 dx dy - Q.$$

Posto allora:

$$P = \begin{cases} 1 \dots & \text{per } H(\eta) > 0 \\ \frac{\lambda_+ - 1}{\lambda_+} \dots & \text{per } H(\eta) < 0, \end{cases}$$

risulta:

$$(38) \quad \Delta F \geq P \iint_R a\eta'^2 dx dy - Q.$$

Tenendo presenti le (38), (36) si ottiene così:

$$\Delta F \geq P \iint_R a\eta'^2 dx dy - \frac{A}{3!} \left[\varrho \iint_R \eta^2 dx dy + 3\varrho \iint_R |\eta\eta'| dx dy + 3\varrho \iint_R \eta'^2 dx dy + \varrho' \iint_R \eta'^2 dx dy \right].$$

Detto m il minimo positivo di $a(x, y)$ in R , ricordando le formule di maggiorazione del § 1-3, si ha in definitiva:

$$\Delta F \geq \left[Pm - (k_0 + 3k_1 + 3) \frac{A}{3!} \varrho - \frac{A}{3!} \varrho' \right] \iint_R \eta'^2 dx dy.$$

Scegliendo convenientemente piccoli ϱ e ϱ' , essendo $P > 0$ per la condizione di JACOBI, si può rendere non negativo il termine in parentesi e quindi ΔF . c. v. d.

§ 5. - Ampliamento del campo funzionale in cui una estremante fornisce il minimo di $F[z]$.

TEOREMA. - Se $z_0(x, y)$ è una estremante relativa di $F[z]$ nella totalità Γ'_g , lo è anche nella totalità Γ_g^* delle funzioni continue in R , assumenti sul contorno di R i valori della funzione $g(x, y)$ prescritta della totalità Γ' , tali che il dominio R possa essere diviso in domini rettangolari parziali in ciascuno dei quali le funzioni riescono dotate di derivata totale continua.

In ogni intorno I_ϱ di $z_0(x, y)$ le funzioni di Γ'_g sono tali che: $F[z] \geq F[z_0]$. Fissato $\sigma < \varrho$, dico che per ogni $z(x, y)$ di Γ_g^* interna a I_σ è anche:

$$(39) \quad F[z] \geq F[z_0].$$

Ciò sarà dimostrato se si può trovare una successione di funzioni $z_n(x, y)$ di Γ'_g , interne a I_ϱ , tali che: $\lim_{n \rightarrow \infty} F[z_n] = F[z]$, poichè, essendo: $F[z_n] \geq F[z_0]$, al limite per $n \rightarrow \infty$ varrà la (39).

Per costruire la successione $z_n(x, y)$ detto S_i il segmento, proiezione sul piano (x, y) della curva della superficie $z = z(x, y)$ lungo la quale $z'(x, y)$ è discontinua (detti segmenti sono in numero finito: siano m), consideriamo un intorno I_i di S_i tale che la sua area risulti inferiore o uguale a $\frac{1}{n}$. Definiamo la funzione

$$\varphi_n(x, y) \begin{cases} = z'(x, y) & \text{per tutti i punti di } R \text{ esterni agli } I_i \\ = l(x, y) & \text{per tutti i punti di } R \text{ interni agli } I_i \text{ o su } FI_i, \end{cases}$$

essendo $l(x, y)$ una generica funzione continua che assume il valore $z'(x, y)$ su FI_i e tale che sia: $|\varphi_n(x, y)| \leq M$, essendo M un numero finito non superato dal massimo modulo di $z'(x, y)$ in R . Risulta allora:

$$(40) \quad \iint_R [\varphi_n(x, y) - z'(x, y)]^2 dx dy \leq \sum_1^m \frac{(2M)^2}{n} = \frac{4M^2 m}{n}.$$

La (40) dimostra come le φ_n convergono in media verso le z' in R .

