

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SALVATORE CHERUBINO

Sulle corrispondenze algebriche fra curve

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 10, n° 1 (1941), p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1941_2_10_1_1_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1941, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLE CORRISPONDENZE ALGEBRICHE FRÀ CURVE

di SALVATORE CHERUBINO (Pisa).

Questa Nota è divisa in tre paragrafi.

Nel primo si fa vedere come le relazioni dalle quali R. TORELLI sperava potessero dedursi almeno alcune delle incognite relazioni fra i periodi normali, di un sistema fondamentale di integrali di prima specie attaccati a una curva algebrica, si riducono a quelle già note di RIEMANN.

Nel secondo si indaga nuovamente sul prodotto delle matrici degli interi caratteristici associati ad una corrispondenza algebrica ed alla sua inversa, fra due curve di egual genere, distinte o coincidenti, modificando e completando osservazioni precedenti.

Se si verifica la diagonalità, essa dà luogo, *in generale*, alla permutabilità delle due matrici predette, anche per curve coincidenti, onde può mettersi in relazione con un'osservazione del ROSATI.

Nel terzo paragrafo si dà una condizione necessaria e sufficiente perchè due curve aventi una stessa varietà di JACOBI siano birazionalmente identiche. Questa condizione si deduce dai risultati ottenuti dall'A. in due lavori già apparsi in questi stessi Annali ⁽¹⁾ e nel presente.

Per quanto il risultato del primo paragrafo sia, in certo senso, soltanto negativo, pure esso costituisce ancora una conferma della grande utilità e della poderosa efficacia, in geometria algebrica, del simbolismo e degli algoritmi di matrici ⁽²⁾.

⁽¹⁾ E cioè i seguenti: *a) Su l'indice di Kronecker pei cicli analitici sulle riemanniane delle curve algebriche* [s. II, vol. VIII (1939-XVII)]; *b) Qualche applicazione dell'indice di Kronecker alle corrispondenze algebriche tra curve* [s. II, vol. IX (1940-XVIII)]. Questi due lavori sono riassunti nella Nota dal titolo: *c) Sur l'indice de Kronecker et les correspondances algébriques entre courbes* [Comptes Rendus, t. 208, p. 1473 (8 mai 1939)]. La nota *b)* contiene anche la proposizione che, nel § 2 della presente, si riesamina e si estende al caso di curve coincidenti.

⁽²⁾ L'introduzione sistematica delle matrici nello studio delle varietà abeliane reali si trova nella mia Memoria: *Sul concetto di parità nella teoria delle varietà abeliane reali e su alcune sue applicazioni* [Atti R. Acc. Sc. di Napoli, s. 2^a, vol. XX (1933-XI)]. Ma il simbolismo delle matrici era correntemente da me adoperato sin dal 1928. [Vedasi, ad esempio, la mia Nota lineea (1928): *Le matrici caratteristiche delle simmetrie sulle varietà abeliane reali*].

I risultati degli altri due paragrafi costituiscono un'altra applicazione del metodo topologico-trascendente già impiegato nelle due Note mentovate poco fa.

§ 1. - Le relazioni di R. Torelli.

1. - Per rendersi conto dell'interesse suscitato, a suo tempo, dalle relazioni di cui ora ci occuperemo, e per comprendere l'importanza del risultato che esporremo nel terzo paragrafo, è opportuno, e forse necessario, fare una breve premessa di indole storico-bibliografica.

La scoperta fatta dallo HUMBERT, nel 1900 ⁽³⁾, di curve iperellittiche birazionalmente distinte e aventi una stessa superficie rappresentatrice delle loro coppie di punti richiamò, alcuni anni dopo, l'attenzione dei geometri algebrici italiani sulle curve possedenti varietà di JACOBI birazionalmente identiche (o coincidenti).

Un primo bel risultato fu conseguito dal SEVERI, il quale provò che: *curve prive di corrispondenze simmetriche singolari e possedenti una stessa varietà di Jacobi (o due birazionalmente identiche) son trasformate birazionali l'una dell'altra* ⁽⁴⁾.

