ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

BASILIO MANIÀ

Autovalori di nuclei dipendenti dal parametro

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 8, nº 2 (1939), p. 89-104
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1939_2_8_2_89_0>

AUTOVALORI DI NUCLEI DIPENDENTI DAL PARAMETRO

di BASILIO MANIÀ (Pavia).

1. - In una memoria dei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo » ([1]) C. MIRANDA ha studiato le equazioni integrali lineari della forma

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_T G(x,\,y,\,\lambda)\varphi(y)dy \tag{1}$$

con

$$G(x,\,y,\,\lambda)=K(x,\,y)+\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda}{\lambda+a_i}H_i(x,\,y)$$

dove

$$0<a_1<a_2<....<a_p$$

e $K(x,\,y)$, $H_i(x,\,y)$ $(i=1,\,2,....,\,p)$ sono funzioni simmetriche in x e y.

Nello studio dell'equazione (1) il MIRANDA ammette le tre ipotesi fondamentali seguenti:

IPOTESI A. - I nuclei $H_i(x,\,y)$ sono semidefiniti positivi.

IPOTESI B. - I nuclei $H_i(x,\,y)$ sono specializzati, hanno cioè, ciascuno un numero finito di autovalori:

$$\lambda_{i1},\quad \lambda_{i2},....,\quad \lambda_{iq_i},\qquad (i=1,\,2,....,\,p),$$

per modo che, introdotti i sistemi delle autosoluzioni ortogonali e normalizzate

$$\varphi_{i1}(x),\quad \varphi_{i2}(x),....,\quad \varphi_{iq_i}(x),\qquad (i=1,\,2,....,\,p),$$

si può porre

$$H_i(x,\,y)=\sum_{k=1}^{q_i}\frac{\varphi_{ik}(x)\varphi_{ik}(y)}{\lambda_{ik}}.$$

([1]) C. MIRANDA: *Su di una classe di equazioni integrali il cui nucleo è funzione del parametro.* Rend. Circ. Mat. Palermo, vol. LX (1936).

IPOTESI C. - La quantità $-a_j$ non è un autovalore per il nucleo

$$G_j(x, y) = K(x, y) - \sum_{i=1}^{p}{}^{(j)} \frac{a_j}{a_i - a_j} H_i(x, y),$$

ed inoltre, detta $\psi(x)$ una funzione a quadrato sommabile, la soluzione $\varphi(x)$ dell'equazione

$$\varphi(x) = -a_j \int_T G_j(x, y)\varphi(y)dy + \int_T H_j(x, y)\psi(y)dy$$

non può essere ortogonale a $H_j(x, y)$ se tale non è la funzione $\psi(x)$.

In queste ipotesi, il MIRANDA stabilisce l'esistenza di autovalori dell'equazione (1), dimostra per essi dei teoremi analoghi a quelli noti per gli autovalori dei nuclei simmetrici indipendenti dal parametro, e dei teoremi che estendono quelli di HILBERT e SCHMIDT sugli sviluppi in serie di autofunzioni.

Nel presente lavoro mi propongo di studiare l'equazione (1) con

$$G(x, y, \lambda) = K(x, y) + \sum_i \frac{\lambda}{\lambda + a_i} H_i(x, y) \tag{2}$$

dove la somma al secondo membro della (2) può essere anche estesa a infiniti termini, inoltre non ammetto nè l'ipotesi B nè l'ipotesi C, ed estendo anche l'ipotesi A in quanto ammetto che i numeri a_i, a due a due distinti e tutti diversi da zero, possano anche essere negativi purchè i nuclei $H_i(x, y)$ corrispondenti ad a_i negativi sieno, anzi che semidefiniti positivi, semidefiniti negativi ([2]).

Stabilisco l'esistenza di autovalori dell'equazione (1) e dimostro per essi teoremi analoghi a quelli noti per gli autovalori dei nuclei indipendenti dal parametro. Però il teorema di esistenza degli autovalori si può provare, col metodo che qui seguo, anche in casi molto più generali che pure considero. Inoltre tale metodo presenta il vantaggio di dare delle indicazioni circa la distribuzione degli autovalori rispetto alle costanti assegnate a_i, e può quindi essere utile per il calcolo effettivo degli autovalori.

Teoremi di esistenza degli autovalori.

2. - Nel seguito indicheremo con T un campo misurabile di uno spazio a r dimensioni, con x e y punti variabili di questo spazio, con $K(x, y)$, $H_i(x, y)$, $(i = 1, 2, ...)$, funzioni reali simmetriche di x e y per x e y variabili in T.

Ciò posto dimostriamo il teorema di esistenza degli autovalori dell'equazione (1).

([2]) Anzi nel teorema di esistenza degli autovalori basta supporre che per $a_i > 0$ $[< 0]$ $H_i(x, y)$ non sia semidefinito negativo [positivo].