Posto:

$$\begin{aligned} z_n(x, y) = & -f(x_1, y_1) + f(x_1, y) + f(x, y_1) + \int_{x_1 y_1}^x \int_{y_1}^y \varphi_n(s, t) ds dt + \\ & + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \left[f(x, y_2) - f(x_1, y_2) - f(x, y_1) + f(x_1, y_1) - \int_{x_1 y_1}^x \int_{y_1}^{y_2} \varphi_n(s, t) ds dt \right] + \\ & + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \left[f(x_2, y) - f(x_2, y_1) - f(x_1, y) + f(x_1, y_1) - \int_{x_1 y_1}^{x_2 y_2} \varphi_n(s, t) ds dt \right] - \\ & - \frac{(x - x_1)(y - y_1)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} \left[f(x_2, y_2) - f(x_2, y_1) - f(x_1, y_2) + f(x_1, y_1) - \int_{x_1 y_1}^{x_2 y_2} \varphi_n(s, t) ds dt \right], \end{aligned}$$

risulta: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n(x, y) = z(x, y)$ e le z_n sono funzioni della totalità Γ'_g . Inoltre esse risultano interne a I_ϱ per n sufficientemente grande, poichè tendendo z_n a z al divergere di n , da un certo n in poi sarà: $|z_n(x, y) - z(x, y)| \leq \varrho - \sigma$, onde:

$$|z_n(x, y) - z_0(x, y)| = |z_n - z + z - z_0| \leq |z_n - z| + |z - z_0| \leq \varrho - \sigma + \sigma = \varrho.$$

Ci basta ora dimostrare che: $\lim_{n \rightarrow \infty} F[z_n] = F[z]$. Poichè $z'_n(x, y)$ al variare di (x, y) in R e di n fra zero e $+\infty$ assume valori limitati, diciamo N il massimo mo-

dulo di z_n' e di z' in R . Sia inoltre K il massimo modulo di $f_z(x, y, z, z')$ e di $f_{z'}(x, y, z, z')$ al variare di (x, y) in R , di z in I_ϱ e di z' in $(-N, N)$. Risulta allora :

$$|F[z_n] - F[z]| \leq \iint_R |f(x, y, z_n, z_n') - f(x, y, z, z')| dx dy \leq K \iint_R \{|z_n - z| + |z_n' - z_n|\} dx dy,$$

onde, per la tendenza al limite di z_n e per la convergenza in media delle z_n' alla z' , resta dimostrato l'asserto.

§ 6. - La condizione di Weierstrass. — Abbiamo visto nei paragrafi precedenti come le condizioni di EULERO, LEGENDRE e JACOBI siano sufficienti ad assicurare il minimo debole. Una ulteriore condizione necessaria per il minimo forte è data dal seguente teorema :

Condizione necessaria affinché $z_0(x, y)$, supposta di classe Γ_g'' , dia il minimo relativo di $F[z]$ nella totalità Γ_g' è che risulti per ogni (x, y) di R e per qualunque β :

$$f(x, y, z_0(x, y), z_0'(x, y) + \beta) - f(x, y, z_0(x, y), z_0'(x, y)) - \beta f_{z'}(x, y, z_0(x, y), z_0'(x, y)) \geq 0$$

(condizione di Weierstrass).

Trasportiamo l'origine degli assi coordinati nel punto (x, y) presa in considerazione e scelti ε e l tali che: $0 < \varepsilon^3 < \varepsilon < l$, e che i punti $(l, 0)$; (l, ε) ; $(0, \varepsilon)$ risultino interni a R , costruiamo i rettangoli :

$$\begin{aligned} R_\varepsilon \text{ di vertici: } & (0, 0); & (0, \varepsilon^3); & (\varepsilon, \varepsilon^3); & (\varepsilon, 0), \\ R_\varepsilon' \text{ di vertici: } & (0, 0); & (0, \varepsilon); & (l, \varepsilon); & (l, 0). \end{aligned}$$

