

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

LAMBERTO CESARI

## **Sulle serie di Fourier delle funzioni lipschitziane di più variabili**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série, tome 7, n° 3-4 (1938), p. 279-295*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1938\\_2\\_7\\_3-4\\_279\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1938_2_7_3-4_279_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1938, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SULLE SERIE DI FOURIER DELLE FUNZIONI LIPSCHITZIANE DI PIÙ VARIABILI (1)

di LAMBERTO CESARI (Roma).

Si dice che la funzione  $f(x)$  è Lip  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  (2) nell'intervallo  $(a, b)$  se essa è definita in  $(a, b)$  e se esiste una costante  $K$  tale che, per tutti i punti  $x, x'$  interni ad  $(a, b)$ , sia

$$(1) \quad |f(x) - f(x')| < K|x - x'|^\alpha.$$

Si dice che la funzione  $f(x, y)$  è Lip  $\alpha$  (3),  $0 < \alpha \leq 1$ , nel rettangolo  $(a, b; c, d)$  se essa è definita in  $(a, b; c, d)$  e se esiste una costante  $K$  tale che, per tutti i punti  $(x, y), (x', y')$  interni ad  $(a, b; c, d)$  sia

$$(2) \quad |f(x, y) - f(x', y')| < K\{|x - x'|^\alpha + |y - y'|^\alpha\}.$$

Per le serie di FOURIER di una funzione  $f(x)$  periodica di periodo  $2\pi$ , Lip  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , in  $(0, 2\pi)$  sono note numerosissime proprietà relative alla loro convergenza nonché alla convergenza delle relative serie coniugate (4). L'estensione di tali proprietà alle serie di FOURIER delle funzioni di due o più variabili, periodiche di periodo  $2\pi$  rispetto a tutte le loro variabili e che sono Lip  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , nel rettangolo fondamentale  $(0, 0, \dots; 2\pi, 2\pi, \dots)$ , presenta qualche difficoltà.

Poichè in un successivo lavoro avremo bisogno di far uso sistematico di tali proprietà per le funzioni Lip  $\alpha$  di due o più variabili, desideriamo in questa memoria richiamare i risultati già noti, completandoli in varie direzioni e talvolta

---

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Per  $\alpha = 1$  tali funzioni si dicono *lipschitziane*, per  $0 < \alpha < 1$  *hölderiane* o anche *lipschitziane* in senso generalizzato. Il numero  $K$  si chiama *coefficiente* di HÖLDER (LIPSCHITZ), il numero  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , *esponente* di HÖLDER. Per la notazione adottata vedi A. ZYGMUND: *Trigonometrical Series*. Monografie Matematyczne (1935), Varsavia.

(3) Per la definizione si veda ad esempio L. TONELLI: *Serie trigonometriche*. Bologna, Zanichelli (1928), p. 443, n.º 163, osservazione.

(4) Si veda ad esempio L. TONELLI, loc. cit. in (3), cap. V, § 5, § 6 e A. ZYGMUND, loc. cit. in (2), cap. III, VII.

in modo essenziale, e dimostrando ex-novo quelle proprietà per le quali l'estensione non sembra ancora stata fatta. In particolare noi diamo una forma più semplice ad un teorema del prof. TONELLI relativo alla convergenza delle serie doppie di FOURIER delle funzioni Lip  $\alpha$  ed estendiamo l'importante teorema di PRIVALOFF che afferma che la funzione coniugata di una funzione  $f(x)$ , Lip  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , è ancora Lip  $\alpha$ .

Diamo infine alcune maggiorazioni relative alle medie  $(C, 1)$  delle serie di FOURIER, e delle loro coniugate, delle funzioni Lip  $\alpha$  in due o più variabili che crediamo nuove e che estendono un nostro precedente risultato sullo stesso argomento <sup>(5)</sup>.

Noi consideriamo soltanto funzioni di due variabili, ma i risultati che otterremo si estendono senza difficoltà alle funzioni di più variabili.

1. - Sia  $f(x, y)$  una funzione periodica di periodo  $2\pi$  rispetto ad  $x$  e rispetto ad  $y$ , Lip  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , nel quadrato fondamentale  $Q(0, 0; 2\pi, 2\pi)$ . Essa risulta continua in tutti i punti del piano eccetto che sulle rette  $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ ,  $y \equiv 0 \pmod{2\pi}$ . Nei punti di queste rette sono definiti i valori limiti  $f(x_0 \pm 0, y_0 \pm 0)$ .

Limitiamoci al quadrato  $Q$  e osserviamo che se  $(x_0, y_0)$  è un punto del suo contorno basta porre ivi la  $f(x, y)$  uguale al valore limite che si ottiene facendo avvicinare il punto  $(x, y)$  verso  $(x_0, y_0)$  rimanendo sempre nell'interno di  $Q$ , perchè  $f(x, y)$  soddisfi ora alla (2) anche per i punti  $(x, y)$ ,  $(x', y')$  appartenenti al contorno di  $Q$ .

Sia ora  $(x, y)$  un punto di  $Q$  o del suo contorno e sia  $(x', y')$  un altro punto qualunque pure interno a  $Q$  o sul suo contorno.

Allora anche i punti  $(x, y')$  e  $(x', y)$  sono interni o sul contorno di  $Q$  e vogliamo considerare la differenza

$$\Delta f = f(x, y) - f(x', y) - f(x, y') + f(x', y').$$

Siano  $\beta$  e  $\gamma$  due numeri reali tali che  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\beta + \gamma = \alpha$  onde

$$|\Delta f| < \begin{cases} 2K|x-x'|^\alpha = 2K|x-x'|^\beta |x-x'|^\gamma & \text{se } |x-x'| \leq |y-y'| \\ 2K|y-y'|^\alpha = 2K|y-y'|^\beta |y-y'|^\gamma & \text{se } |y-y'| \leq |x-x'| \end{cases}$$

e quindi, maggiorando, in entrambi i casi

$$|\Delta f| < 2K|x-x'|^\beta |y-y'|^\gamma.$$

---

<sup>(5)</sup> Richiamiamo qui anche il Lemma III del nostro lavoro, L. CESARI: *Sul problema di Dirichlet*. Rend. Circolo Mat. Palermo, t. LX (1936). Tale lemma estende alle serie coniugate una ben nota maggiorazione delle somme parziali di una serie di FOURIER di una funzione limitata.

2. - L'osservazione ora fatta permette anzitutto di asserire il

TEOREMA I <sup>(6)</sup>. - Se  $f(x, y)$  è una funzione periodica di periodo  $2\pi$  rispetto ad  $x$  e ad  $y$ , Lip  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , in  $Q(0, 0; 2\pi, 2\pi)$ , allora la serie doppia di Fourier della  $f(x, y)$  converge in tutti i punti  $(x_0, y_0)$  interni a  $Q$  verso  $f(x_0, y_0)$  e in tutti i punti  $(x_0, y_0)$  del contorno di  $Q$  verso la media dei quattro limiti  $f(x_0 \pm 0, y_0 \pm 0)$ . Tale convergenza è uniforme in ogni rettangolo a lati paralleli agli assi non contenente punti del contorno di  $Q$ .

Il prof. TONELLI ha infatti dimostrato che nelle ipotesi di questo teorema si ha la convergenza in tutti i punti  $(x_0, y_0)$  in cui, per opportuni numeri positivi  $K, \beta, \gamma$  si abbia

$$(3) \quad |f(x, y) - f(x, y_0) - f(x_0, y) + f(x_0, y_0)| < K' |x - x_0|^\beta |y - y_0|^\gamma$$

con le solite convenzioni per i punti del contorno di  $Q$ , ma ciò come si è visto si ha per tutti i punti  $(x_0, y_0)$  di  $Q$  e del suo contorno quando si assuma  $\beta + \gamma = \alpha$ ,  $K' = 2K$ .