TEOREMA I. - *Se i nuclei $K(x, y)$, $H_i(x, y)$, $(i=1, 2, \ldots)$, sono maggiorati da una funzione $P(x, y)$ a quadrato sommabile nell'insieme di definizione; se i numeri a_i sono non nulli e a due a due diversi e la serie $\sum_i (1:|a_i|)$ è convergente; se quando $a_i>0$, $H_i(x, y)$ non è semidefinito negativo, e quando $a_i<0$, $H_i(x, y)$ non è semidefinito positivo; allora l'equazione*

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_T G(x, y, \lambda)\varphi(y)dy$$

con

$$G(x, y, \lambda)=K(x, y)+\sum_i \frac{\lambda}{\lambda+a_i} H_i(x, y)$$

ammette almeno un autovalore (reale).

Per dimostrare questo teorema cominciamo con lo studiare il funzionale

$$\Phi[\varphi(x)\,|\,\varrho]=\int_T\int_T G(x, y, \varrho)\varphi(x)\varphi(y)dxdy$$

per $\varphi(x)$ funzione reale a quadrato sommabile in T e ϱ numero reale distinto da tutti i numeri $-a_i$.

Essendo

$$\Phi[\varphi(x)\,|\,\varrho]=\int_T\int_T K(x, y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy+\sum_i \frac{\varrho}{\varrho+a_i}\int_T\int_T H_i(x, y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy,$$

$$\Phi[\varphi(x)\,|\,\varrho_1]-\Phi[\varphi(x)\,|\,\varrho_2]=\sum_i a_i \frac{\varrho_1-\varrho_2}{(\varrho_1+a_i)(\varrho_2+a_i)}\int_T\int_T H_i(x, y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy,$$

si ha

$$|\Phi[\varphi(x)\,|\,\varrho_1]-\Phi[\varphi(x)\,|\,\varrho_2]|\leq$$
$$\leq\int_T \varphi^2(x)dx\sqrt{\int_T\int_T P^2(x, y)dxdy}\sum_i\left|\frac{a_i}{(\varrho_1+a_i)(\varrho_2+a_i)}\right||\varrho_1-\varrho_2|$$

e quindi $\Phi[\varphi(x)\,|\,\varrho]$ è funzione uniformemente continua di ϱ in ogni insieme limitato e chiuso che non contenga nessun punto $-a_i$ e per $\int_T \varphi^2(x)dx$ limitato. Ne segue che se indichiamo con $m(\varrho)$ ed $M(\varrho)$ rispettivamente il limite inferiore e il limite superiore di $\Phi[\varphi(x)\,|\,\varrho]$ al variare di $\varphi(x)$ nel campo delle funzioni a quadrato sommabile in T e tali che $\int_T \varphi^2(x)dx=1$, $m(\varrho)$ ed $M(\varrho)$ sono continue in ogni intervallo non contenente punti $-a_i$.

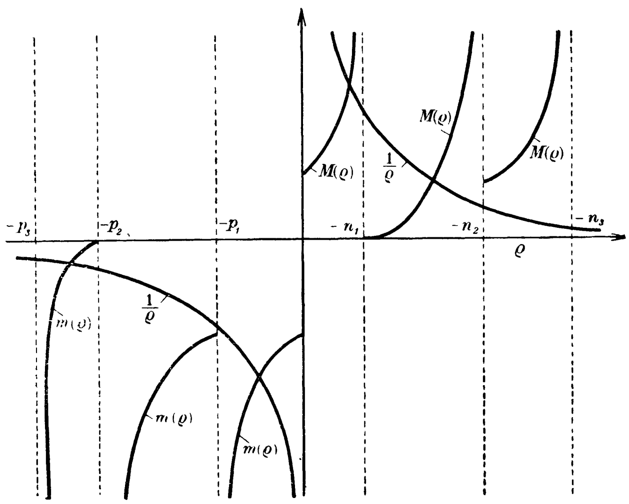
Si vede poi facilmente che se è $a_i > 0$

$$\lim_{\varrho \to -a_i+0} m(\varrho) = -\infty.$$

Analogamente, se $a_i < 0$, è

$$\lim_{\varrho \to -a_i-0} M(\varrho) = +\infty.$$

Se ne deduce che, indicati con $p_1, p_2, ...$ gli a_i positivi disposti in ordine crescente e con $n_1, n_2, ...$ gli a_i negativi disposti in ordine decrescente, il grafico



di $m(\varrho)$ per $\varrho \leqslant 0$ e quello di $M(\varrho)$ per $\varrho \geqslant 0$ hanno una forma del tipo di quella indicata nella figura.

Per la nota proprietà di massimo e di minimo degli autovalori dei nuclei simmetrici, se è $m(\varrho) < 0$ esiste una funzione $\varphi(x \mid \varrho)$ tale che $\int_T \varphi^2(x \mid \varrho) dx = 1$ e per cui $\Phi[\varphi(x) \mid \varrho]$ assume il valore $m(\varrho)$, e si ha

$$\varphi(x \mid \varrho) - \frac{1}{m(\varrho)} \int_T G(x, y, \varrho) \varphi(y \mid \varrho) dy = 0,$$

e se $M(\varrho) > 0$ esiste una funzione $\psi(x \mid \varrho)$ tale che $\int_T \psi^2(x \mid \varrho) dx = 1$ e per cui $\Phi[\varphi(x) \mid \varrho]$ assume il valore $M(\varrho)$ e si ha

$$\psi(x \mid \varrho) - \frac{1}{M(\varrho)} \int_T G(x, y, \varrho) \psi(y \mid \varrho) dy = 0.$$

