ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SILVIO CINQUINI

Una nuova estensione dei moderni metodi del calcolo delle variazioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 9, nº 3-4 (1940), p. 253-261

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1940_2_9_3-4_253_0>

UNA NUOVA ESTENSIONE DEI MODERNI METODI DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

di SILVIO CINQUINI (Pavia).

Il problema dell'esistenza dell'estremo per gli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria

$$\int_a^b f\left(x,\, y(x),\, \frac{dy(x)}{dx}\right) dx \tag{1}$$

è stato brillantemente risolto, come è ben noto, dal TONELLI nell'ipotesi in cui entrambi i valori a e b siano finiti, ma non è stato ancora considerato da parte di alcun autore il caso in cui uno almeno di tali valori sia infinito.

Volendoci ora occupare di questo caso speciale, occorre innanzi tutto formulare il problema in modo da non escludere «a priori» l'esistenza della soluzione ([1]), e successivamente risolverlo nelle condizioni più generali. A tal uopo serve mirabilmente il metodo diretto del TONELLI, e nella presente Nota ci proponiamo di indicare come esso si possa estendere rapidissimamente al caso in questione, quando si abbia l'avvertenza di usare qualche opportuno accorgimento.

([1]) Potrebbe sorgere l'idea di impostare il problema in questione nella seguente forma, che, per semplicità, indichiamo in un caso particolare. Sia $f(x, y, y') \equiv y'^2$; fra le curve continue $y = y(x)$, $(0 \leqslant x < +\infty)$, per le quali è $y(0) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 1$, trovare quelle che rendono minimo l'integrale $\int_0^{+\infty} y'^2 dx$.

Per ogni intero $n > 0$, consideriamo la curva $y = y_n(x)$, definita nel seguente modo: $y_n(x) \equiv \frac{x}{n}$, per $0 \leqslant x \leqslant n$; $y_n(x) \equiv 1$, per $x > n$. Risulta evidentemente

$$\int_0^{+\infty} y_n'^2(x) dx = \int_0^n \frac{1}{n^2} dx = \frac{1}{n};$$

quindi l'integrale in questione ha come limite inferiore, nella classe delle curve continue, per le quali sono verificate le condizioni indicate, lo zero; ma non esiste alcuna curva minimante, perchè dovrebbe essere $y'(x) = 0$ quasi-dappertutto in $(0, +\infty)$ e quindi $y(x) =$ costante, e non potrebbero essere verificate entrambe le condizioni indicate.

I risultati che si ottengono per gli integrali (1) si possono estendere ai problemi di ordine n, di cui ci siamo occupati in altri lavori, e nei quali la funzione integranda dipende, oltrechè dalle coordinate del punto corrente sulla curva, dagli elementi differenziali dei primi n ordini.

Analoghe estensioni possono farsi anche per i problemi relativi ad integrali doppi in forma ordinaria

$$\iint_D f\left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

nel caso in cui il campo D sia illimitato.

1. - GENERALITÀ. — Per fissare le idee ci limiteremo a considerare il caso in cui nell'integrale (1) sia $b=+\infty$, mentre a sia sempre finito. L'estensione agli altri casi dei risultati ottenuti nella presente Nota è immediata.

α) Supposte note (²) le definizioni di campo A, e di funzione $f(x, y, y')$, diremo *curva ordinaria relativa all'integrale* $\int_a^{+\infty} f(x, y, y')dx$, o più brevemente *curva* $C^{(+\infty)}$, una curva $y=y(x)$, $(a \leq x < +\infty)$, tale che: 1°) ogni punto $(x, y(x))$ appartiene al campo A; 2°) in ogni intervallo (a, t), (con $a<t<+\infty$) $y(x)$ è assolutamente continua ed esiste finito l'integrale del LEBESGUE

$$I_{C^{(t)}} = \int_a^t f(x, y(x), y'(x))dx, \qquad \left(y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}\right);$$