Contemporaneamente R. TORELLI, come applicazione delle sue ricerche sulle serie algebriche ⁽⁵⁾, dimostrò che il possesso di una comune matrice di periodi normali per gl'integrali di prima specie è condizione (necessaria e) sufficiente per l'identità birazionale di due curve ⁽⁶⁾.

Poco dopo, lo stesso A. ⁽⁷⁾ riescì ad ottenere assai semplicemente il risultato del SEVERI riferito di sopra ed a scrivere alcune relazioni fra i periodi degli integrali normali di prima specie di due curve birazionalmente identiche ⁽⁸⁾, le quali, messe in rapporto con altro suo teorema, gli fecero concepir la speranza di conseguire almeno parte delle incognite relazioni fra i periodi.

⁽³⁾ G. HUMBERT: *Sur les fonctions abéliennes singulières*. Mem. II [Journal de Liouville, t. 6 (1900)] n. 181, p. 326.

⁽⁴⁾ L'interessante osservazione fu fatta conoscere soltanto nel 1915, in calce alla Nota di A. COMESSATTI: *Sulle trasformazioni Hermitiane delle varietà di Jacobi* [Atti Torino, volume 50 (1915)].

⁽⁵⁾ R. TORELLI: *Sulle serie algebriche semplicemente infinite di gruppi di punti appartenenti a una curva algebrica* [Rend. Pal., t. XXXVII (1914)], pp. 1-22.

⁽⁶⁾ R. TORELLI: *Sulle varietà di Jacobi* [Rend. Lincei, 1913] Nota I, § 2. Questo importante risultato venne riottenuto, con più feconda impostazione, da A. COMESSATTI nella nota cit. ⁽⁴⁾.

⁽⁷⁾ *Alcune questioni di geometria sopra una curva algebrica* [Rend. Licei, 1915] Nota II, n. 10.

⁽⁸⁾ Al n. 8 della Nota ora citata.

Questa speranza, in un primo momento condivisa da altri geometri ⁽⁹⁾, è andata sinora delusa, forse perchè, come ora faremo vedere in modo semplice e rapido, dette relazioni si riducono a quelle ben note di RIEMANN.

2. - Siano C e D le due curve, p il loro genere, ω , Ω le matrici dei periodi normali di due sistemi fondamentali di integrali abeliani di prima specie, calcolati su retrosezioni. Se C e D son birazionalmente identiche, dicendo \mathfrak{F} la trasformazione birazionale che porrà C in D , e \mathfrak{F}^{-1} quella che ritorna D in C , a queste corrispondenze son associate (HURWITZ) due relazioni in matrici, del tipo

$$(1) \quad \pi\omega = \Omega T_{-1}, \quad \pi^*\Omega = \omega T_{-1}^*,$$

ove π , π^* son matrici complesse di ordine p , e T , T^* matrici intere di ordine $2p$. Fra T e T^* sussiste la relazione

$$(2) \quad T^* = -I_0 T_{-1} I_0,$$

dove I_0 è la matrice ⁽¹⁰⁾

$$I_0 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -I & 0 \end{array} \right),$$

che ci dà:

$$(3) \quad \omega I_0 \omega_{-1} = 0_1 \quad \Omega I_0 \Omega_{-1} = 0,$$

eguaglianze in matrici che raccolgono le relazioni di RIEMANN pei periodi degli integrali di prima specie di C e di D .

Per la biunivocità delle corrispondenze \mathfrak{F} e \mathfrak{F}^{-1} , le matrici T e T^* , oltre che alla (2), soddisfano alle relazioni ⁽¹¹⁾

$$(4) \quad T^* T = T T^* = I_{2p},$$

dove I_{2p} denota la matrice identica di ordine $2p$. Queste (4), tenendo conto della (2), si scrivon anche:

$$(5) \quad T I_0 T_{-1} = T_{-1} I_0 T = I_0.$$

⁽⁹⁾ Vedasi la *Relazione* (di E. BERTINI, G. BIANCHI e V. VOLTERRA) *sul conferimento del premio per la matematica per l'anno 1916* [Mem. della Soc. Ital. delle Scienze, t. XX, s. III, p. XV] ed F. SEVERI: *Ruggero Torelli* (1884-1915) [Boll. Bibl. e Storia delle Matematiche (1916) fasc. 1], pp. 17-18. Confrontisi anche l'altra necrologia del TORELLI dovuta al CASTELNUOVO.