Si osservi inoltre che se  $f(x, y)$  è Lip  $\alpha$  in tutto il piano la convergenza della sua serie doppia di FOURIER verso  $f(x, y)$  è uniforme in tutto il piano.

3. - Sia sempre  $f(x, y)$  periodica di periodo  $2\pi$  rispetto ad  $x$  e rispetto ad  $y$ , Lip  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , in  $Q(0, 0; 2\pi, 2\pi)$ . Sia, con le solite notazioni,

$$f(x, y) \sim \sum_{m, n=0}^{\infty} \lambda_{mn} (a_{mn} \cos mx \cos ny + b_{mn} \sin mx \cos ny + c_{mn} \cos mx \sin ny + d_{mn} \sin mx \sin ny)$$

la sua serie doppia di FOURIER. Le serie coniugate <sup>(7)</sup> di questa sono le seguenti

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1(x, y) \sim \sum_{m, n=0}^{\infty} \lambda_{mn} (-b_{mn} \cos mx \cos ny + a_{mn} \sin mx \cos ny - \\ \quad - d_{mn} \cos mx \sin ny + c_{mn} \sin mx \sin ny) \\ f_2(x, y) \sim \sum_{m, n=0}^{\infty} \lambda_{mn} (-c_{mn} \cos mx \cos ny - d_{mn} \sin mx \cos ny + \\ \quad + a_{mn} \cos mx \sin ny + b_{mn} \sin mx \sin ny) \\ f_3(x, y) \sim \sum_{m, n=0}^{\infty} \lambda_{mn} (d_{mn} \cos mx \cos ny - c_{mn} \sin mx \cos ny - \\ \quad - b_{mn} \cos mx \sin ny + a_{mn} \sin mx \sin ny) \end{array} \right.$$

ove supponiamo  $b_{0n} = 0$ ,  $c_{m0} = 0$ ,  $d_{m0} = d_{0n} = 0$ , ( $m, n = 0, 1, 2, \dots$ ).

<sup>(6)</sup> Questo teorema è una forma più semplice del teorema del prof. L. TONELLI, loc. cit. in <sup>(3)</sup>, p. 454, n.° 168, b e *Sulla convergenza delle serie doppie di Fourier*. Annali di Mat., s. IV (1927), pp. 29-72.

<sup>(7)</sup> Tali serie sono già state da noi considerate in loc. cit. in <sup>(5)</sup>, n.° 3 ed estendono la nozione di serie coniugate alle serie trigonometriche di più variabili.

Tali serie sono certamente serie di FOURIER di funzioni a quadrato integrabile.

Diremo  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$ ,  $f_3(x, y)$  rispettivamente funzioni coniugate di  $f(x, y)$  rispetto ad  $x$ , rispetto ad  $y$ , rispetto ad  $x$  e ad  $y$  <sup>(8)</sup>.

4. - Dimostreremo nei numeri seguenti il

TEOREMA II (generalizzazione del teorema di PRIVALOFF) <sup>(9)</sup>. - *Se  $f(x, y)$  è una funzione periodica di periodo  $2\pi$  rispetto ad  $x$  e rispetto ad  $y$ , Lip  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , in  $Q$ , se  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$ ,  $f_3(x, y)$  sono le sue funzioni coniugate, allora in ogni rettangolo a lati paralleli agli assi non contenente punti del contorno di  $Q$  le serie (4) convergono uniformemente verso le relative funzioni e inoltre  $f_1(x, y)$  e  $f_2(x, y)$  sono ivi Lip  $\alpha$  e  $f_3(x, y)$  è Lip  $\alpha'$  per ogni  $0 < \alpha' < \alpha$ . Se  $f(x, y)$  è Lip  $\alpha$  in tutto il piano allora la considerata convergenza è uniforme in tutto il piano e, in tutto il piano,  $f_1(x, y)$  e  $f_2(x, y)$  sono Lip  $\alpha$  e  $f_3(x, y)$  è Lip  $\alpha'$  per ogni  $0 < \alpha' < \alpha$ .*

5. - Dimostreremo <sup>(10)</sup> che è

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [f(x+u, y) - f(x-u, y)] \cotg \frac{1}{2} u \, du \\ f_2(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [f(x, y+v) - f(x, y-v)] \cotg \frac{1}{2} v \, dv \\ f_3(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \Delta'_{uv} \cotg \frac{1}{2} u \cotg \frac{1}{2} v \, dudv \end{array} \right.$$

ove

$$\Delta'_{uv} = f(x+u, y+v) - f(x-u, y+v) - f(x+u, y-v) + f(x-u, y-v).$$

Diciamo  $s_{\mu\nu}^{(1)}$ ,  $s_{\mu\nu}^{(2)}$ ,  $s_{\mu\nu}^{(3)}$  le somme parziali delle serie (4) rispettivamente.

È intanto

$$(5) \quad s_{\mu\nu}^{(3)} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \Delta'_{uv} \left[ \cotg \frac{1}{2} u - \frac{\cos\left(\mu + \frac{1}{2}\right) u}{\text{sen} \frac{1}{2} u} \right] \left[ \cotg \frac{1}{2} v - \frac{\cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right) v}{\text{sen} \frac{1}{2} v} \right] dudv.$$

<sup>(8)</sup> Le relative serie potranno pure chiamarsi serie coniugate rispetto ad  $x$ , rispetto ad  $y$ , rispetto ad  $x$  e ad  $y$  della serie di FOURIER di  $f(x, y)$ .

<sup>(9)</sup> I. PRIVALOFF: *Sur les fonctions coniuguées*. Bulletin de la Société Math. de France (1916), pp. 100-103. Inoltre V. A. ZIGMUND, loc. cit. in <sup>(2)</sup>, p. 156, 7.4.

<sup>(10)</sup> In questa nota faremo uso più volte delle notazioni di BACHMANN e LANDAU.

È allora, se diciamo  $2\delta$  la distanza di  $(x, y)$  dal contorno  $FQ$  di  $Q$ ,

$$\left| \frac{\Delta'_{uv}}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u \operatorname{sen} \frac{1}{2} v} \right| = 4 \left| \frac{\Delta'_{uv}}{uv} \right| \left| \frac{\frac{1}{2} u}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u} \right| \left| \frac{\frac{1}{2} v}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} v} \right| =$$

$$= \begin{cases} O(u^{\beta-1}v^{\gamma-1}) & 0 \leq u \leq \delta, \quad 0 \leq v \leq \delta, \quad \beta + \gamma = \alpha \\ \frac{1}{\delta} O(u^{\alpha-1}) & 0 \leq u \leq \delta, \quad \delta \leq v \leq \pi, \\ \frac{1}{\delta} O(v^{\alpha-1}) & \delta \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq \delta, \\ \frac{1}{\delta^2} O(1) & \delta \leq u \leq \pi, \quad \delta \leq v \leq \pi. \end{cases}$$

Dunque  $\frac{\Delta'_{uv}}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u \operatorname{sen} \frac{1}{2} v}$  è integrabile in  $(0, 0; \pi, \pi)$ . L'espressione (5) può

dunque spezzarsi nei quattro integrali che si ottengono sviluppando il prodotto e distribuendo il segno di integrale. Ma uno di essi è  $f_3(x, y)$  e gli altri tendono a zero per  $\left. \begin{matrix} \mu \\ \nu \end{matrix} \right\} \rightarrow \infty$ .