3°) esiste finito l'integrale generalizzato (³)

$$I_{C^{(+\infty)}} = \int_a^{+\infty} f(x, y(x), y'(x))dx.$$

β) Considerato un insieme J di infinite curve $C^{(+\infty)}$: $y=y(x)$, $(a \leq x < +\infty)$, ove a può essere variabile al variare della curva nell'insieme J, diremo che la curva $y=y_0(x)$, $(a_0 \leq x < +\infty)$ è una sua *curva di accumulazione al finito*, se, considerato un qualunque numero reale t, con $t \geq a_0+1$, e preso ad arbitrio un $\varepsilon>0$, ($\varepsilon <1$), esiste sempre almeno una curva dell'insieme J, $y=y_1(x)$,

---

(²) Vedi L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* (2 Volumi) (Zanichelli, Bologna, 1921-1923), Vol. I, n.i 72 e 133.

(³) Cioè [vedi, per esempio, L. TONELLI: *Serie trigonometriche* (Zanichelli, Bologna, 1928) n. 154, p. 406] esiste finito il $\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x, y(x), y'(x))dx$. La funzione $f(x, y(x), y'(x))$ è dunque assolutamente integrabile su ogni intervallo (a, t), ma può non esserlo sull'intervallo $(a, +\infty)$.

$(a_1 \leqslant x < +\infty)$, soddisfacente alle seguenti condizioni: 1°) $|a_0 - a_1| \leqslant \varepsilon$; 2°) per ogni x, con $a_0 \leqslant x \leqslant t$, $a_1 \leqslant x \leqslant t$, è $|y_0(x) - y_1(x)| \leqslant \varepsilon$; 3°) per ogni x, tale che $a_1 \leqslant x < a_0$, è $|y_0(a_0) - y_1(x)| \leqslant \varepsilon$.

Ciò premesso, diremo che un insieme J di curve $C^{(+\infty)}$ costituisce una *classe completa al finito*, quando ogni sua curva di accumulazione al finito, se è una curva $C^{(+\infty)}$, appartiene all'insieme J.

Per esempio: dati due punti (x_0, y_0), (x_1, y_1), con $(x_0 < x_1)$ appartenenti al campo A, tutte le curve $C^{(+\infty)}$: $y = y(x)$, $(x_0 \leqslant x < +\infty)$, per le quali è $y(x_i) = y_i$, $(i = 0, 1)$, costituiscono una classe completa al finito.

2. - UN TEOREMA DI ESISTENZA DEL MINIMO. — Chiamato campo A^* un campo A per il quale esiste un numero positivo Y^*, tale che in tutti i suoi punti sia verificata la disuguaglianza $|y| \leqslant Y^*$, dimostriamo il seguente teorema che estende al problema in questione una nota proposizione [4].

Supposto che: 1°) *esista un numero finito* ω *e una funzione* $\psi(x)$ *definita e continua per ogni* $x \geqslant \omega$ *e tale che esista finito l'integrale generalizzato*

$$\int_{\omega}^{+\infty} \psi(x)\,dx,$$

in modo che in tutti i punti (x, y) *di* A^* *sia* $x \geqslant \omega$, *ed anche*

$$f(x, y, y') \geqslant \psi(x) \tag{2}$$

per ogni valore finito di y'; 2°) *l'integrale* $I_{C^{(+\infty)}}$ *sia quasi-regolare positivo*; 3°) *in corrispondenza ad ogni numero* $h > \omega$, *esista una funzione* $\Phi_h(z)$, *definita in* $(0, +\infty)$, *inferiormente limitata, tale che* $\Phi_h(z) : z \to +\infty$, *per* $z \to +\infty$, *e per la quale si abbia in quella parte del campo* A^* *nella quale è* $x \leqslant h$

$$f(x, y, y') \geqslant \Phi_h(|y'|);$$

allora in ogni classe di curve $C^{(+\infty)}$: $y = y(x)$, $(a \leqslant x < +\infty)$, *appartenenti al campo* A^*, *la quale sia completa al finito e tale che esista un valore finito* a' *in modo che sia sempre* $a \leqslant a'$, *esiste il minimo assoluto di* $I_{C^{(+\infty)}}$.