⁽¹⁰⁾ Nella quale I indica la matrice identica di ordine p , 0 quella nulla. Cfr. la mia Nota citata qui appresso.

⁽¹¹⁾ CHERUBINO S.: *Identità birazionale di due curve algebriche* [Rend. Sem. Roma (1939)] § 2, n. 5.

Adottando notazioni più vicine a quelle di HURWITZ, cioè supponendo che gl'integrali considerati sian normali, scriveremo

$$T_{-1} = \left(\frac{h}{g} \middle| \frac{H}{G} \right),$$

ove h, g, H, G son matrici (intere) di ordine p , sicchè la (2) diventa:

$$T^* = \left(\frac{G}{-H} \middle| \frac{-g}{h} \right).$$

Dopo di che, le relazioni (4) coincidono con le $p(2p-1)$ relazioni fra gli interi caratteristici delle corrispondenze \mathfrak{S} e \mathfrak{S}^{-1} scritte da R. TORELLI al n. 8 della Nota citata (8).

3. - Adoperando integrali normali, le tabelle dei periodi diventano

$$\omega = (I | \tau), \quad \Omega = (I | \sigma),$$

con τ, σ matrici simmetriche (complesse) di ordine p e la prima delle (1) si scinde nelle due relazioni

$$(6) \quad \pi = h + \sigma g; \quad \pi \tau = H + \sigma G.$$

Eliminando la matrice π , si ottiene

$$(7) \quad (h + \sigma g)\tau = H + \sigma G,$$

che riassume le p^2 relazioni di cui allo stesso n. 8 della Nota di R. TORELLI, richiamata poco fa.

Orben, se nelle (6) si utilizza il fatto che τ e σ son simmetriche, si può eliminare, oltre che π , anche τ , ottenendo:

$$(8) \quad (H + \sigma G)(h_{-1} + g_{-1}\sigma) = (h + \sigma g)(H_{-1} + G_{-1}\sigma),$$

la quale esprime che $(\pi\tau)\pi_{-1} = \pi \cdot (\pi\tau)_{-1}$. Partendo dalla seconda delle (1) si ottiene un'analogia relazione che lega T^* e τ .

Questa (8) è dello stesso tipo della (7), per $\tau = \sigma$. Invero, ponendo

$$(9) \quad (T^* T)_{-1} = \left(\frac{h^*}{g^*} \middle| \frac{H^*}{G^*} \right), \quad G^* = h_{-1}^*,$$

essa diventa (12)

$$(10) \quad (h^* + \sigma g^*)\sigma = H^* + \sigma G^*.$$

(12) Questo calcolo si trova già nella nota (13) della mia Nota cit. (4), a). Ivi è anche osservato che la relazione (10) non è altro che la

$$\pi\pi^*\Omega = \Omega(T^* T)_{-1},$$

che è immediata conseguenza delle (1). La relazione (10) compendia quelle lineari cui il compianto R. TORELLI accennava in una lettera a C. ROSATI. (Cfr. la cit. necrologia del SEVERI).

Questa si può scrivere:

$$(11) \quad (I|\sigma) \left(\begin{array}{c|c} -H^* & h^* \\ \hline -G^* & g^* \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} I \\ \sigma \end{array} \right) = 0,$$

ossia

$$(12) \quad \Omega(T^*T)_{-1} I_0 \Omega_{-1} = 0,$$

la quale, causa la (4), non è altro che la seconda delle (3).

Resta così assodato che, come avevamo annunciato, le relazioni trovate da R. TORELLI si riducono a quelle già note da RIEMANN.

§ 2. - Diagonalità dei prodotti TT^* e T^*T .

4. - Nella Nota citata (¹), *b*), abbiamo ancora considerato le matrici T e T^* degli interi caratteristici legate a una corrispondenza, *ad indici ovunque finiti*, fra due curve distinte, ed alla sua inversa, ed abbiamo tentato di indagare se, *con conveniente scelta delle retrosezioni sulle riemanniane R ed R' di C e D , i prodotti TT^* e T^*T possono coincidere in una stessa matrice diagonale* (¹³).