Quindi se λ è un valore di ϱ per cui

$$0 > m(\lambda) = \frac{1}{\lambda},$$

si ha

$$\varphi(x \mid \lambda) - \lambda \int_T G(x, y \mid \lambda) \varphi(y \mid \lambda) dy = 0$$

e λ risulta un autovalore di $G(x, y, \lambda)$; così pure se λ è un valore di ϱ per cui

$$0 < M(\lambda) = \frac{1}{\lambda},$$

si ha

$$\psi(x \mid \lambda) - \lambda \int_T G(x, y \mid \lambda) \psi(y \mid \lambda) dy = 0$$

e λ è un autovalore di $G(x, y \mid \lambda)$.

Ora basta tracciare, sulla figura che rappresenta i grafici di $m(\varrho)$ ed $M(\varrho)$, anche i due rami di iperbole equilatera che rappresentano la funzione $\frac{1}{\varrho}$ per vedere che, se fra i numeri a_i ve n'è almeno uno positivo, indicato con α il più piccolo di essi, fra 0 e $-\alpha$ esiste almeno un autovalore di $G(x, y, \lambda)$, e, se fra gli a_i ve n'è almeno uno negativo, indicato con $-\beta$ il più grande di essi, fra 0 e β vi è almeno un autovalore di $G(x, y, \lambda)$.

Con ciò il teorema di esistenza degli autovalori è dimostrato. Aggiungiamo una osservazione.

OSSERVAZIONE. - *Il più piccolo degli autovalori positivi di $G(x, y, \lambda)$ determinato col metodo precedente è il più piccolo di tutti gli autovalori positivi di $G(x, y, \lambda)$; e il più grande degli autovalori negativi di $G(x, y, \lambda)$ determinato col metodo precedente è il più grande di tutti gli autovalori negativi di $G(x, y, \lambda)$.*

Infatti se σ è il più piccolo di tutti gli autovalori positivi di $G(x, y, \lambda)$ e $\varphi(x)$ è una delle corrispondenti autofunzioni normalizzata, si ha

$$\varphi(x) = \sigma \int_T G(x, y, \sigma) \varphi(y) dy$$

e perciò

$$\int_T \int_T G(x, y, \sigma) \varphi(x) \varphi(y) dx dy = \frac{1}{\sigma}.$$

Posto

$$K(\varrho) = \iint G(x, y, \varrho) \varphi(x) \varphi(y) dx dy,$$

è sempre

$$K(\varrho) \leq M(\varrho)$$

e

$$K(\sigma) = \frac{1}{\sigma}.$$

Indicato quindi con λ il più piccolo valore positivo di ϱ per cui

$$M(\lambda) = \frac{1}{\lambda},$$

si ha

$$\lambda \leq \sigma.$$

Analogamente se σ è invece il più grande autovalore negativo di $G(x, y, \lambda)$.

3. - Passiamo ora a dimostrare che il metodo seguito nel numero precedente permette di stabilire l'esistenza di autovalori (reali) dell'equazione (1) in casi molto più generali.

TEOREMA II. - *Se, per x e y in T e λ variabile in un intervallo* $(0, -a)$ *con* $a>0$ $[a<0]$, *è*

$$G(x, y, \lambda) = c(\lambda)H(x, y) + G_1(x, y, \lambda);$$

se $H(x, y)$ e $G_1(x, y, \lambda)$ sono funzioni simmetriche di x e y, a quadrato sommabile nel campo di variabilità di (x, y); se, per λ_1 e λ_2 in $(0, -a)$,

$$\lim_{|\lambda_1-\lambda_2|\to 0} \int_T\int_T [G_1(x, y, \lambda_1) - G_1(x, y, \lambda_2)]^2 dxdy = 0 \quad (^3);$$

se $c(\lambda)$ è una funzione continua nell'intervallo $(0, -a)$, *il punto $\lambda=0$ incluso, il punto $\lambda=-a$ escluso, e*

$$\lim_{\lambda\to -a+0} c(\lambda) = -\infty \qquad [\lim_{\lambda\to -a-0} c(\lambda) = -\infty];$$

se $H(x,y)$ non è semidefinito negativo [positivo]; allora nell'intervallo $(0, -a)$ *esiste almeno un autovalore dell'equazione*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_T G(x, y, \lambda)\varphi(y)dy.$$

Supponiamo, per fissare le idee, $a>0$, e consideriamo ancora il funzionale

$$\Phi[\varphi(x)\,|\,\varrho] = \int_T\int_T G(x, y, \varrho)\varphi(x)\varphi(y)dxdy =$$
$$= c(\varrho)\int_T\int_T H(x, y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy + \int_T\int_T G_1(x, y, \varrho)\varphi(x)\varphi(y)dxdy$$

(3) Da questa condizione segue che $\int_T G_1^2(x, y, \lambda)dxdy$ è limitato al variare di λ in $(0, -a)$.