Per la dimostrazione osserviamo, innanzi tutto, che possiamo sempre supporre che sia $\psi(x) \equiv 0$, e che quindi la funzione $f(x, y, y')$ sia non negativa, perchè in caso contrario, in virtù della (2), basterebbe considerare in luogo della funzione f la

$$f_1(x, y, y') \equiv f(x, y, y') - \psi(x),$$

osservando che la f_1 soddisfa a condizioni analoghe alla f.

---

[4] Vedi L. TONELLI: *Sugli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria.* (Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II, Vol. III (1934), pp. 401-450) n. 9. Anche le altre proposizioni del TONELLI sono suscettibili di analoghe estensioni.

Ciò premesso, per ogni classe K di curve $C^{(+\infty)}$ soddisfacente alle condizioni indicate alla fine del nostro enunciato, risulta $I_{C^{(+\infty)}} \geqslant 0$, e quindi il limite inferiore di $I_{C^{(+\infty)}}$ in K è finito e verrà indicato con i.

Considerata una successione di curve di K

$$C_n^{(+\infty)}: \quad y = y_n(x), \quad (a_n \leqslant x < +\infty), \qquad (n = 1, 2, \dots) \tag{3}$$

minimizzante $I_{C^{(+\infty)}}$, tale cioè che sia

$$I_{C_n^{(+\infty)}} \leqslant i + \frac{1}{n},$$

in virtù della condizione 3°) dell'enunciato e ragionando in modo analogo al TONELLI, si prova che per ogni $h' > a'$, con h' scelto comunque, ma fissato, le funzioni $y_n(x)$, $(a_n \leqslant x \leqslant h')$, $(n = 1, 2, \dots)$ sono equiassolutamente continue.

Pertanto per $h' = a' + 1$ si può estrarre dalla (3) una successione parziale

$$C_{1,n}^{(+\infty)}: \quad y = y_{1,n}(x), \quad (a_{1,n} \leqslant x < +\infty), \qquad (n = 1, 2, \dots) \tag{4}$$

in modo che la successione $y_{1,n}(x)$, $(a_{1,n} \leqslant x \leqslant a' + 1)$ converga uniformemente verso una funzione assolutamente continua $y_{0,1}(x)$, $(a_0 \leqslant x \leqslant a' + 1)$.

Successivamente per $h' = a' + 2$, si può estrarre dalla (4) una successione parziale di curve

$$C_{2,n}^{(+\infty)}: \quad y = y_{2,n}(x), \quad (a_{2,n} \leqslant x < +\infty), \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

in modo che la successione $y_{2,n}(x)$, $(a_{2,n} \leqslant x \leqslant a' + 2)$ converga uniformemente verso una funzione assolutamente continua $y_{0,2}(x)$, $(a_0 \leqslant x \leqslant a' + 2)$, e tale inoltre che in $(a_0, a' + 1)$ sia $y_{0,2}(x) \equiv y_{0,1}(x)$.

Procedendo a questo modo concludiamo che se consideriamo la successione di curve

$$C_{1,1}^{(+\infty)}, \quad C_{2,2}^{(+\infty)}, \dots, \quad C_{n,n}^{(+\infty)}, \dots$$

risulta

$$I_{C_{n,n}^{(+\infty)}} \leqslant i + \frac{1}{n}, \tag{5}$$

ed essa inoltre converge verso una curva

$$y = y_0(x), \qquad (a_0 \leqslant x < +\infty) \tag{6}$$

appartenente al campo A^*, mentre su ogni intervallo $(a_0, a' + n)$ la convergenza è uniforme e la funzione $y_0(x)$ è assolutamente continua.