Questo fatto si verifica senz'altro, cioè senza cambiare retrosezioni:

- a) quando la corrispondenza è birazionale ($TT^* = T^*T = I$);
- b) quando le matrici dei periodi delle due curve sono ad indici di singolarità eguali ad uno ($TT^* = T^*T = \lambda I$);
- c) quando $C = D$ e si tratta di corrispondenza a valenza non nulla ($T = T^* = \lambda I$);
- d) quando $C = D$ e la matrice dei periodi è composta mediante due o più altre matrici di RIEMANN. Ad esempio, se

$$\omega = \left(\begin{array}{c|c|c|c} I_m & 0 & \tau_1 & 0 \\ \hline 0 & I_n & 0 & \tau_2 \end{array} \right),$$

ove I_m ed I_n son due matrici identiche degli ordini m ed n , ponendo

$$\pi = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_m & 0 \\ \hline 0 & \mu I_n \end{array} \right),$$

(¹³) Questa indagine è condotta nei nn. 2 e 3 della Nota (⁶) citata (¹): ma essa non è conclusiva, come non lo è l'analogo ragionamento di cui al 2° e 3° alinea del n. 6. Non è forse inopportuno osservare che, in forza della osservazione di cui alla fine di detto n. 3, i prodotti TT^* e T^*T danno luogo a due matrici diagonali che potrebbero differire per l'ordine degli elementi diagonali. Scambiando però quello delle retrosezioni di una delle due riemanniane, si potrà avere addirittura $TT^* = T^*T$.

con λ, μ interi arbitrari, le (1) valgono prendendo

$$T = \left(\begin{array}{c|c} \pi & 0 \\ \hline 0 & \pi \end{array} \right),$$

e risulta $T = T^*$. Questo caso si diversifica dai precedenti perchè il prodotto $TT^* = T^*T$ non è scalare.

È da osservare pure che nei primi due casi le matrici T e T^* possono non esser diagonali.

5. - Nei quattro casi ora elencati la diagonalità del prodotto TT^* e la sua coincidenza con T^*T si verificano senza cambiare le retrosezioni. Ma, nel caso *d*), non è detto che la diagonalità debba ancora sussistere se le retrosezioni si cambiano in modo che ω non presenti più l'aspetto indicato.

Nè si può affermare (come in principio avevamo sperato) che la diagonalità di TT^* sia *sempre raggiungibile, con opportuna scelta delle retrosezioni*. Al n. 7 della Nota citata (¹) *b*) avevamo rilevato un caso in cui questa diagonalità non è ottenibile. Ma ivi avevamo creduto (in base a un ragionamento il cui punto di partenza non sussiste) che ciò significasse soltanto che, in tal caso, nella classe considerata non esistessero corrispondenze ad indici ovunque finiti.

Non può, invece escludersi, almeno attualmente, che possano aversi corrispondenze ad indici ovunque finiti per le quali il prodotto TT^* resta non diagonale rispetto a qualsiasi sistema di retrosezioni (¹⁴).

Poichè si ha, per la (2),

$$TT^* = -TI_0T_{-1}I_0,$$

la diagonalità di questo prodotto equivale ad essere

$$TI_0T_{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & e \\ \hline -e & 0 \end{array} \right),$$

ove e indica una matrice diagonale (intera) di ordine p .

È interessante osservare che la forma ora indicata per la matrice TI_0T_{-1} è sempre raggiungibile, *almeno su cicli primitivi*.

(¹⁴) Debbo questa osservazione alla cortesia del prof. B. L. VAN DER WAERDEN. Nel « Zentralblatt » del 5 agosto 1940, questo illustre collega aveva recensito la Nota citata (¹) *b*) attribuendomi, in ciascuno dei tre periodi di cui consta la recensione, affermazioni che non avevo fatto. Avendo richiamato la sua attenzione su questo evidente malinteso, egli ha lealmente riconosciuto che la sua recensione « non era corretta » per « non aver fatto cenno » al mio n. 7. Però, mi espose un esempio che pone in dubbio la possibilità di raggiungere (su retrosezioni) la diagonalità del prodotto TT^* . Mentre era in corso la nostra amichevole corrispondenza, mi sono accorto che il ragionamento del n. 2 non poteva provare la proposizione che speravo raggiungere. Ho subito comunicato questo fatto al prof. v. d. WAERDEN.