per ϱ variabile in $(0, -a)$ e per le funzioni $\varphi(x)$ tali che

$$\int_T \varphi^2(x)dx = 1.$$

Si vede ancora che $\Phi[\varphi(x) \mid \varrho]$ è funzione continua di ϱ, uniformemente rispetto alle funzioni $\varphi(x)$ considerate, in ogni intervallo appartenente a $(0, -a)$ e non contenente il punto $-a$. Ne segue che anche il limite inferiore $m(\varrho)$ di $\Phi[\varphi(x) \mid \varrho]$ è funzione continua nell'intervallo $(0, -a)$, il punto $-a$ escluso. Inoltre dalle ipotesi fatte segue subito

$$\lim_{\varrho \to -a+0} m(\varrho) = -\infty.$$

Non resta quindi che ripetere il ragionamento del numero precedente.

ESEMPI. - Se $G(x, y, \lambda)$ è dato dalla (2), le condizioni del teorema ora dimostrato sono soddisfatte. Infatti, se fra gli a_i ve n'è uno positivo, supponiamo che sia a_1 e poniamo

$$G(x, y, \lambda) = \frac{\lambda}{\lambda + a_1} H_1(x, y) + G_1(x, y, \lambda)$$

con

$$G_1(x, y, \lambda) = K(x, y) + \sum_{i>1} \frac{\lambda}{\lambda + a_i} H_i(x, y).$$

Si verificano allora facilmente tutte le ipotesi del nostro teorema. Analogamente se fra gli a_i ve n'è uno negativo.

Anche se, mantenendo le ipotesi del teorema del numero 2 sulle costanti a_i e sui nuclei $K(x, y)$, $H_i(x, y)$, poniamo

$$G(x, y, \lambda) = K(x, y) + \sum_i \left(\frac{\lambda}{\lambda + a_i}\right)^{a_i} H_i(x, y)$$

con gli a_i numeri interi positivi dispari, sono soddisfatte le condizioni del teorema ora dimostrato.

4. - Un altro teorema di esistenza degli autovalori dell'equazione (1) è il seguente.

TEOREMA III. - *Se per x e y in T e λ variabile in un intervallo (a, b) del semiasse reale negativo con $a < b$, è*

$$G(x, y, \lambda) = c(\lambda) H(x, y) + G_1(x, y, \lambda);$$

se $H(x, y)$, $G_1(x, y, \lambda)$ sono funzioni simmetriche in x e y a quadrato sommabile nel campo di variabilità di (x, y); se, per λ_1, λ_2 in (a, b),

$$\lim_{|\lambda_1 - \lambda_2| \to 0} \int_T \int_T [G_1(x, y, \lambda_1) - G_1(x, y, \lambda_2)]^2 dx dy = 0;$$

se $c(\lambda)$ è una funzione finita e continua in (a, b), il punto b incluso e il punto a escluso, e

$$\lim_{\lambda \to a+0} c(\lambda) = -\infty;$$

se in un intorno a sinistra di $\lambda = b$ il nucleo $c(\lambda)H(x, y) + G_1(x, y, \lambda)$, per ogni λ fissato, è semidefinito positivo; se $H(x, y)$ non è semidefinito negativo; allora nell'intervallo (a, b) esiste almeno un autovalore dell'equazione

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_T G(x, y, \lambda)\varphi(y)dy.$$

Un teorema analogo vale se (a, b) è un intervallo del semiasse reale positivo.

Definita $m(\varrho)$ come nel numero precedente, si vede ancora che essa è una funzione continua di ϱ nell'interno di (a, b) e che

$$\lim_{\varrho \to a+0} m(\varrho) = -\infty,$$

e in un intorno a sinistra di b

$$m(\varrho) = 0.$$

Non resta quindi che ripetere il ragionamento del numero 2.

5. - Un ulteriore teorema di esistenza degli autovalori dell'equazione (1), che si dimostra con lo stesso metodo del numero 2, è il seguente.

TEOREMA IV. - *$G(x, y, \lambda)$ sia definito per x e y variabili in T e λ variabile sull'intero semiasse positivo [negativo], e sia funzione simmetrica in x e y e a quadrato sommabile nel campo di variabilità di (x, y); in ogni parte limitata del campo di variabilità di λ sia*

$$\lim_{|\lambda_1 - \lambda_2| \to 0} \int_T \int_T [G(x, y, \lambda_1) - G(x, y, \lambda_2)]^2 dxdy = 0;$$

esista una funzione $\varphi(x)$ a quadrato sommabile in T per cui

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_T \int_T G(x, y, \lambda)\varphi(x)\varphi(y)dxdy > 0$$

$$\left[\lim_{\lambda \to -\infty} \int_T \int_T G(x, y, \lambda)\varphi(x)\varphi(y)dxdy < 0\right];$$

allora esiste almeno un autovalore reale positivo [negativo] dell'equazione

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_T G(x, y, \lambda)\varphi(y)dy.$$

Supposto per fissare le idee che il campo di variabilità di λ sia il semiasse positivo, considerato il limite superiore $M(\varrho)$ definito al numero 2, si vede che $M(\varrho)$ è una funzione continua per $\varrho \geqslant 0$ e per ϱ sufficientemente grande e μ conveniente

$$M(\varrho) > \mu > 0.$$

Di qua, nel solito modo, segue l'asserto.