Per ogni $t > a'$ risulta, siccome $f \geqslant 0$,

$$\int_{a_{n,n}}^{t} f(x, y_{n,n}, y'_{n,n})\,dx \leqslant i + \frac{1}{n},$$

e quindi si conclude, come in TONELLI, che la funzione $f(x, y_0(x), y_0'(x))$ è integrabile su ogni intervallo (a_0, t). Per provare che essa è integrabile anche sull'intervallo $(a_0, +\infty)$, teniamo presente che, da quanto abbiamo ora osservato, segue, in virtù delle ipotesi del nostro enunciato, che, per $t > a'$, con t qualunque ma fissato, l'integrale

$$\int_{a_0}^{t} f(x, y, y')\,dx$$

è semicontinuo inferiormente sulla curva $y = y_0(x)$, $(a_0 \leqslant x \leqslant t)$.

Perciò, fissato comunque $t > a'$, e preso ad arbitrio $\varepsilon > 0$ (e < 1), possiamo determinare un intero n_t in modo che, per ogni $n > n_t$, risulti

$$\int_{a_{n,n}}^{t} f(x, y_{n,n}, y'_{n,n})\,dx > \int_{a_0}^{t} f(x, y_0, y_0')\,dx - \varepsilon, \tag{7}$$

e quindi, siccome f è non negativa, e tenendo conto della (5)

$$i + \frac{1}{n} > \int_{a_0}^{t} f(x, y_0, y_0')\,dx - \varepsilon,$$

ed anche

$$i + 2 > \int_{a_0}^{t} f(x, y_0, y_0')\,dx.$$

Ma questa disuguaglianza è verificata per ogni t, e perciò, siccome f è non negativa, si conclude che la funzione $f(x, y_0(x), y_0'(x))$ è integrabile anche sull'intervallo $(a_0, +\infty)$. Pertanto la (6) è una curva $C^{(+\infty)}$, che indicheremo con $C_0^{(+\infty)}$, e che appartiene alla classe K, perchè questa classe è completa al finito.

Per provare il nostro teorema rimane da dimostrare che è $I_{C_0^{(+\infty)}} = i$.

A tal uopo, preso $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, determiniamo un $\bar{t} > a'$, in modo che, per $t > \bar{t}$, risulti

$$\int_{t}^{+\infty} f(x, y_0, y_0')\,dx < \varepsilon,$$

e successivamente, fissato $t > \bar{t}$, determiniamo $\bar{n}$ in modo che per $n > \bar{n}$ sia verificata la (7). Pertanto, siccome è $f \geqslant 0$, risulta

$$\int_{a_{n,n}}^{+\infty} f(x, y_{n,n}, y'_{n,n})\,dx > \int_{a_0}^{+\infty} f(x, y_0, y_0')\,dx - 2\varepsilon,$$

e quindi in virtù della (5)

$$i+2\varepsilon \geq \int_{a_0}^{+\infty} f(x, y_0, y_0')dx,$$

da cui, siccome ε è ad arbitrio, ed i è il limite inferiore di $I_{C^{(+\infty)}}$ in K, ne segue immediatamente l'asserto.

OSSERVAZIONE. — È importante mettere in rilievo che, se non è verificata la condizione 1°) del nostro enunciato, il minimo può mancare ([5]):

Sia $A^* \equiv [0 \leq x < +\infty, \ -2 \leq y \leq 2]$; $f(x, y, y') \equiv y'^2 + \frac{y-1}{1+x}$; e si consideri la classe K delle curve $C^{(+\infty)}$ per le quali è $y(0)=y(1)=0$. Sono verificate tutte le condizioni del teorema del presente numero ad eccezione della 1°).