Infatti, poichè TI_0T_{-1} è emisimmetrica, un teorema di FROBENIUS assicura l'esistenza di (almeno) una matrice unimodulare H per la quale si ha

$$(13) \quad H \cdot TI_0T_{-1} \cdot H_{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & e \\ \hline -e & 0 \end{array} \right),$$

con e matrice diagonale dei *divisori elementari di Frobenius* di TI_0T_{-1} .

Se i cicli γ_i, γ_{p+i} ($i=1, 2, \dots, p$) che danno le retrosezioni della riemanniana R di C si scambiano nei cicli *primitivi*

$$\gamma^* = (\gamma_1^*, \dots, \gamma_{2p}^*) = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2p})H_{-1} = \gamma H_{-1},$$

sui quali la matrice dei periodi diventa $\omega^* = \omega H_{-1}$, le relazioni (1) si scrivono

$$(1^*) \quad \pi \omega^* = \Omega T'_{-1}, \quad \pi^* \Omega = \omega^* T'^*_{-1},$$

essendo $T' = HT$, $T'^* = T^*H^{-1}$. E si ha

$$T' I_0 T'_{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & e \\ \hline -e & 0 \end{array} \right).$$

Se $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2p})$ sono i cicli che, con gli accoppiamenti δ_i, δ_{p+i} ($i=1, \dots, p$) danno le retrosezioni della riemanniana R' di D , dicendo $\gamma'^* = (\gamma_1'^*, \dots, \gamma_{2p}'^*)$ i trasformati, mediante la corrispondenza \mathfrak{S} , dei cicli γ^* , si ha ancora, per matrice degli indici di KRONECKER $[\gamma_r'^* \cdot \gamma_s'^*]$:

$$[\gamma_{-1}'^* \cdot \gamma'^*] = T' I_0 T'_{-1},$$

che ha così lo stesso significato topologico di TI_0T_{-1} .

Affinchè i cicli γ^* , che altrove [n. 9 della Nota citata (11)] abbiain detti *associati* a \mathfrak{S} , siano anch'essi (omologhi a) delle retrosezioni, occorre e basta che si abbia

$$(14) \quad HI_0H_{-1} = I_0.$$

Ricavando di qui

$$(15) \quad H_{-1} = -I_0H^{-1}I_0$$

e tenendo presente la (2), dalla (13) si ha

$$(16) \quad T' T'^* = H \cdot T T^* \cdot H^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} e & 0 \\ \hline 0 & e \end{array} \right).$$

Possiamo perciò enunciare che:

se fra i sistemi di cicli della riemanniana R associati a \mathfrak{S} su R vi è un sistema di retrosezioni, su queste il prodotto TT^ diventa diagonale ed acquista, come radici caratteristiche, i divisori elementari di TI_0T_{-1} .*

Lo stesso scambiando R con R' e T con T^* . Si osservi che TI_0T_{-1} e $T' I_0 T'_{-1}$

hanno gli stessi divisori elementari di FROBENIUS. Così pure TI_0T_{-1} e $T^*I_0T_{-1}^*$, come segue dalla (2), mentre TT^* e T^*T hanno le stesse radici caratteristiche.

Perciò, se i prodotti TT^* e T^*T sono entrambi diagonali, essi possono differire solo per l'ordine degli elementi diagonali. Ordinando convenientemente le retrosezioni associate a \mathfrak{F} o a \mathfrak{F}^{-1} , si ha $TT^*=T^*T$.

Se esistono retrosezioni associate a \mathfrak{F} od a \mathfrak{F}^{-1} , vale il teorema di cui al n. 4 della Nota citata (⁴), *b*): cioè, in tal caso, verificandosi una delle ipotesi del teorema, si ha addirittura $TT^*=T^*T=I_{2p}$ e le due curve *C* e *D* sono birazionalmente identiche.

6. - Sia $C=D$ e poniamo si abbia

$$TT^* = \left(\begin{array}{c|c} E_1 & 0 \\ \hline 0 & E_1 \end{array} \right) = E, \quad T^*T = \left(\begin{array}{c|c} E_1' & 0 \\ \hline 0 & E_1' \end{array} \right) = E',$$

ove E_1 ed E_1' son due matrici (intere e) diagonali che differiscono, *al più*, per l'ordine degli elementi diagonali (¹⁵).