ESEMPIO. - Le condizioni del teorema precedente sono soddisfatte da

$$G(x, y, \lambda) = (\lambda^4 + 3\lambda^3 + 1) H_1(x, y) + (\lambda^3 - \lambda^2 + 2) H_2(x, y)$$

con $H_1(x, y)$, $H_2(x, y)$ funzioni simmetriche a quadrato sommabile e $H_1(x, y)$ semidefinito positivo non quasi ovunque nullo.

Altri teoremi sugli autovalori.

6. - Ritorniamo ora ai nuclei della forma considerata nel teorema I. Per essi vale il

TEOREMA V. - *Nelle ipotesi del teorema I, se per* $a_i > 0$ $[<0]$ $H_i(x, y)$ *è semidefinito positivo* [*negativo*], *tutti gli autovalori sono reali.*

Infatti se λ è un autovalore della (1) si ha

$$\varphi(x) - \lambda \int K(x, y)\varphi(y)dy - \lambda \sum_i \frac{\lambda}{\lambda + a_i} \int_T H_i(x, y)\varphi(y)dy = 0$$

essendo $\varphi(x)$ una funzione normalizzata. È perciò anche

$$\overline{\varphi}(x) - \overline{\lambda} \int_T K(x, y)\overline{\varphi}(y)dy - \overline{\lambda} \sum_i \frac{\overline{\lambda}}{\overline{\lambda} + a_i} \int_T H_i(x, y)\overline{\varphi}(y)dy = 0,$$

dove $\overline{\lambda}$ e $\overline{\varphi}(x)$ sono i coniugati di λ e $\varphi(x)$ rispettivamente.

Moltiplicando la prima equazione per $\overline{\lambda}\overline{\varphi}(x)$, la seconda per $\lambda\varphi(x)$, integrando e sottraendo si trova

$$(\overline{\lambda} - \lambda) \left\{ \int_T |\varphi(x)|^2 dx + \sum_i a_i \frac{|\lambda|^2}{|\lambda + a_i|^2} \int_T \int_T H_i(x, y)\overline{\varphi}(x)\varphi(y)dxdy \right\} = 0;$$

e, poichè la quantità in parentesi doppia è >0,

$$\lambda = \overline{\lambda}$$

cioè λ è reale ([4]).

È evidente che questo ragionamento è valido anche in alcuni casi più generali.

([4]) Cfr. MIRANDA, loc. cit.

7. - Ci proponiamo ora di dimostrare che nelle ipotesi del teorema I, con alcune condizioni supplementari, in ogni insieme limitato e chiuso non contenente nessun punto $-a_i$ cade al più un numero finito di autovalori. Per questo ci occorrono alcune premesse.

Se $\varphi'(x)$ e $\varphi''(x)$ sono due autofunzioni associate a due autovalori diversi λ' e λ'' si ha

$$\varphi'(x)=\lambda'\int_T K(x, y)\varphi'(y)dy+\lambda'\sum_i \frac{\lambda'}{\lambda'+a_i}\int_T H_i(x, y)\varphi'(y)dy,$$

$$\varphi''(x)=\lambda''\int_T K(x, y)\varphi''(y)dy+\lambda''\sum_i \frac{\lambda''}{\lambda''+a_i}\int_T H_i(x, y)\varphi''(y)dy,$$

donde segue

$$\int_T \varphi'(x)\varphi''(x)dx+\sum_i a_i \frac{\lambda'}{\lambda'+a_i}\,\frac{\lambda''}{\lambda''+a_i}\int_T\int_T H_i(x, y)\varphi'(x)\varphi''(y)dxdy=0.$$

Inoltre se $\varphi^{(1)}(x)$, $\varphi^{(2)}(x)$,...., $\varphi^{(k)}(x)$ sono k funzioni a quadrato sommabile in T linearmente indipendenti e λ è un numero reale, si possono determinare k combinazioni lineari omogenee (linearmente indipendenti) $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,...., $\varphi_k(x)$, delle funzioni assegnate in modo che sia

$$\int_T \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx+\sum_i a_i\left(\frac{\lambda}{\lambda+a_i}\right)^2\int_T\int_T H_i(x, y)\varphi_m(x)\varphi_n(y)dxdy=\delta_{m,n}$$

con $\delta_{m,n}=0$ per $m\neq n$ e $\delta_{m,n}=1$ per $m=n$.

È chiaro quindi che date k autofunzioni $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,...., $\varphi_k(x)$ associate a k autovalori (a due a due distinti o no) λ_1, λ_2,...., λ_k, si può supporre che sia

$$(3)\qquad \int_T \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx+\sum_i a_i \frac{\lambda_m}{\lambda_m+a_i}\,\frac{\lambda_n}{\lambda_n+a_i}\int_T\int_T H_i(x, y)\varphi_m(x)\varphi_n(y)dxdy=\delta_{m,n}\qquad [5].$$

Ciò posto dimostriamo un lemma.