Si ponga ora

$$\Delta''_{uv} f = [f(x+u, y+v) - f(x-u, y+v) - f(x+u, y) + f(x-u, y)] +$$

$$+ [f(x+u, y-v) - f(x-u, y-v) - f(x+u, y) + f(x-u, y)]$$

onde si ha, denotando con  $s_{\mu\nu}^{(4)}$  la somma parziale generica della serie che dà  $f_1(x, y)$ ,

$$(6) \quad s_{\mu\nu}^{(4)} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \{ \Delta''_{uv} f +$$

$$+ 2[f(x+u, y) - f(x-u, y)] \} \left[ \cotg \frac{1}{2} u - \frac{\cos \left( \mu + \frac{1}{2} \right) u}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u} \right] \frac{\operatorname{sen} \left( \nu + \frac{1}{2} \right) v}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} v} dudv.$$

Ma anche qui  $\frac{\Delta''_{uv} f}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u \operatorname{sen} \frac{1}{2} v}$  è pure integrabile in  $(0, 0; \pi, \pi)$  e così pure

$\frac{[f(x+u, y) - f(x-u, y)]}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u}$  è integrabile in  $(0 \leq u \leq \pi)$ .

Si può perciò anche qui spezzare l'espressione (6) in quattro integrali. Ma in uno di essi è possibile eseguire le integrazioni rispetto a  $v$  ed esso risulta uguale a  $f_1(x, y)$ . Gli altri tendono a zero per  $\left. \begin{matrix} \mu \\ \nu \end{matrix} \right\} \rightarrow \infty$ .

Analogamente si può fare per  $f_2(x, y)$ .

La convergenza delle serie di  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$ ,  $f_3(x, y)$  in tutti i punti interni a  $Q$  è con ciò dimostrata. Tale convergenza si ha in tutto il piano ed uniformemente se  $f(x, y)$  è Lip  $\alpha$  in tutto il piano.

6. - La dimostrazione che  $f_1(x, y)$  e  $f_2(x, y)$  sono Lip  $\alpha$  nell'interno di  $Q$  è la stessa di quella fatta da PRIVALOFF per le funzioni di una sola variabile. Tale dimostrazione poi mostra che  $f_1(x, y)$  e  $f_2(x, y)$  sono Lip  $\alpha$  in tutto il piano se  $f(x, y)$  è Lip  $\alpha$  in tutto il piano.

Per quanto riguarda  $f_3(x, y)$  si osservi che si può scrivere

$$(7) \quad f_3(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+u, y+v) - f(x, y+v)] \cotg \frac{1}{2} u \cotg \frac{1}{2} v \, dudv$$

$$(7') \quad f_3(x+h, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+u, y+v) - f(x+h, y+v)] \cotg \frac{1}{2} (u-h) \cotg \frac{1}{2} v \, dudv.$$

Infatti queste espressioni differiscono dalla espressione di  $f_3(x, y)$  vista sopra per termini addizionali che, essendo  $\cotg \frac{1}{2} u$  funzione dispari di  $u$  e di periodo  $2\pi$ , danno un contributo nullo.

Spezzeremo gli integrali (7) e (7') in varie parti. Gli integrali di (7) e (7') relativi ai quadrati  $(-2h, -2h; 2h, 2h)$  sono ciascuno, fatto  $\beta = \gamma = \frac{\alpha}{2}$ ,

$$\frac{1}{\beta} O(h^\beta) \cdot \frac{1}{\gamma} O(h^\gamma) = \frac{1}{\beta\gamma} O(h^{\beta+\gamma}) = O(h^\alpha).$$

Gli integrali di (7) e (7') relativi ai rettangoli  $-2h \leq u \leq 2h$ ,  $2h \leq |v| \leq \pi$  sono ciascuno

$$\int_{-2h}^{2h} O(|u|^{\alpha-1}) \, du \int_{2h}^{\pi} O(v^{-1}) \, dv = O(h^\alpha) O(|\lg h|) = O(h^\alpha |\lg h|).$$

Gli integrali di (7) e (7') relativi ai rettangoli  $2h \leq |u| \leq \pi$ ,  $-2h \leq v \leq 2h$ , sottratti l'uno dall'altro danno complessivamente

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi^2} \left[ \int_{-\pi}^{-2h} + \int_{2h}^{\pi} \right] \int_0^{2h} [f(x+u, y+v) - f(x, y+v) - \\ & - f(x+u, y-v) + f(x, y-v)] \left[ \cotg \frac{1}{2} u - \cotg \frac{1}{2} (u-h) \right] \cotg \frac{1}{2} v \, dudv + \\ & + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2h} [f(x+h, y+v) - f(x, y+v) - \\ & - f(x+h, y-v) + f(x, y-v)] \cotg \frac{1}{2} v \, dv \int_{2h}^{\pi} \left[ \cotg \frac{1}{2} (u-h) - \cotg \frac{1}{2} (u+h) \right] \, du. \end{aligned}$$

Ma è

$$\cotg \frac{1}{2}(u-h) - \cotg \frac{1}{2}u = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}h}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(u-h) \operatorname{sen} \frac{1}{2}u}$$

onde, in  $2h \leq |u| \leq \pi$ ,  $\left| \cotg \frac{1}{2}(u-h) - \cotg \frac{1}{2}u \right| = O(h)O(|u|^{-2})$ .

Nel primo integrale la funzione integranda è dunque

$$O(v^\alpha)O(h)O(|u|^{-2})O(v^{-1}) = O(h)O(v^{\alpha-1})O(|u|^{-2})$$

onde il primo integrale è  $O(h)O(h^\alpha)O(h^{-1}) = O(h^\alpha)$ .

Il secondo integrale riesce <sup>(11)</sup>

$$O(h^\alpha) \left[ 2 \operatorname{lg} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(u-h)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(u+h)} \right]_{2h}^\pi = O(h^\alpha)O(1) = O(h^\alpha).$$

Infine gli integrali di (7) e (7') relativi ai quadrati del tipo  $2h \leq u \leq \pi$ ,  $2h \leq v \leq \pi$  sottratti l'uno dall'altro danno complessivamente

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2} \left[ \int_{-\pi}^{-2h} + \int_{2h}^\pi \right] \left[ \int_{-\pi}^{-2h} + \int_{2h}^\pi \right] [f(x+u, y+v) - \\ & - f(x, y+v)] \left[ \cotg \frac{1}{2}u - \cotg \frac{1}{2}(u-h) \right] \cotg \frac{1}{2}v \, du \, dv + \\ & + \frac{1}{4\pi^2} \left[ \int_{-\pi}^{-2h} + \int_{2h}^\pi \right] [f(x+h, y+v) - \\ & - f(x, y+v)] \cotg \frac{1}{2}v \, dv \int_{2h}^\pi \left[ \cotg \frac{1}{2}(u-h) - \cotg \frac{1}{2}(u+h) \right] du = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Nell'ipotesi che  $f(x, y)$  sia Lip  $\alpha$  in tutto il piano allora nel primo integrale la funzione integranda è  $O(|u|^\alpha)O(h)O(|u|^{-2})O(v^{-1})$  e quindi il primo integrale è  $O(h^\alpha |\operatorname{lg} h|)$ . Il secondo è

$$O(h^\alpha |\operatorname{lg} h|) \int_{2h}^\pi \left[ \cotg \frac{1}{2}(u-h) - \cotg \frac{1}{2}(u+h) \right] du = O(h^\alpha |\operatorname{lg} h|)O(1) = O(h^\alpha |\operatorname{lg} h|).$$

Supponiamo invece  $f(x, y)$  Lip  $\alpha$  in  $Q$ . Poniamo  $\delta_1 = x$ ,  $\delta_2 = 2\pi - x$ ,  $\sigma_1 = y$ ,  $\sigma_2 = 2\pi - y$

<sup>(11)</sup> Vedi ad esempio A. ZYGMUND, loc. cit. in <sup>(2)</sup>, p. 156, 7.4.