Poniamo, per esempio, che questi elementi abbian due soli valori distinti: *d* ed *e*. Scambiando opportunamente l'ordine delle retrosezioni, si può ottenere che sia

$$E_1 = \left(\begin{array}{c|c} dI_m & 0 \\ \hline 0 & eI_n \end{array} \right), \quad m+n=p,$$

con I_m, I_n matrici identiche degli ordini *m* ed *n*. La matrice τ assume allora l'aspetto (¹⁶)

$$\tau = \left(\begin{array}{c|c} \tau_1 & 0 \\ \hline 0 & \tau_2 \end{array} \right),$$

con τ_1, τ_2 rispettivamente di ordine *m* ed *n*.

In conseguenza, E_1' potrebbe, per esempio, diventar

$$E_1' = \left(\begin{array}{c|c} eI_n & 0 \\ \hline 0 & dI_m \end{array} \right),$$

il che, se fosse $n=m$, non implicherebbe una nuova condizione per τ . Se, invece, si avesse

$$E_1' = \left(\begin{array}{c|c} E'_{11} & 0 \\ \hline 0 & E'_{12} \end{array} \right), \quad E'_{11} = \left(\begin{array}{c|c} eI_{m_1} & 0 \\ \hline 0 & dI_{m_2} \end{array} \right), \quad m_1+m_2=m,$$

dovendo verificarsi la relazione

$$E'_{11}\tau_1 = \tau_1 E'_{11},$$

(¹⁵) I quali son tutti numeri (interi e) non negativi. Nota *b*) cit. (⁴), n. 2. Cfr. anche l'altra Nota citata (⁴), § 1, n. 4.

(¹⁶) Nota *b*), cit. (⁴), n. 5.

si dedurrebbe che dev'essere:

$$\tau_1 = \left(\begin{array}{c|c} \tau_1' & 0 \\ \hline 0 & \tau_1'' \end{array} \right),$$

con τ_1' e τ_1'' matrici (simmetriche) rispettivamente degli ordini m_1 ed m_2 .

In tal caso, dunque, mentre dall'essere $TT^* = E$ si ha che a d e ad e son rispettivamente associate le matrici di RIEMANN $(I_m | \tau_1)$ ed $(I_n | \tau_2)$, dei generi m ed n , dall'essere $TT^* = E'$ si dedurrebbe inoltre che la prima di queste matrici è, a sua volta, composta con le altre due $(I_{m_1} | \tau_1')$, $(I_{m_2} | \tau_1'')$, dei generi m_1 ed m_2 . Un fatto analogo avviene per la seconda ⁽¹⁷⁾.

Ne segue che se le due matrici di RIEMANN $(I_m | \tau_1)$, $(I_m | \tau_2)$ son di dimensione diversa e se una almeno è *pura*, è necessariamente $E = E'$, quindi $TT^* = T^*T$.

Concludiamo che, pur essendo E non scalare, quindi $\omega = (I | \tau)$ impura, non può aversi $E' \neq E$, cioè $TT^* \neq T^*T$, senza imporre ad ω ulteriori condizioni. Perciò, *in generale*, può ritenersi che sia $TT^* = T^*T$, e ciò anche senza che questo prodotto sia addirittura scalare.

Per un noto risultato ⁽¹⁸⁾ quando le matrici T e T^* son permutabili son anche regolari, cosicchè, *in generale*, può affermarsi che, senza che il prodotto TT^* sia necessariamente scalare, ma purchè sia diagonale, le matrici T , T^* (e perciò le altre due π e π^*) hanno forma canonica diagonale.

§ 3. - Curve aventi una stessa varietà di Jacobi.

7. - Alla osservazione del SEVERI mentovate in principio del § 1, possono aggiungersi queste altre due, che forniscono condizioni meno restrittive:

a) se C e D possiedono la stessa varietà di Jacobi, quindi hanno a comune una matrice di periodi primitivi (non normali) e se questa è

⁽¹⁷⁾ In altri termini, ad e e d son associati due sistemi regolari di integrali abeliani riducibili delle dimensioni n ed m , ovvero sia, due *assi complementari* (SCORZA) della matrice $\omega = (I | \tau)$. Per effetto della seconda ipotesi, ciascuno di questi due assi sarebbe, a sua volta, congiungente di altri due, complementari in esso.