R_ε risulta interno a R_ε' ed ambedue interni a R . Poniamo: $D = R_\varepsilon' - R_\varepsilon$ e scomponiamo D nei tre rettangoli :

$$\begin{aligned} R_1 \text{ di vertici: } & (0, \varepsilon^3); & (0, \varepsilon); & (\varepsilon, \varepsilon); & (\varepsilon, \varepsilon^3), \\ R_2 \text{ di vertici: } & (\varepsilon, \varepsilon^3); & (\varepsilon, \varepsilon); & (l, \varepsilon); & (l, \varepsilon^3), \\ R_3 \text{ di vertici: } & (\varepsilon, 0); & (\varepsilon, \varepsilon^3); & (l, \varepsilon^3); & (l, 0). \end{aligned}$$

Diciamo $z_0(x, y)$ la funzione minimizzante $F[z]$ nella totalità Γ_g' ; per il teorema del paragrafo precedente z_0 è minimizzante per $F[z]$ anche nella totalità Γ_g^* ivi definita. Si definisca ora in R la funzione :

$$(41) \quad z(x, y, \varepsilon) \begin{cases} = z_0(x, y) \dots & \text{in } R - R_\varepsilon', \\ = z_0(x, y) + \beta xy \dots & \text{in } R_\varepsilon, \\ = z_0(x, y) + \eta(x, y, \varepsilon) \dots & \text{in } D, \end{cases}$$

dove β è una costante e $\eta(x, y, \varepsilon)$ è una funzione di classe Γ^* soddisfacente le seguenti condizioni:

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{in } R_1 \dots \quad |\eta(x, y, \varepsilon)| < K\varepsilon^2, \quad |\eta'(x, y, \varepsilon)| < K\varepsilon^2 \\ \text{in } R_2 \dots \quad |\eta(x, y, \varepsilon)| < K\varepsilon^2, \quad |\eta'(x, y, \varepsilon)| < K\varepsilon^2 \\ \text{in } R_3 \dots \quad |\eta(x, y, \varepsilon)| < K\varepsilon, \quad |\eta'(x, y, \varepsilon)| < K\varepsilon \end{array} \right\} \text{ per } \varepsilon < \frac{1}{2},$$

(dove K è una quantità positiva che dipende da β , ma non da ε) e soddisfacente inoltre le seguenti condizioni al contorno:

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta(x, 0, \varepsilon) = \eta(0, x, \varepsilon) = \eta(l, y, \varepsilon) = \eta(x, \varepsilon, \varepsilon) = 0, \\ \eta(x, \varepsilon^3, \varepsilon) = \beta x \varepsilon^3 \dots \quad \text{per } 0 \leq x \leq \varepsilon, \\ \eta(\varepsilon, y, \varepsilon) = \beta \varepsilon y \dots \quad \text{per } 0 \leq y \leq \varepsilon^3. \end{array} \right.$$

La $z(x, y, \varepsilon)$ definita dalle (41), (42), (43) risulta di classe Γ_g^* . La $\eta(x, y, \varepsilon)$ soddisfacente le (42), (43) può essere specificata per esempio come segue:

$$\begin{aligned} \text{in } R_1 \dots \quad \eta(x, y, \varepsilon) &= -\frac{\beta \varepsilon^3}{\varepsilon - \varepsilon^3} x(y - \varepsilon^3) + \beta \varepsilon^3 x \\ \text{in } R_2 \dots \quad \eta(x, y, \varepsilon) &= -\frac{\beta \varepsilon^4}{\varepsilon - \varepsilon^3} (y - \varepsilon^3) + \frac{\beta \varepsilon^4}{(l - \varepsilon)(\varepsilon - \varepsilon^3)} (x - \varepsilon)(y - \varepsilon^3) + \beta \varepsilon^4 - \frac{\beta \varepsilon^4}{l - \varepsilon} (x - \varepsilon) \\ \text{in } R_3 \dots \quad \eta(x, y, \varepsilon) &= -\frac{\beta \varepsilon}{l - \varepsilon} y(x - \varepsilon) + \beta \varepsilon y. \end{aligned}$$