Ogni curva $y=y_n(x)$, $(0 \leq x < +\infty)$, con $y_n(x) \equiv 0$, per $0 \leq x \leq 1$; $y_n(x) \equiv \frac{x-1}{n}$, per $1 < x \leq 1+n$; $y_n(x) \equiv 1$, per $1+n < x < +\infty$, appartiene alla classe K e risulta:

$$I_{C_n^{(+\infty)}} = 1 + \frac{1}{n}(1+2 \lg 2) - \frac{n+2}{n} \lg(2+n).$$

([5]) Mettiamo in rilievo che, definita in modo evidente la semicontinuità dell'integrale $I_{C^{(+\infty)}}$, si dimostra facilmente che se è verificata la condizione 1°) del presente numero, ogni integrale $I_{C^{(+\infty)}}$ quasi-regolare seminormale è semicontinuo inferiormente. Ebbene se non è verificata la condizione 1°) la semicontinuità può mancare come mostra il seguente esempio.

Sia $A^* \equiv \left[1 \leq x < +\infty, \ -\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{1}{x}\right]$; e si consideri la funzione $f(x, y, y') \equiv y'^2 - y$, per la quale è $f_{y'y'} = 2$. Quindi, per t finito e >1, ogni integrale $\int_1^t (y'^2 - y)dx$ è semicontinuo inferiormente. Inoltre in tutto il campo A^* è $f(x, y, y') \geq -\frac{1}{x}$.

Consideriamo ora le curve

$$C_0^{(+\infty)}: \quad y = y_0(x), \text{ con } y_0(x) \equiv 0, \quad (1 \leq x < +\infty)$$

e, per ogni intero $n > 2$,

$$C_n^{(+\infty)}: \quad y = y_n(x), \text{ con } y_n(x) \equiv x-1, \text{ per } 1 \leq x \leq 1+\frac{1}{n}; \ y_n(x) \equiv \frac{1}{n}, \text{ per } 1+\frac{1}{n} < x \leq n - \frac{1}{n};$$

$$y_n(x) \equiv -x+n, \text{ per } n - \frac{1}{n} < x \leq n; \ y_n(x) \equiv 0, \text{ per } n < x < +\infty.$$

Risulta

$$I_{C_n^{(+\infty)}} = \int_1^{+\infty} (y_n'^2 - y_n)dx = -1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Quindi $\lim_{n \to +\infty} I_{C_n^{(+\infty)}} = -1$. Le curve $C_n^{(+\infty)}$, per $n \to +\infty$, convergono uniformemente in tutto l'intervallo $(1, +\infty)$ verso la $C_0^{(+\infty)}$, ma è $I_{C_0^{(+\infty)}} = 0$.

Evidentemente per $n \to +\infty$, è $I_{C_n^{(+\infty)}} \to -\infty$, e quindi nella classe K non esiste il minimo di $I_{C^{(+\infty)}}$.

3. - Estensioni del teorema del n.° 2. — Abbandonata l'ipotesi che nel campo A la y si mantenga limitata, sussistono i seguenti teoremi che estendono note proposizioni [6].

a) Se: 1°) *in tutto il campo A sono verificate le condizioni* 1°) *e* 2°) *del n.° 2*; 2°) *in corrispondenza ad ogni coppia di numeri h, Y con $h>\omega$, $Y>0$, esiste una funzione $\Phi_{h,Y}(z)$, definita in* $(0, +\infty)$, *inferiormente limitata tale che $\Phi_{h,Y}(z) : z \to +\infty$, per $z \to +\infty$, e per la quale si abbia in quei punti (x, y) di A che appartengono al campo $A_{h,Y} \equiv [\omega \leqslant x \leqslant h, \ |y| \leqslant Y]$*

$$f(x, y, y') \geqslant \Phi_{h,Y}(|y'|);$$

3°) *esistono una funzione $g(x)$ non negativa e integrabile sull'intervallo* $(0, +\infty)$, *un numero $\lambda>0$, e una funzione $\varphi(u)$ definita per $|u| \geqslant \lambda$, continua, non negativa, e tale che*