e inoltre supponiamo, ad esempio,  $0 < \delta_1 < \pi$ ,  $0 < \sigma_1 < \pi$ ,  $4h < \delta$ ,  $\delta \leq \delta_1$ ,  $\delta \leq \sigma_1$ . Si ha

$$\begin{aligned}
 I_1 = & \int_{-\pi}^{-\delta_1-2h} \int_{-\pi}^{-\sigma_1-2h} + \int_{-\delta_1-2h}^{-\delta_1+2h} \int_{-\pi}^{-\sigma_1-2h} - 2h \int_{-\delta_1+2h}^{-\sigma_1-2h} \int_{-\pi}^{\pi} - \sigma_1-2h \int_{-\pi}^{-2h} - \sigma_1+2h \\
 & + \int_{2h}^{\pi} \int_{-\sigma_1-2h}^{-\delta_1-2h} + \int_{-\pi}^{2h} \int_{-\sigma_1+2h}^{-\delta_1-2h} + \int_{-\sigma_1+2h}^{-\delta_1+2h} \int_{-\pi}^{2h} + \int_{-\delta_1+2h}^{-2h} \int_{-\sigma_1+2h}^{2h} + \int_{2h}^{\pi} \int_{-\sigma_1+2h}^{2h} + \\
 & + \int_{-\pi}^{-\delta_1-2h} \int_{2h}^{\pi} + \int_{-\delta_1-2h}^{-\delta_1+2h} \int_{2h}^{\pi} + \int_{-\delta_1+2h}^{-2h} \int_{2h}^{\pi} + \int_{2h}^{\pi} \int_{2h}^{\pi} = \sum_{i=1}^{14} I_{1,i},
 \end{aligned}$$

ove dal campo di integrazione di questi integrali si tolgano le striscie  $-2h \leq u \leq 2h$ ,  $-2h \leq v \leq 2h$ .

In  $I_{1,1}$  e  $I_{1,2}$  la funzione integranda è  $O(|v|^{-1})O(h)O(|u|^{-2})$  onde  $|I_{1,1}| = O(|\lg \delta|)O(\delta^{-1})O(h)$  e  $|I_{1,2}| = O(|\lg \delta|)O(\delta^{-2})O(h^2)$ . In  $I_{1,3}$  la funzione integranda è  $O(|u|^\alpha)O(|v|^{-1})O(h)O(|u|^{-2})$  onde  $|I_{1,3}| = O(|\lg \delta|)O(h^\alpha)$ . In  $I_{1,4}$  valgono le stesse considerazioni come in  $I_{1,3}$ . In  $I_{1,5}$  e  $I_{1,6}$  la funzione integranda è  $O(|v|^{-1})O(h)O(|u|^{-2})$  onde  $|I_{1,5}| = O(h)O(h^2\delta^{-2})O(h^{-1}) = O(\delta^{-2})O(h^2)$  e analogamente  $|I_{1,6}| = O(\delta^{-2})O(h^2)$ . In  $I_{1,7}$  e  $I_{1,8}$  la funzione integranda è  $O(|v|^{-1})O(h)O(|u|^{-2})$  onde  $|I_{1,7}| = O(\delta^{-1})O(h|\lg h|)$  e  $|I_{1,8}| = O(\delta^{-1})O(h|\lg h|)$ . In  $I_{1,9}$  la funzione integranda è  $O(|u|^\alpha)O(|v|^{-1})O(h)O(|u|^{-2})$  onde  $|I_{1,9}| = O(h^\alpha|\lg h|)$ . In  $I_{1,10}$ ,  $I_{1,11}$ ,  $I_{1,12}$ ,  $I_{1,13}$ ,  $I_{1,14}$  valgono le stesse considerazioni come rispettivamente in  $I_{1,9}$ ,  $I_{1,7}$ ,  $I_{1,8}$ ,  $I_{1,9}$ ,  $I_{1,10}$ . Finalmente per  $I_2$  valgono le stesse considerazioni fatte precedentemente in quantochè in tutto il campo di integrazione la funzione integranda è  $O(h^\alpha)O(|v|^{-1})$  e quindi  $|I_2| = O(h^\alpha|\lg h|)$ .

È dunque  $|f_3(x+h, y) - f_3(x, y)| = O(h^\alpha|\lg h|)$  per tutti i punti  $(x, y)$ ,  $(x+h, y)$  interni a  $Q$  e uniformemente in ogni rettangolo a lati paralleli agli assi non contenente punti del contorno di  $Q$  se  $f(x, y)$  è Lip  $\alpha$  in  $Q$ . È invece  $|f_3(x+h, y) - f_3(x, y)| = O(h^\alpha|\lg h|)$  uniformemente in tutto il piano se  $f(x, y)$  è Lip  $\alpha$  in tutto il piano.

Analogamente si proceda per lo studio della differenza  $|f_3(x, y+k) - f_3(x, y)|$  e quindi in definitiva si avrà

$$|f_3(x+h, y+k) - f_3(x, y)| = O(h^\alpha|\lg h|) + O(k^\alpha|\lg k|),$$

e a maggior ragione  $f_3(x, y)$  Lip  $\alpha'$  per ogni  $0 < \alpha' < \alpha \leq 1$ , rispettivamente nei punti interni a  $Q$  o in tutto il piano, secondochè  $f(x, y)$  è Lip  $\alpha$  in  $Q$  o in tutto il piano.

Si osservi inoltre che sarà

$$|f_3(x+h, y+k) - f_3(x, y)| < K'[h^{\alpha'} + k^{\alpha'}]$$

e  $K'$  dipende solo da  $K$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha'$  (e dal  $\delta$  considerato soltanto se la  $f$  sia Lip  $\alpha$  solo in  $Q$ ).

7. - Vale inoltre il

TEOREMA III. - Se  $f(x, y)$  è una funzione periodica di periodo  $2\pi$  rispetto ad  $x$  e ad  $y$ , Lip  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , in  $Q$ , allora in ogni rettangolo a lati paralleli agli assi e non contenente punti del contorno di  $Q$  le serie (4) convergono uniformemente secondo le medie del Cesaro  $(C, 1, 1)$  verso le relative funzioni  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$ ,  $f_3(x, y)$ . Tale convergenza è uniforme in tutto il piano se  $f(x, y)$  è Lip  $\alpha$  in tutto il piano.

Questo teorema è una conseguenza del teorema del n.º 4 soltanto nell'ipotesi che  $f(x, y)$  sia Lip  $\alpha$  in tutto il piano, perchè altrimenti, pur essendo le funzioni  $f_i(x, y)$ ,  $i=1, 2, 3$ , continue in tutti i punti interni a  $Q$ , non soddisfano in generale alla condizione  $L$  <sup>(12)</sup> in  $Q$ .