Poichè al tendere di ε a zero $z(x, y, \varepsilon)$ tende a $z_0(x, y)$ e $z'(x, y, \varepsilon)$ tende a $z'_0(x, y)$, in un intorno conveniente di z_0 , cioè per un ε convenientemente prossimo a zero, sarà:

$$(44) \quad F[z(x, y, \varepsilon)] \geq F[z_0(x, y)].$$

Dimostriamo che per $\varepsilon \rightarrow 0$ è determinato il limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F[z(x, y, \varepsilon)] - F[z_0(x, y)]}{\varepsilon^4},$$

il quale risulta non negativo. Si ha:

$$\begin{aligned} F[z(x, y, \varepsilon)] - F[z_0(x, y)] &= \int_0^\varepsilon \int_0^{\varepsilon^3} [f(x, y, z_0 + \beta xy, z'_0 + \beta) - f(x, y, z_0, z'_0)] dx dy + \\ &\quad + \iint_D [f(x, y, z_0 + \eta, z'_0 + \eta') - f(x, y, z_0, z'_0)] dx dy. \end{aligned}$$

Ma applicando il teorema della media:

$$(45) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^4} \int_0^\varepsilon \int_0^{\varepsilon^3} [f(x, y, z_0 + \beta xy, z'_0 + \beta) - f(x, y, z_0, z'_0)] dx dy = \\ = f(0, 0, \overset{\circ}{z}_0, \overset{\circ}{z}'_0 + \beta) - f(0, 0, \overset{\circ}{z}_0, \overset{\circ}{z}'_0),$$

dove con $\overset{\circ}{z}_0, \overset{\circ}{z}'_0$ si sono indicati i valori assunti da z_0, z'_0 nel punto $(0, 0)$.

Indicate con $\bar{f}_{zz}, \bar{f}_{zz'}, \bar{f}_{z'z'}$ le derivate seconde parziali della f rispetto a z e z' calcolate in punti del tipo: $(x, y, z_0(x, y) + \theta\eta(x, y), z_0'(x, y) + \theta\eta'(x, y))$, dove: $0 \leq \theta \leq 1$, risulta:

$$(46) \quad \frac{1}{\varepsilon^4} \iint_D [f(x, y, z_0 + \eta, z_0' + \eta') - f(x, y, z_0, z_0')] dx dy = \\ = \frac{1}{\varepsilon^4} \iint_D [\bar{f}_{zz}(x, y)\eta(x, y) + \bar{f}_{z'z'}(x, y)\eta'(x, y)] dx dy + \\ + \frac{1}{2\varepsilon^4} \iint_D [\bar{f}_{zz}\eta^2(x, y) + 2\bar{f}_{zz'}\eta(x, y)\eta'(x, y) + \bar{f}_{z'z'}\eta'^2(x, y)] dx dy.$$

Detto N' il massimo modulo di $f_{zz}, f_{zz'}, f_{z'z'}$ in D tenendo presenti le (43), l'ultimo integrale di (46) può venir maggiorato come segue:

$$\frac{1}{2\varepsilon^4} \iint_D [\bar{f}_{zz}\eta^2 + 2\bar{f}_{zz'}\eta\eta' + \bar{f}_{z'z'}\eta'^2] dx dy \leq \frac{N'}{2\varepsilon^4} \iint_{R_1} [\eta^2 + 2\eta\eta' + \eta'^2] dx dy + \\ + \frac{N'}{2\varepsilon^4} \iint_{R_2} [\eta^2 + 2\eta\eta' + \eta'^2] dx dy + \frac{N'}{2\varepsilon^4} \iint_{R_3} [\eta^2 + 2\eta\eta' + \eta'^2] dx dy \leq \\ \leq \frac{N'}{2\varepsilon^4} 4K^2\varepsilon^4 \int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon dx dy + \frac{N'}{2\varepsilon^4} 4K^2\varepsilon^4 \int_0^l \int_0^\varepsilon dx dy + \\ + \frac{N'}{2\varepsilon^4} 4K^2\varepsilon^2 \int_0^l \int_0^{\varepsilon^3} dx dy = 2N'K^2(\varepsilon^2 + 2l\varepsilon),$$