$$\int_{\lambda}^{+\infty} \varphi(u)du = +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{-\lambda} \varphi(u)du = +\infty,$$

in modo che si abbia in tutti i punti (x, y) di A, con $|y| \geqslant \lambda$,

$$f(x, y, y') - \psi(x) \geqslant |y'| \, \varphi(y),$$

per tutti gli y' che verificano la disuguaglianza $|y'| \, \varphi(y) \geqslant g(x)$;

allora in ogni classe di curve $C^{(+\infty)}$: $y = y(x)$, $(a \leqslant x < +\infty)$ appartenenti al campo A, la quale sia completa al finito e tale che per ogni sua curva esista almeno un punto $(x, y(x))$ appartenente ad un dato insieme limitato e chiuso, esiste sempre il minimo assoluto di $I_{C^{(+\infty)}}$.

Per la dimostrazione basta ripetere, con qualche complemento, un noto ragionamento [7].

Esempio. — Sia $A \equiv [\omega \leqslant x < +\infty, \ -\infty < y < +\infty]$, con $\omega > 0$,

$$f(x, y, y') \equiv \frac{(1+x^2)y'^2}{1+y^2} + \frac{x \operatorname{sen} x + y^2}{x^2 + y^2}.$$

---

(6) Per la prima cfr. E. J. McShane: *Existence Theorems for ordinary Problems of the Calculus of Variations* (Part. II). (Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II, Vol. III (1934), pp. 287-315), § 11.

Per la seconda cfr. S. Cinquini: *Un teorema di esistenza dell'estremo in campi illimitati.* (Rend. R. Istituto Lombardo, Vol. LXXI (1938)), n.i 1 e 3, β).

(7) Cfr. per esempio, S. Cinquini: *Sopra l'esistenza della soluzione nei problemi di Calcolo delle Variazioni di ordine n.* (Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II, Vol. V (1936), pp. 169-190), n.° 12.

È sempre $f \geqslant \frac{\text{sen}\, x}{x}$; inoltre $f - \frac{\text{sen}\, x}{x} \geqslant \frac{(1+x^2)y'^2}{1+y^2}$, e quindi per $|y| \geqslant 1$ risulta $f - \frac{\text{sen}\, x}{x} \geqslant \frac{(1+x^2)y'^2}{2y^2}$, e perciò

$$f - \frac{\text{sen}\, x}{x} \geqslant \left|\frac{y'}{y}\right|, \quad \text{per} \quad \left|\frac{y'}{y}\right| \geqslant \frac{2}{1+x^2}.$$

È dunque verificata la condizione 3°) per $g(x) \equiv \frac{2}{1+x^2}$, $\lambda = 1$, $\varphi(u) \equiv \frac{1}{|u|}$, $\psi(x) \equiv \frac{\text{sen}\, x}{x}$, e sono pure soddisfatte le altre condizioni.

β) *Se*: 1°) *esistono un numero finito* ω, *e tre funzioni* $\Phi(z)$, $g(z)$, $\psi(x)$, *con* $\psi(x)$ *definita e continua per* $x \geqslant \omega$, *e tale che esista finito l'integrale generalizzato* $\int_\omega^{+\infty} \psi(x)dx$, $\Phi(z)$ *e* $g(z)$ *definite per ogni* $z \geqslant 0$, *non negative e tali che, per* $z \to \infty$, *sia* $\frac{\Phi(z)}{z} \to +\infty$, $\underline{\lim}\, g(z) = g_1 > 0$, *in modo che in tutti i punti* (x, y) *di* A *sia* $x \geqslant \omega$, *ed anche*

$$f(x, y, y') \geqslant \Phi(|y'|) + g(|y|) + \psi(x), \tag{8}$$

per tutti i valori finiti di y'; 2°) *l'integrale* $I_{C^{(+\infty)}}$ *è quasi-regolare positivo*; *allora in ogni classe di curve* $C^{(+\infty)}$: $y = y(x)$, $(a \leqslant x < +\infty)$, *appartenenti ad* A, *la quale sia completa al finito e tale che esista un valore finito* a', *in modo che sia sempre* $a \leqslant a'$, *esiste il minimo assoluto di* $I_{C^{(+\infty)}}$.