Poniamo

$$\sigma_{\mu\nu}^{(i)} = \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)} \sum_{m=0}^{\mu} \sum_{n=0}^{\nu} s_{mn}^{(i)}, \quad (i=1, 2, 3),$$

e occupiamoci anzitutto del caso  $i=3$ . È intanto per la (5)

$$\begin{aligned} (8) \quad \sigma_{\mu\nu}^{(3)} - f_3(x, y) &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\Delta uv}{\sin \frac{1}{2} u \sin \frac{1}{2} v} \cos \frac{1}{2} u \frac{\sin(\nu+1)v}{(\nu+1)v} \frac{\frac{1}{2} v}{\sin \frac{1}{2} v} dudv - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\Delta uv}{\sin \frac{1}{2} u \sin \frac{1}{2} v} \cos \frac{1}{2} v \frac{\sin(\mu+1)u}{(\mu+1)u} \frac{\frac{1}{2} u}{\sin \frac{1}{2} u} dudv + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\Delta uv}{\sin \frac{1}{2} u \sin \frac{1}{2} v} \frac{\sin(\mu+1)u}{(\mu+1)u} \frac{\sin(\nu+1)v}{(\nu+1)v} \frac{\frac{1}{2} u}{\sin \frac{1}{2} u} \frac{\frac{1}{2} v}{\sin \frac{1}{2} v} dudv = \\ &= I_1^{(3)} + I_2^{(3)} + I_3^{(3)}. \end{aligned}$$

Sia  $2\delta$  la minima distanza del punto  $(x_0, y_0)$  dal contorno  $FQ$  di  $Q$ . Sia  $0 < \tau < \delta$  un numero per ora qualunque e si ponga

$$(9) \quad I_j^{(3)} = \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} + \int_0^{\tau} \int_{\tau}^{\pi} + \int_{\tau}^{\pi} \int_0^{\tau} + \int_{\tau}^{\pi} \int_{\tau}^{\pi} = J_{j1}^{(3)} + J_{j2}^{(3)} + J_{j3}^{(3)} + J_{j4}^{(3)}, \quad (j=1, 2, 3).$$

<sup>(12)</sup> Si dice che una funzione  $f(x, y)$  soddisfa alla condizione  $L$  in  $Q$ , se per quasi tutti gli  $x$  di  $(0, 2\pi)$  e quasi tutti gli  $y$  di  $(0, 2\pi)$  si ha, per una costante  $L$  indipendente da  $x$  e da  $y$ ,

$$\int_0^{2\pi} |f(x, y)| dx \leq L, \quad \int_0^{2\pi} |f(x, y)| dy \leq L.$$

I polinomi di FEJÉR di una funzione soddisfacente alla condizione  $L$  convergono in ogni punto di continuità per la funzione. Vedi ad esempio, L. TONELLI, loc. cit. in <sup>(3)</sup>, n.º 185, 186.

Sia  $\varepsilon > 0$  un numero arbitrario. Poichè le funzioni sotto il segno di integrale nelle espressioni  $I_j^{(3)}$ , ( $j=1, 2, 3$ ), sono in valore assoluto minori di una funzione integrabile indipendente da  $\mu$  e  $\nu$  si può subito scegliere un  $0 < \tau < \delta$  così piccolo in modo che sia subito

$$|J_{j_1}^{(3)}|, |J_{j_2}^{(3)}|, |J_{j_3}^{(3)}| < \varepsilon, \quad (j=1, 2, 3).$$

Così fissato  $\tau$ , gli integrali  $J_{j_4}^{(3)}$ , ( $j=1, 2, 3$ ), tendono, per cose note, a zero per  $\left. \begin{matrix} \mu \\ \nu \end{matrix} \right\} \rightarrow \infty$ . Esiste dunque un  $\bar{N}$  tale che per  $\mu > N$ ,  $\nu > N$ , sia

$$|J_{j_4}^{(3)}| < \varepsilon, \quad (j=1, 2, 3)$$

da cui per  $\mu > N$ ,  $\nu > N$ ,  $|I_j^{(3)}| < 4\varepsilon$ , ( $j=1, 2, 3$ ) e infine

$$|\sigma_{\mu\nu}^{(3)} - f_3(x, y)| < 12\varepsilon.$$

L'asserto è dunque dimostrato per ciò che riguarda  $f_3(x, y)$ .

Consideriamo il caso di  $i=1$ . Si ha dalla (6)

$$\begin{aligned} (10) \quad \sigma_{\mu\nu}^{(1)} - f_1(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+u, y) - f(x-u, y)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u} \frac{\operatorname{sen}(\mu+1)u}{(\mu+1)u} \frac{\frac{1}{2} u}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u} du - \\ &- \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\Delta''_{uv}}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u \operatorname{sen} \frac{1}{2} v} \cos \frac{1}{2} u \frac{\operatorname{sen}(\nu+1)\frac{v}{2}}{(\nu+1)v} \frac{\frac{1}{2} v}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} v} \operatorname{sen}(\nu+1)\frac{v}{2} dudv + \\ &+ \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\Delta''_{uv}}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u \operatorname{sen} \frac{1}{2} v} \frac{\operatorname{sen}(\mu+1)u}{(\mu+1)u} \frac{\frac{1}{2} u}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u} \frac{\operatorname{sen}(\nu+1)\frac{v}{2}}{(\nu+1)v} \frac{\frac{1}{2} v}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} v} \operatorname{sen}(\nu+1)\frac{v}{2} dudv = \\ &= I_1^{(1)} + I_2^{(1)} + I_3^{(1)}. \end{aligned}$$

Può ora ripetersi con ovvie modificazioni il ragionamento precedente. Similmente per  $i=2$ .

8. - Possiamo dimostrare più precisamente il seguente

TEOREMA IV. - *Nelle ipotesi del teorema III, in ogni rettangolo interno a Q e lati paralleli agli assi non contenente punti del contorno di Q, si ha*

$$(11) \quad \begin{cases} |\sigma_{\mu\nu} - f(x, y)| < C \left\{ \frac{1}{(\mu+1)^{a'}} + \frac{1}{(\nu+1)^{a'}} \right\} \\ |\sigma_{\mu\nu}^{(i)} - f_i(x, y)| < C \left\{ \frac{1}{(\mu+1)^{a'}} + \frac{1}{(\nu+1)^{a'}} \right\} \end{cases} \quad (i=1, 2, 3)$$

per ogni  $0 < a' < a \leq 1$  e ove  $C$  è una costante che dipende solo dal rettangolo considerato, nonchè delle costanti  $K$  ed  $a$  della (2) e da  $a'$ .

La prima delle (11) è contenuta in un nostro lemma <sup>(13)</sup> che generalizza quello di S. BERNSTEIN e vale inoltre anche ove si faccia  $a' = a$  purchè sia  $a < 1$ .

Occupiamoci della seconda delle (11) per  $i=3$ . Riprendiamo le formule del numero precedente riscrivendo la (8) e le (9) per  $\tau = \frac{\delta}{4}$ .

Si ha con le solite maggiorazioni e tenendo conto del numero 1, per ogni  $\beta + \gamma = a$

$$|J_{31}^{(3)}| < \frac{1}{4\pi^2} 2K \frac{4\pi^4}{16} \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{(2u)^\beta (2v)^\gamma}{uv} \frac{|\text{sen}(\mu+1)u|}{(\mu+1)u} \frac{|\text{sen}(\nu+1)v|}{(\nu+1)v} dudv$$

e posto  $(\mu+1)u = u'$ ,  $(\nu+1)v = v'$

$$\begin{aligned} |J_{31}^{(3)}| &< \frac{1}{4\pi^2} 2K \frac{4\pi^4}{16} 2^\alpha (\mu+1)^{-\beta} (\nu+1)^{-\gamma} \int_0^{(\mu+1)\tau} u'^{\beta-1} \frac{|\text{sen } u'|}{u'} du' \int_0^{(\nu+1)\tau} v'^{\gamma-1} \frac{|\text{sen } v'|}{v'} dv' \\ &< C(\mu+1)^{-\beta} (\nu+1)^{-\gamma} \leq \begin{cases} C(\mu+1)^{-\beta} \\ C(\nu+1)^{-\gamma} \end{cases} \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} |J_{32}^{(3)}| &< \frac{1}{4\pi^2} 2K \frac{4\pi^4}{16} \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{(2u)^\alpha}{uv} \frac{|\text{sen}(\mu+1)u|}{(\mu+1)u} \frac{1}{(\nu+1)v} dudv < \\ &< \frac{1}{4\pi^2} 2K \frac{4\pi^4}{16} 2^\alpha \pi \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{\nu+1} (\mu+1)^{-\alpha} \int_0^{(\mu+1)\tau} u'^{\alpha-1} \frac{|\text{sen } u'|}{u'} du' < \\ &< C \frac{1}{\delta^2} (\nu+1)^{-1} (\mu+1)^{-\alpha}, \end{aligned}$$

$$|J_{33}^{(3)}| < C \frac{1}{\delta^2} (\mu+1)^{-1} (\nu+1)^{-\alpha}.$$

È d'altra parte in  $Q$ ,  $|f(x, y) - f(0, 0)| < 2K(2\pi)^\alpha$  onde  $|Af| < 8K(2\pi)^\alpha$  e infine

$$|J_{34}^{(3)}| < \frac{1}{4\pi^2} 8K(2\pi)^\alpha \frac{4\pi^4}{16} \pi^2 \frac{1}{\tau^4} (\mu+1)^{-1} (\nu+1)^{-1} < C \frac{1}{\delta^4} (\mu+1)^{-1} (\nu+1)^{-1}.$$