LEMMA: *Nelle ipotesi del teorema I, posto, per λ numero reale ed $f(x)$ funzione a quadrato sommabile in T,*

$$Nf=\int_T f^2(x)\,dx$$

e

$$\mathfrak{N}_\lambda f=\int_T f^2(x)dx+\sum_i a_i\left(\frac{\lambda}{\lambda+a_i}\right)^2\int_T\int_T H_i(x, y)f(x)f(y)dxdy,$$

---

[5] Vedi MIRANDA, loc. cit.

ad ogni insieme limitato e chiuso E dell'asse reale non contenente nessun punto $-a_i$ e ad ogni numero $\nu>0$ si può far corrispondere un numero $\mu>0$ tale che, per ogni funzione a quadrato sommabile $f(x)$ e per ogni λ di E per cui

$$\mathfrak{M}\mathfrak{S}_\lambda f \geqslant \nu,$$

sia

$$Nf \geqslant \mu.$$

Infatti

$$\mathfrak{M}\mathfrak{S}_\lambda f \leqslant \left\{ 1+\sum_i |a_i| \left(\frac{\lambda}{\lambda+a_i}\right)^2 \sqrt{\int_T\int_T P^2(x, y)dxdy} \right\} Nf,$$

e poichè la serie

$$\sum_i |a_i| \left(\frac{\lambda}{\lambda+a_i}\right)^2$$

è uniformemente convergente in E, si ha facilmente l'asserto.

8. - Possiamo ora dimostrare il

TEOREMA VI. - *Nelle ipotesi del teorema I, se per $a_i>0$ $[<0]$ $H_i(x, y)$ è semidefinito positivo [negativo]; se i nuclei $H_i(x, y)$ sono equilimitati a partire da un indice i sufficientemente grande; se per ciascun nucleo $H_i(x, y)$ vale lo sviluppo in serie di autofunzioni uniformemente convergente*

$$H_i(x, y)=\sum_k \frac{\varphi_{ih}(x)\varphi_{ih}(h)}{\lambda_{ih}} \quad (6);$$

allora l'equazione

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_T G(x, y, \lambda)\varphi(y)dy$$

ha, in ogni insieme E limitato e chiuso non contenente nessuno dei punti $-a_i$, al più un numero finito di autovalori (contato ciascuno con la sua molteplicità).

Se $\varphi(x)$ è un'autofunzione dell'equazione (1) corrispondente a un autovalore λ si ha

$$\frac{\varphi(x)}{\lambda}=\int_T K(x, y)\varphi(y)dy+\sum_i \frac{\lambda}{\lambda+a_i}\int_T H_i(x, y)\varphi(y)dy,$$

---

(6) Se i nuclei $H_i(x, y)$ sono continui, essendo già semidefiniti, questa condizione è verificata per un teorema di MERCER.

e quindi posto, per p e q numeri interi positivi,

$$H_i^{(q)} = \sum_{h=1}^{q} \frac{\varphi_{ih}(x)\varphi_{ih}(y)}{\lambda_{ih}},$$

$$\overline{H}_i^{(q)} = \sum_{h=q+1}^{\infty} \frac{\varphi_{ih}(x)\varphi_{ih}(y)}{\lambda_{ih}},$$

$$\frac{\psi(x)}{\lambda} = \int_T K(x, y)\varphi(y)dy + \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda}{\lambda + a_i} \int_T H_i^{(q)}(x, y)\varphi(y)dy, \tag{4}$$

è

$$\frac{\varphi(x)}{\lambda} = \frac{\psi(x)}{\lambda} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda}{\lambda + a_i} \int_T \overline{H}_i^{(q)}(x, y)\varphi(y)dy + \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda + a_i} \int_T H_i(x, y)\varphi(y)dy. \tag{5}$$

Osserviamo ancora che se $\varphi(x)$ è un'autofunzione normalizzata corrispondente a un autovalore λ, si ha

$$\int_T\int_T K(x, y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy + \sum_i \frac{\lambda}{\lambda + a_i} \int_T\int_T H_i(x, y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy = \frac{1}{\lambda}.$$

Sieno ora $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,...., $\varphi_k(x)$ k autofunzioni linearmente indipendenti corrispondenti a k autovalori λ_1, λ_2,...., λ_k appartenenti a E. Supponiamo inoltre, come è lecito, che sieno verificate le (3).

Poniamo

$$F_i^{(q)}(x, y) = \frac{1}{a_i} \sum_{h=1} \varphi_{ih}(x)\varphi_{ih}(y),$$

$$\gamma_n = \frac{\psi_n(t)}{\lambda_n} = \int_T K(t, y)\varphi_n(y)dy + \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_n}{\lambda_n + a_i} \int_T H_i^{(q)}(t, y)\varphi_n(y)dy,$$

$$u(x) = K(x, t) - \sum_{n=1}^{k} \gamma_n\varphi_n(x),$$

$$u_i(x) = F_i^{(q)}(x, t) - \sum_{n=1}^{k} \frac{\lambda_n}{\lambda_n + a_i} \gamma_n\varphi_n(x), \qquad (i = 1, 2,...., p),$$

essendo p e q due numeri interi positivi.