Analogamente a quanto abbiamo detto all'inizio della dimostrazione del n.° 2, possiamo supporre $\psi(x) \equiv 0$, e limitarci a considerare una sottoclasse K' di K, tale che per ogni sua curva $y = y(x)$, $(a \leqslant x < +\infty)$ sia

$$I_{C^{(+\infty)}} \leqslant i + 1.$$

Determinato poi un numero $\bar{y} > 0$ in modo che, per ogni $|y| > \bar{y}$, sia $g(|y|) \geqslant \frac{1}{2} g_1$, in ogni intervallo di $(a, +\infty)$ di ampiezza maggiore di $2(i+1) : g_1$, deve esistere almeno un valore di x per il quale risulta $|y(x)| \leqslant \bar{y}$.

Da questo risultato, tenendo conto dell'ipotesi fatta sulla funzione Φ, si deduce con un noto ragionamento, che esiste un numero fisso $Y_0 > 0$, tale che per qualunque curva di K' risulta sempre

$$|y(x)| \leqslant Y_0$$

e siamo così ricondotti alle condizioni del teorema del n.° 2.

ESEMPIO. — Sia $A \equiv [0 \leqslant x < +\infty, \ -\infty < y < +\infty]$; la funzione

$$f(x, y, y') \equiv y'^2 + \frac{2y^2 + \text{sen}\, x^2}{1+y^2}$$

soddisfa alle condizioni del presente capoverso, essendo

$$f(x, y, y') \geqslant y'^2 + \frac{y^2}{1+y^2} + \operatorname{sen} x^2.$$

4. - COMPLEMENTI. — α) Per i problemi di Calcolo delle Variazioni di ordine n in forma ordinaria, nei quali cioè si deve render minimo un integrale della forma

$$\int_a^b f\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \dots, \frac{d^n y(x)}{dx^n}\right) dx,$$

si possono dedurre, dai risultati stabiliti in alcuni miei precedenti lavori ([8]), in condizioni analoghe a quelle dei numeri precedenti, teoremi di esistenza dell'estremo validi nel caso in cui almeno uno dei valori a e b sia infinito.

β) Anche per gli integrali doppi in forma ordinaria

$$\iint_D f\left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\right) dxdy$$

si possono stabilire, nel caso in cui il campo D sia illimitato, opportune estensioni dei teoremi stabiliti dal TONELLI in una fondamentale Memoria ([9]). Per brevità ci limitiamo a segnalare che l'enunciato del teorema stabilito da tale A. al n.° 18 del lavoro citato si estende immediatamente al caso in cui il campo D sia illimitato, sostituendo alla condizione I) che figura in tale enunciato la seguente: *esistono due numeri* $\alpha > 0$, $\mu > 0$, *e una funzione* $\psi(x, y)$ *finita e continua per ogni* (x, y) *di* D *e tale che esista finito l'integrale generalizzato* $\iint_D \psi(x, y) dxdy$, *in modo che in tutti i punti* (x, y) *di* D *e per tutti i valori finiti di* z, p, q *sia*

$$F(x, y, z, p, q) > \mu \{ |p|^{2+\alpha} + |q|^{2+\alpha} \} + \psi(x, y).$$

([8]) Vedi luogo citato in ([7]) ed anche luoghi citati nella nota ([3]) del lavoro citato per secondo in ([6]).

([9]) L. TONELLI: *L'estremo assoluto degli integrali doppi.* (Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II, Vol. II (1933), pp. 89-130).