Procedendo ora in modo analogo si ottiene per ogni  $\beta' + \gamma' = a$ ,  $\beta' > 0$ ,  $\gamma' > 0$ ,

$$\begin{aligned} |J_{41}^{(3)}| &< \frac{1}{4\pi^2} 2K \frac{4\pi^3}{8} \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{(2u)^{\beta'} (2v)^{\gamma'}}{uv} \frac{|\text{sen}(\nu+1)v|}{(\nu+1)v} dudv < \\ &< \frac{1}{4\pi^2} 2K \frac{4\pi^3}{8} 2^\alpha (\nu+1)^{-\gamma'} \int_0^{(\nu+1)\tau} u^{\beta'-1} du \int_0^{(\nu+1)\tau} v'^{\gamma'-1} \frac{|\text{sen } v'|}{v'} dv' < C(\nu+1)^{-\gamma'}, \end{aligned}$$

<sup>(13)</sup> L. CESARI, loc. cit. in <sup>(5)</sup> n.º 4, Lemma IV. Inoltre cfr. S. BERNSTEIN: *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné*. Mémoires de l'acad. roy. de Belgique, 2<sup>me</sup> série, t. IV (1912), pp. 1-104, in particolare p. 88 e L. TONELLI, loc. cit. in <sup>(3)</sup>, p. 252.

$$\begin{aligned}
|J_{12}^{(3)}| &< \frac{1}{4\pi^2} 2K \frac{4\pi^3}{8} \int_0^\tau \int_\tau^\pi \frac{(2u)^\alpha}{uv} \frac{|\operatorname{sen}(\nu+1)v|}{(\nu+1)v} dudv < \\
&< \frac{1}{4\pi^2} 2K \frac{4\pi^3}{8} \pi \frac{1}{\tau^2} (\nu+1)^{-1} \int_0^\tau u^{\alpha-1} du < C \frac{1}{\delta^2} (\nu+1)^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|J_{13}^{(3)}| &< \frac{1}{4\pi^2} 2K \frac{4\pi^3}{8} \int_\tau^\pi \int_0^\tau \frac{(2v)^\alpha}{uv} \frac{|\operatorname{sen}(\nu+1)v|}{(\nu+1)v} dudv < \\
&< \frac{1}{4\pi^2} 2K \frac{4\pi^3}{8} 2^\alpha \pi \frac{1}{\tau} (\nu+1)^{-\alpha} \int_0^{(\nu+1)\tau} v'^{\alpha-1} \frac{|\operatorname{sen} v'|}{v'} dv' < C \frac{1}{\delta} (\nu+1)^{-\alpha},
\end{aligned}$$

$$|J_{14}^{(3)}| < \frac{1}{4\pi^2} 8K(2\pi)^\alpha \frac{4\pi^3}{8} \pi^2 \frac{1}{\tau^3} (\nu+1)^{-1} < C \frac{1}{\delta^3} (\nu+1)^{-1}.$$

Analogamente per ogni  $\beta'' + \gamma'' = \alpha$ ,  $\beta'' > 0$ ,  $\gamma'' > 0$ ,

$$\begin{aligned}
|J_{21}^{(3)}| &< C(\mu+1)^{-\beta''}, & |J_{23}^{(3)}| &< C \frac{1}{\delta^2} (\mu+1)^{-1}, \\
|J_{22}^{(3)}| &< C \frac{1}{\delta} (\mu+1)^{-\alpha}, & |J_{24}^{(3)}| &< C \frac{1}{\delta^3} (\mu+1)^{-1}.
\end{aligned}$$

Se ora  $a'$  è un numero  $0 < a' < \alpha$ , si può sempre porre  $\beta = \gamma' = \beta'' = a'$  onde

$$|J_{31}^{(3)}| < C(\mu+1)^{-a'}, \quad |J_{11}^{(3)}| < C(\nu+1)^{-a'}, \quad |J_{21}^{(3)}| < C(\mu+1)^{-a'}$$

e quindi a maggior ragione, per una opportuna costante  $C_\delta$  che dipende solo da  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\delta$ ,  $K$ ,

$$|\sigma_{\mu\nu}^{(3)} - f_3(x, y)| < C_\delta \left\{ \frac{1}{(\mu+1)^{\alpha'}} + \frac{1}{(\nu+1)^{\alpha'}} \right\}.$$

Per  $i=1$  si ponga

$$I_1^{(4)} = \int_0^\tau + \int_\tau^\pi = J_{11}^{(4)} + J_{12}^{(4)}$$

onde

$$\begin{aligned}
|J_{11}^{(4)}| &< \frac{1}{2\pi} K \frac{2\pi^2}{4} \int_0^\tau \frac{(2u)^\alpha}{u} \frac{|\operatorname{sen}(\mu+1)u|}{(\mu+1)u} du < \\
&< \frac{1}{2\pi} K \frac{2\pi^2}{4} 2^\alpha (\mu+1)^{-\alpha} \int_0^{(\mu+1)\tau} u'^{\alpha-1} \frac{|\operatorname{sen} u'|}{u'} du' < C(\mu+1)^{-\alpha},
\end{aligned}$$

$$|J_{12}^{(4)}| < \frac{1}{2\pi} 2K(2\pi)^\alpha \frac{2\pi^2}{4} \pi \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{\mu+1} < C \frac{1}{\delta^2} (\mu+1)^{-1}.$$

Ponendo come prima  $I_j^{(4)} = J_{j_1}^{(4)} + J_{j_2}^{(4)} + J_{j_3}^{(4)} + J_{j_4}^{(4)}$ , ( $j=2, 3$ ) si ha come sopra

$$\begin{aligned} |J_{21}^{(4)}| &< C(\nu+1)^{-\gamma}, & |J_{22}^{(4)}| &< C \frac{1}{\delta^2} (\nu+1)^{-4}, \\ |J_{23}^{(4)}| &< C \frac{1}{\delta} (\nu+1)^{-\alpha}, & |J_{24}^{(4)}| &< C \frac{1}{\delta^3} (\nu+1)^{-4}, \\ |J_{31}^{(4)}| &< C(\mu+1)^{-\beta'} (\nu+1)^{-\gamma'}, & |J_{32}^{(4)}| &< C \frac{1}{\delta^2} (\mu+1)^{-\alpha} (\nu+1)^{-4}, \\ |J_{33}^{(4)}| &< C \frac{1}{\delta^2} (\mu+1)^{-4} (\nu+1)^{-\alpha}, & |J_{34}^{(4)}| &< C \frac{1}{\delta^4} (\mu+1)^{-4} (\nu+1)^{-4}. \end{aligned}$$

Si può ora procedere come sopra e l'asserto è dimostrato per  $i=1$ . Similmente per  $i=2$ .

9. - Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA V. - *Nelle ipotesi del teorema II, per ogni rettangolo R interno a Q a lati paralleli agli assi e non contenente punti del contorno di Q e per ogni numero  $\alpha'$ ,  $0 < \alpha' < \alpha \leq 1$ , esiste una costante C, dipendente solo da R,  $\alpha'$ , K, a tale che, per ogni coppia di punti  $(x, y)$ ,  $(x', y')$  di R e per ogni  $(\mu, \nu)$  è*

$$\begin{aligned} |\sigma_{\mu\nu}(x, y) - \sigma_{\mu\nu}(x', y')| &< C \{ |x-x'|^\alpha + |y-y'|^\alpha \}, \\ |\sigma_{\mu\nu}^{(i)}(x, y) - \sigma_{\mu\nu}^{(i)}(x', y')| &< C \{ |x-x'|^{\alpha'} + |y-y'|^{\alpha'} \}, \quad (i=1, 2, 3). \end{aligned}$$

È intanto per  $i=3$ , come per la (7) del n.º 6,

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\nu}^{(3)}(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+u, y+v) - f(x, y+v)] \left\{ \cotg \frac{1}{2} u \cotg \frac{1}{2} v - \right. \\ &\quad - \frac{4}{uv} \frac{\frac{1}{2} u}{\text{sen } \frac{1}{2} u} \left( \frac{\frac{1}{2} v}{\text{sen } \frac{1}{2} v} \right)^2 \frac{\text{sen } (\nu+1)v}{(\nu+1)v} \cos \frac{1}{2} u - \\ &\quad - \frac{4}{uv} \left( \frac{\frac{1}{2} u}{\text{sen } \frac{1}{2} u} \right)^2 \frac{\frac{1}{2} v}{\text{sen } \frac{1}{2} v} \frac{\text{sen } (\mu+1)u}{(\mu+1)u} \cos \frac{1}{2} v + \\ &\quad \left. + \frac{4}{uv} \left( \frac{\frac{1}{2} u}{\text{sen } \frac{1}{2} u} \right)^2 \left( \frac{\frac{1}{2} v}{\text{sen } \frac{1}{2} v} \right)^2 \frac{\text{sen } (\mu+1)u}{(\mu+1)u} \frac{\text{sen } (\nu+1)v}{(\nu+1)v} \right\} dudv \end{aligned}$$

e posto

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \frac{2}{u} \frac{\frac{1}{2} u}{\text{sen } \frac{1}{2} u}, & \tau(u) &= \frac{\frac{1}{2} u}{\text{sen } \frac{1}{2} u}, & \sigma_r(u) &= \frac{\text{sen } (\nu+1)u}{(\nu+1)u}, & \varrho(u) &= \cos \frac{1}{2} u \\ \psi'(u) &= \psi(u)\varrho(u), & \psi_r''(u) &= \psi(u)\tau(u)\sigma_r(u), \end{aligned}$$

si ha

$$\sigma_{\mu\nu}^{(3)}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+u, y+v) - f(x, y+v)] \left\{ \cotg \frac{1}{2} u \cotg \frac{1}{2} v + \right. \\ \left. + \psi'(u)\psi_v''(v) + \psi_\mu''(u)\psi'(v) + \psi_\mu''(u)\psi_v''(v) \right\} dudv.$$

L'integrale relativo alla prima delle espressioni in  $\{ \}$  è  $f_3(x, y)$  e nel n.° 6 abbiamo dimostrato che essa è Lip  $\alpha'$ ,  $0 < \alpha' < \alpha$ . Si può ora ripetere parola per parola il ragionamento fatto nel n.° 6 per quanto riguarda gli integrali relativi alle altre tre espressioni in  $\{ \}$ . Allo scopo basta dimostrare che è, uniformemente rispetto a  $\nu$

$$(12) \quad \begin{cases} |\psi'(u) - \psi'(u-h)| = O(h)O(|u|^{-2}) \\ |\psi_v''(u) - \psi_v''(u-h)| = O(h)O(|u|^{-2}) \end{cases}, \quad 2h \leq |u| \leq \pi$$

e inoltre che

$$(13) \quad \begin{cases} \left| \int_{2h}^{\pi} [\psi'(u-h) - \psi'(u+h)] du \right| = O(1) \\ \left| \int_{2h}^{\pi} [\psi_v''(u-h) - \psi_v''(u+h)] du \right| = O(1) \end{cases}$$

e analogamente per le integrazioni relative all'intervallo  $(-\pi, -2h)$ .

È infatti

$$\psi(u) - \psi(u-h) = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u} - \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (u-h)} = - \frac{2 \operatorname{sen} \frac{h}{4} \cos \frac{2u-h}{4}}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u \operatorname{sen} \frac{1}{2} (u-h)}$$

e quindi per  $2h \leq |u| \leq \pi$

$$|\psi(u) - \psi(u-h)| = O(h)O(|u|^{-2}).$$

È inoltre

$$|\psi(u)| = O(|u|^{-1}).$$

D'altra parte  $\varrho(u) = O(1)$  e

$$\varrho(u) - \varrho(u-h) = \cos \frac{1}{2} u - \cos \frac{1}{2} (u-h) = -2 \operatorname{sen} \frac{h}{4} \operatorname{sen} \frac{2u-h}{4}$$

$$|\varrho(u) - \varrho(u-h)| = O(h).$$

Infine

$$\psi'(u) - \psi'(u-h) = \psi(u)\varrho(u) - \psi(u-h)\varrho(u-h) = \\ = [\psi(u) - \psi(u-h)]\varrho(u) + \psi(u-h)[\varrho(u) - \varrho(u-h)].$$

$$|\psi'(u) - \psi'(u-h)| = O(h)O(|u|^{-2})O(1) + O(|u|^{-1})O(h) = O(h)O(|u|^{-2}).$$

È ora

$$\tau(u) - \tau(u-h) = \frac{\frac{1}{2}u}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}u} - \frac{\frac{1}{2}(u-h)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(u-h)} = -\frac{\frac{1}{2}u}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}u} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{h}{4} \cos \frac{2u-h}{4}}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(u-h)} + \frac{\frac{1}{2}h}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(u-h)}$$

onde

$$|\tau(u) - \tau(u-h)| = O(h)O(|u|^{-1}), \quad 2h \leq |u| \leq \pi.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \sigma_\nu(u) - \sigma_\nu(u-h) &= \frac{\operatorname{sen}(\nu+1)u}{(\nu+1)u} - \frac{\operatorname{sen}(\nu+1)(u-h)}{(\nu+1)(u-h)} = \\ &= \frac{1}{\nu+1} \frac{2u \operatorname{sen}(\nu+1) \frac{h}{2} \cos(\nu+1) \frac{2u-h}{2} - h \operatorname{sen}(\nu+1)u}{u(u-h)} = \\ &= \frac{\operatorname{sen}(\nu+1) \frac{h}{2}}{(\nu+1) \frac{h}{2}} \frac{h \cos(\nu+1) \frac{2u-h}{2}}{u-h} - \frac{\operatorname{sen}(\nu+1)u}{(\nu+1)u} \frac{h}{u-h} \end{aligned}$$

e quindi

$$|\sigma_\nu(u) - \sigma_\nu(u-h)| = O(h)O(|u|^{-1}), \quad 2h \leq |u| \leq \pi.$$

È infine

$$|\psi(u)| = O(|u|^{-1}), \quad |\tau(u)| = O(1), \quad |\sigma_\nu(u)| = O(1)$$

e inoltre

$$\begin{aligned} \psi_\nu''(u) - \psi_\nu''(u-h) &= \psi(u)\tau(u)\sigma_\nu(u) - \psi(u-h)\tau(u-h)\sigma_\nu(u-h) = \\ &= [\psi(u) - \psi(u-h)]\tau(u)\sigma_\nu(u) + \\ &+ \psi(u-h)[\tau(u) - \tau(u-h)]\sigma_\nu(u) + \psi(u-h)\tau(u-h)[\sigma_\nu(u) - \sigma_\nu(u-h)]. \end{aligned}$$