È allora

$$H_i^{(q)}(t, y) = a_i \int_T F_i^{(q)}(t, x)H_i^{(q)}(x, y)dx,$$

$$\gamma_n = \int_T K(t, y)\varphi_n(y)dy + \sum_{i=1}^{p} a_i \frac{\lambda_n}{\lambda_n + a_i} \int_T\int_T H_i^{(q)}(x, y)F_i^{(q)}(t, x)\varphi_n(y)dxdy; \tag{6}$$

e, poichè se $H_i(x, y)$ è semidefinito positivo [negativo] anche $H_i^{(q)}(x, y)$ è semidefinito positivo [negativo], è anche

$$\int_T u^2(x)dx + \sum_{i=1}^{p} a_i \int_T\int_T H_i^{(q)}(x, y)u_i(x)u_i(y)dxdy \geqslant 0$$

cioè

$$\begin{aligned}(7)\qquad \sum_{n=1}^{k} \gamma_n^2 \left\{ \int_T \varphi_n^2(x)dx + \sum_{i=1}^{p} a_i \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + a_i}\right)^2 \int_T\int_T H_i^{(q)}(x, y)\varphi_n(x)\varphi_n(y)dxdy \right\} - \\ -2\sum_{n=1}^{k} \gamma_n \left\{ \int_T K(x, t)\varphi_n(x)dx + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{p} a_i \frac{\lambda_n}{\lambda_n + a_i} \int_T\int_T H_i^{(q)}(x, y)F_i^{(q)}(x, t)\varphi_n(y)dxdy \right\} + \\ + \sum_{m, n=1}^{k}{}_{(m \neq n)} \gamma_m\gamma_n \left\{ \int_T \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{p} a_i \frac{\lambda_m}{\lambda_m + a_i} \frac{\lambda_n}{\lambda_n + a_i} \int_T\int_T H_i^{(q)}(x, y)\varphi_m(x)\varphi_n(y)dxdy \right\} + \\ + \int_T K^2(x, t)dx + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{a_i} H_i^{(q)}(t, t) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Assegnato $\varepsilon > 0$ arbitrario, possiamo fissare un intero p sufficientemente grande, e, in dipendenza di p, un intero q sufficientemente grande, in modo che, per $n = 1, 2, \ldots k$, e per ogni coppia di numeri interi m, n distinti compresi fra 1 e k, sia, a causa della (3),

$$\left| 1 - \int_T \varphi_n^2(x)dx - \sum_{i=1}^{p} a_i \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + a_i}\right)^2 \int_T\int_T H_i^{(q)}(x, y)\varphi_n(x)\varphi_n(y)dxdy \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \int_T \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx + \sum_{i=1}^{p} a_i \frac{\lambda_m}{\lambda_m + a_i} \frac{\lambda_n}{\lambda_n + a_i} \int_T\int_T H_i^{(q)}(x, y)\varphi_m(x)\varphi_n(y)dxdy \right| < \varepsilon.$$

Allora dalla (7) segue, tenendo anche conto della (6),

$$(8)\qquad (1 - \varepsilon) \sum_{n=1}^{k} \gamma_n^2 \leqslant \varepsilon \sum_{m, n=1}^{k}{}_{(m \neq n)} |\gamma_m\gamma_n| + \int_T K^2(x, t)dx + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{a_i} H_i^{(q)}(t, t).$$

Ma poichè

$$\frac{\varphi_n(t)}{\lambda_n} = \gamma_n + \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_n}{\lambda_n + a_i} \int_T \overline{H}_i^{(q)}(t, y)\varphi_n(y)dy + \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n + a_i} \int_T H_i(t, y)\varphi_n(y)dy,$$

e

$$H_i(x, y) = H_i^{(q)}(x, y) + \overline{H}_i^{(q)}(x, y),$$

si vede, per le ipotesi dell'enunciato, che p e q possono essere fissati in modo che sia anche

$$(1-\varepsilon)\sum_{n=1}^{k}\gamma_n^2 \geqq (1-\varepsilon)\sum_{n=1}^{k}\frac{\varphi_n^2(t)}{\lambda_n^2} - \varepsilon,$$

$$\sum_{m,n=1}^{k}{}_{(m\neq n)} |\gamma_m\gamma_n| \leqq \sum_{m,n=1}^{k}{}_{m\neq n}\left|\frac{\varphi_m(t)\varphi_n(t)}{\lambda_m\lambda_n}\right| + \varepsilon,$$

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{a_i}H_i^{(q)}(t, t) \leqq \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{a_i}H_i(t, t) + \varepsilon.$$

Perciò dalla (8) si ha

$$(1-\varepsilon)\sum_{n=1}^{k}\frac{\varphi_n^2(t)}{\lambda_n^2} \leqq \varepsilon\sum_{m,n=1}^{k}{}_{(m\neq n)}\left|\frac{\varphi_m(t)\varphi_n(t)}{\lambda_m\lambda_n}\right| + \int_T K^2(x, t)dx + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{a_i}H_i(t, t) + \varepsilon^2 + 2\varepsilon.$$