onde passando al limite:

$$(47) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon^4} \iint_D [\bar{f}_{zz}\eta^2 + 2\bar{f}_{zz'}\eta\eta' + \bar{f}_{z'z'}\eta'^2] dx dy = 0.$$

Per calcolare il contributo al limite del primo integrale a secondo membro di (46) operiamo una integrazione per parti, assumendo come verso di integrazione quello antiorario:

$$(48) \quad \iint_D \bar{f}_{z'}(x, y)\eta'(x, y) dx dy = - \int_{FD} \bar{f}_{z'}(x, y)\eta_x(x, y) dx - \iint_D (\bar{f}_{z'}(x, y))_y \eta_x(x, y) dx dy.$$

Integriamo ancora per parti l'ultimo integrale a secondo membro della (48):

$$(49) \quad - \iint_D (\bar{f}_{z'}(x, y))_y \eta_x(x, y) dx dy = - \\ - \int_{FD} (\bar{f}_{z'}(x, y))_y \eta(x, y) dx + \iint_D \eta(x, y) \bar{f}'_{z'}(x, y) dx dy.$$

Mediante le (48), (49) il primo integrale a secondo membro di (46) diviene:

$$(50) \quad \iint_D \eta(x, y) [\bar{f}_z(x, y) + \bar{f}'_{z'}(x, y)] dx dy - \\ - \int_{FD} (\bar{f}_{z'}(x, y))_y \eta(x, y) dy - \int_{FD} \bar{f}_{z'}(x, y)\eta_x(x, y) dx.$$

Il primo integrale di (50) è nullo per la condizione di EULERO. Calcoliamo il valore del secondo:

$$-\int_{\tilde{F}D} (\hat{f}_{z'}(x, y))_y \eta(x, y) dy = -\int_0^{\varepsilon^3} (\hat{f}_{z'}(x, y))_y \beta \varepsilon y dy,$$

onde, applicando il teorema del valor medio e passando al limite:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{\varepsilon^4} \int_{\tilde{F}D} (\hat{f}_{z'}(x, y))_y \eta(x, y) dy = 0.$$

Calcoliamo il valore del terzo integrale di (50):

$$-\int_{\tilde{F}D} \hat{f}_{z'}(x, y) \eta_x(x, y) dx = -\int_0^{\varepsilon} \hat{f}_{z'}(x, \varepsilon^3) \beta \varepsilon^3 dx,$$

onde:

$$(51) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{\varepsilon^4} \int_0^{\varepsilon} \hat{f}_{z'}(x, \varepsilon^3) \beta \varepsilon^3 dx = -\beta \hat{f}_{z'}(0, 0).$$

Mediante le (45), (51) si può dunque scrivere:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F[z] - F[z_0]}{\varepsilon^4} = f(0, 0, \hat{z}_0, \hat{z}_0' + \beta) - f(0, 0, \hat{z}_0, \hat{z}_0') - \beta f_{z'}(0, 0, \hat{z}_0, \hat{z}_0'),$$

onde per la (44):

$$f(0, 0, \hat{z}_0, \hat{z}_0' + \beta) - f(0, 0, \hat{z}_0, \hat{z}_0') - \beta f_{z'}(0, 0, \hat{z}_0, \hat{z}_0') \geq 0$$

e, poichè il punto (0, 0) non è che il generico punto (x, y) nel quale si è trasportata per comodità di calcolo l'origine delle coordinate, resta dimostrato l'asserto.