Si ha così

$$\begin{aligned} |\psi_\nu''(u) - \psi_\nu''(u-h)| &= O(h)O(|u|^{-2})O(1)O(1) + \\ &+ O(|u|^{-1})O(h)O(|u|^{-1})O(1) + O(|u|^{-1})O(1)O(h)O(|u|^{-1}) = \\ &= O(h)O(|u|^{-2}). \end{aligned}$$

Per dimostrare le (13) si osservi che è

$$|\psi'(u)| = O(|u|^{-1}), \quad |\psi_\nu''(u)| = O(|u|^{-1}), \quad 2h \leq u \leq \pi.$$

D'altra parte è, ad esempio

$$\int_{2h}^{\pi} [\psi'(u-h) - \psi'(u+h)] du = \int_h^{3h} \psi'(u) du - \int_{\pi-h}^{\pi+h} \psi'(u) du.$$



Ma nel primo integrale l'integrando è  $O(|u|^{-1})$  onde il primo integrale è  $O(1)$ , nel secondo l'integrando è  $O(1)$  onde il secondo integrale è  $O(h)$ . Vale dunque la prima delle (13) e analogamente si dimostra la seconda.

Ora poichè nel n.º 6 non si sono sfruttate delle funzioni  $\cotg \frac{1}{2}u$ ,  $\cotg \frac{1}{2}v$  altro che le proprietà (12) e (13), si può dunque ripetere la dimostrazione del n.º 6 anche per le altre parti che costituiscono  $\sigma_{\mu\nu}^{(3)}(x, y)$ . Il teorema è con ciò dimostrato per  $i=3$ .

Dimostriamo ora il teorema per  $i=1$ . È qui

$$\sigma_{\mu\nu}^{(1)}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u, y+v) \left\{ \cotg \frac{1}{2}u - \frac{\text{sen}(\mu+1)u}{2(\mu+1)\text{sen}^2 \frac{1}{2}u} \right\} \frac{\text{sen}^2(\nu+1)\frac{v}{2}}{(\nu+1)\text{sen}^2 \frac{1}{2}v} dudv$$

onde, detto  $\omega_\nu(v)$  il nucleo dei polinomi di FEJÉR

$$\omega_\nu(v) = \frac{\text{sen}^2(\nu+1)\frac{v}{2}}{(\nu+1)\text{sen}^2 \frac{1}{2}v},$$

si ha

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\nu}^{(1)}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega_\nu(v) dv \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+u, y+v) - f(x, y)] \left[ \cotg \frac{1}{2}u - \psi_\mu''(u) \right] du \\ \sigma_{\mu\nu}^{(1)}(x+h, y) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega_\nu(v) dv \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+u, y+v) - \\ &\quad - f(x+h, y)] \left[ \cotg \frac{1}{2}(u-h) - \psi_\mu''(u-h) \right] du \end{aligned}$$

e basta ora ripetere la dimostrazione di PRIVALOFF già citata, osservando che essa, come si è notato anche sopra, vale non solo per gli integrali ora scritti relativi a  $\cotg \frac{1}{2}u$ , ma anche per gli integrali relativi a  $\psi_\mu''(u)$  poichè le funzioni  $\psi_\mu''(u)$  soddisfano alle (12) e (13) uniformemente rispetto a  $\mu$ . Si ha così

$$|\sigma_{\mu\nu}^{(1)}(x, y) - \sigma_{\mu\nu}^{(1)}(x+h, y)| = O(h^\alpha).$$

D'altra parte è

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\nu}^{(1)}(x, y) - \sigma_{\mu\nu}^{(1)}(x, y+k) &= \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega_\nu(v) dv \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+u, y+v) - f(x+u, y+k+v)] \left[ \cotg \frac{1}{2}u - \psi_\mu''(u) \right] du. \end{aligned}$$

Posto ora come nel n.º 5,  $\delta_1=x$ ,  $\delta_2=2\pi-x$ ,  $\sigma_1=y$ ,  $\sigma_2=2\pi-y$  e supposto ad esempio  $0 < \delta_1 < \pi$ ,  $0 < \sigma_1 < \pi$ ,  $\delta < \delta_1$ ,  $\delta < \sigma_1$ ,  $4k < \delta$ , in ognuno degli inter-

valli  $-\pi \leq v \leq -\sigma_1 - 2k$ ,  $-\sigma_1 + 2k \leq v \leq \pi$  l'integrale interno si può scrivere

$$\int_{-\pi}^{-\delta_1 - 2k} + \int_{-\delta_1 - 2k}^{-\delta_1 + 2k} + \int_{-\delta_1 + 2k}^{\delta_1 - 2k} + \int_{\delta_1 - 2k}^{\pi} .$$

Nel secondo integrale l'integrando è  $O\left(\frac{1}{\delta^2}\right)$  onde l'integrale è  $O(k)O\left(\frac{1}{\delta^2}\right)$ . Nel primo e nel quarto l'integrando è  $O\left(\frac{1}{\delta^2}\right)O(k^\alpha)$  onde detti integrali sono  $O\left(\frac{1}{\delta^2}\right)O(k^\alpha)$ .

Il terzo integrale si può scrivere

$$\int_0^{\delta_1 - 2k} [f(x+u, y+v) - f(x+u, y+k+v) - f(x-u, y+v) + f(x-u, y+k+v)] \left[ \cotg \frac{1}{2} u - \psi_\mu''(u) \right] du$$

e quindi per ogni  $\beta + \gamma = \alpha$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$ , riesce, uniformemente rispetto a  $v$  negli intervalli considerati, minore di

$$2Kk^\beta \int_0^{\delta_1 - 2k} u^\gamma \left\{ \left| \cotg \frac{1}{2} u \right| + \left| \psi_\mu''(u) \right| \right\} du < < 2Kk^\beta \left\{ \int_0^\pi u^\gamma \cotg \frac{1}{2} u du + 2(\mu+1)^{-\gamma} \frac{\pi^2}{4} \int_0^{(\mu+1)\pi} u'^{\gamma-1} \frac{|\text{sen } u'|}{u'} du' \right\} = O(k^\beta).$$

Il relativo integrale rispetto a  $v$  riesce pure  $O(k^\beta)$ . Per  $-\sigma_1 - 2k \leq v \leq -\sigma_1 + 2k$  l'integrale interno è sempre  $O(1)$  onde l'intero integrale è dunque  $O(k)$ .

Si ha così in  $R$

$$|\sigma_{\mu\nu}^{(1)}(x, y) - \sigma_{\mu\nu}^{(1)}(x, y+k)| = O(k^\alpha) \quad \text{per ogni } 0 < \alpha' < \alpha \leq 1.$$

Per quanto riguarda  $\sigma_{\mu\nu}(x, y)$  si osservi che, ad esempio,

$$\sigma_{\mu\nu}(x, y) - \sigma_{\mu\nu}(x, y+k) = \int_{-\pi}^{\pi} \omega_\mu(u) du \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+u, y+v) - f(x+u, y+k+v)] \omega_\nu(v) dv.$$

L'integrale interno si può scrivere

$$\int_{\pi}^{-\sigma_1 - 2k} + \int_{-\sigma_1 - 2k}^{-\sigma_1 + 2k} + \int_{-\sigma_1 + 2k}^{\pi}$$

ma il secondo integrale è  $O\left(\frac{1}{\delta^2}\right)O(k)$  e il primo e il terzo sono  $O(k^\alpha)$  onde senza difficoltà

$$|\sigma_{\mu\nu}(x, y) - \sigma_{\mu\nu}(x, y+k)| = O(k^\alpha)$$

e analogamente per  $\sigma_{\mu\nu}(x, y) - \sigma_{\mu\nu}(x+h, y)$ .