In questa disuguaglianza non compaiono più p e q, ed ε è arbitrario. Ne viene

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{\varphi_n^2(t)}{\lambda_n^2} \leqq \int_T K^2(x, t)dx + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{a_i}H_i(t, t). \tag{9}$$

Poichè

$$\mathfrak{M}_{\lambda_n}\varphi_n = 1,$$

per il lemma del numero precedente possiamo determinare $\mu > 0$ tale che sia

$$N\varphi_n \geqq \mu,$$

e quindi, integrando la (9) rispetto a t, otteniamo

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\lambda_n^2} \leqq \frac{1}{\mu}\left\{\int_T\int_T K^2(x, t)dxdt + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{a_i}\int_T H_i(t, t)dt\right\}, \tag{10}$$

e di qua si deduce subito un limite superiore per il numero degli autovalori della (1) appartenenti all'insieme E. Infatti se $(-\varLambda, \varLambda)$ è un intervallo contenente E, il numero degli autovalori della (1) appartenenti a E è minore di

$$\frac{\varLambda^2}{\mu}\left\{\int_T\int_T K^2(x, t)dxdt + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{a_i}\int_T H_i(t, t)dt\right\}.$$

9. - Se, come è possibile per il teorema precedente, pensiamo tutti gli autovalori (considerati tante volte quant'è la loro molteplicità) distribuiti in una successione

$$\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots,\ \lambda_n, \ldots$$

e a ciascuno di essi pensiamo associata una delle corrispondenti autofunzioni in modo che valgano le (3), dalla (9) segue il

TEOREMA VII. - *Nelle ipotesi del teorema VI la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n^2}$$

converge quasi ovunque in T verso una funzione integrabile in T.

10. - Infine dimostriamo il

TEOREMA VIII. - *Nelle ipotesi del teorema VI le serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + a_j}\right)^2 \left(\int_T H_j(x, y)\varphi_n(y)dy\right)^2, \qquad (j=1, 2, \ldots),$$

convergono quasi ovunque in T verso funzioni integrabili in T.

Riprendiamo la dimostrazione del teorema VI. Fissato j, per $p > j$, nella formula

$$\int_T u^2(x)dx + \sum_{i=1}^{p} a_i \int_T\int_T H_i^{(q)}(x, y)u_i(x)u_i(y)dxdy \geqslant 0$$

poniamo

$$u(x) = -\sum_{n=1}^{k} \gamma_n\varphi_n(x),$$

$$u_i(x) = -\sum_{n=1}^{k} \frac{\lambda_n}{\lambda_n + a_i}\gamma_n\varphi_n(x), \quad \text{per} \quad i \neq j,$$

$$u_j(x) = F_j^{(q)}(x, t) - \sum_{n=1}^{k} \frac{\lambda_n}{\lambda_n + a_j}\gamma_n\varphi_n(x),$$

con

$$\gamma_n = a_j \frac{\lambda_n}{\lambda_n + a_j}\int_T\int_T H_j^{(q)}(x, y)F_j^{(q)}(x, t)\varphi_n(y)dxdy = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + a_j}\int_T H_j^{(q)}(t, y)\varphi_n(y)dy.$$

Otteniamo allora la disuguaglianza analoga alla (7)

$$\sum_{n=1}^{k} \gamma_n^2 \left\{ \int_T \varphi_n^2(x) dx + \sum_{i=1}^{p} a_i \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + a_i}\right)^2 \int_T\int_T H_i^{(q)}(x, y) \varphi_n(x) \varphi_n(y) dx dy \right\} -$$

$$-2 \sum_{n=1}^{k} \gamma_n^2 + \sum_{m,n=1}^{k}{}_{(m \neq n)} \gamma_m \gamma_n \left\{ \int_T \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{p} a_i \frac{\lambda_m}{\lambda_m + a_i} \frac{\lambda_n}{\lambda_n + a_i} \int_T\int_T H_i^{(q)}(x, y) \varphi_m(x) \varphi_n(y) dx dy \right\} + \frac{1}{a_j} H_j^{(q)}(t, t) \geqslant 0.$$

Fissato $\varepsilon > 0$ arbitrario, con considerazioni analoghe a quelle già fatte si giunge alla disuguaglianza

$$(1-\varepsilon) \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + a_j}\right)^2 \left(\int_T H_j(t, y) \varphi_n(y) dy \right)^2 \leqslant \frac{1}{a_j} H_j(t, t) + \varepsilon^2 + 2\varepsilon +$$

$$+ \varepsilon \sum_{m,n=1}^{k}{}_{(m \neq n)} \left| \frac{\lambda_m}{\lambda_m + a_j} \frac{\lambda_n}{\lambda_n + a_j} \right| \left| \int_T H_j(t, y) \varphi_m(y) dy \right| \left| \int_T H_j(t, y) \varphi_n(y) dy \right|,$$

e poichè ε è arbitrario

$$\sum_{n=1}^{k} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + a_j}\right)^2 \left(\int_T H_j(t, y) \varphi_n(y) dy \right)^2 \leqslant \frac{1}{a_j} H_j(t, t),$$

e di qua segue immediatamente il teorema.