⁽¹⁸⁾ ROSATI C.: *Sulle corrispondenze permutabili appartenenti ad una superficie algebrica e sulle varietà di Jacobi a gruppo di moltiplicabilità abeliano* [Ann. di Mat., t. VI, s. 4^a (1928-1929)] n. 9. Non è forse inutile osservare che se T e T^* son permutabili sulle retrosezioni γ lo sono anche su ogni altro sistema γ^* di cicli primitivi. Infatti, si avrà $\gamma^* = \gamma H_{-1}$, con H unimodulare, e le matrici T e T^* , calcolate su questi cicli γ^* diventano

$$T' = HTH^{-1}, \quad T'^* = HT^*H^{-1}.$$

Perciò

$$T'T'^* = H TT^*H^{-1}, \quad T'^*T' = HT^*TH^{-1},$$

onde, se $TT^* = T^*T$ è anche $T'T'^* = T'^*T'$, e viceversa.

dotata di una sola coppia di forme riemanniane alternate, principali e modulari (necessariamente opposte) le due curve son birazionalmente identiche ⁽¹⁹⁾.

b) due curve aventi una stessa varietà di Jacobi son birazionalmente identiche non appena nella classe individuata, dalla matrice unimodulare T , che lega le loro tabelle di periodi normali, esiste una corrispondenza cui sia associato un sistema di retrosezioni su una almeno delle due riemanniane (n. 5) ⁽²⁰⁾.

Mostreremo ora brevemente come quest'ultima osservazione, mercè un'opportuno ampliamento della nozione di classe di corrispondenze individuata dalla matrice T , dà luogo ad una condizione necessaria, oltre che sufficiente. È questo un risultato che ci sembra non privo di interesse, fors'anche ai fini delle applicazioni.

8. - Com'è noto, se \mathfrak{F} è una trasformazione birazionale che porta C in D , queste due curve, oltre ad avere una stessa varietà di JACOBI, hanno le loro tabelle di periodi ω ed Ω legate da una relazione come

$$(1) \quad \pi\omega = \Omega T_{-1},$$

dove la matrice intera T è unimodulare ed individua una classe di corrispondenze, nella quale è contenuta \mathfrak{F} , che è ad indici ovunque finiti.

Questa matrice T soddisfa necessariamente alla relazione (5).

Inoltre, se vale la (1), cioè se C e D hanno la stessa varietà di JACOBI, e se T , unimodulare, soddisfa alla relazione (5), le due curve son birazionalmente identiche ⁽²¹⁾.

Orbene, sussistendo la (1) e la (5), la trasformazione birazionale che lega le due curve non appartiene necessariamente alla classe di T . Essa può invece esistere nella classe opposta, cioè relativa a $-T$, oppure ⁽²²⁾ in una di quelle eventualmente determinate da qualcuna delle matrici ottenute da T cambiando segno a una o più coppie di righe distanti fra loro di p posti. Le quali matrici son anch'esse unimodulari e soddisfano, insieme alla T , ad una relazione come (5) ⁽²³⁾.

Le corrispondenze appartenenti alle due classi opposte di T e di $-T$, insieme a quelle delle eventuali classi individuate dalle matrici ora dette (fra le quali

⁽¹⁹⁾ CHERUBINO S.: Nota cit. ⁽¹⁴⁾, b, n. 10, a) ed osservazione finale.

⁽²⁰⁾ CHERUBINO S.: Nota cit. ⁽¹⁾, b), n. 7. A questa corrispondenza è associato un sistema di retrosezioni anche sull'altra riemanniana (n. 5).

⁽²¹⁾ CHERUBINO S.: Nota cit. ⁽¹¹⁾, § 2, n. 5.

⁽²²⁾ CHERUBINO S.: Nota cit. ⁽¹⁾, a), n. 9.

⁽²³⁾ Nonchè, se danno luogo a classi di corrispondenze su C , ad una relazione come la (1).

figurano anche le loro opposte) diremo che costituiscono la **classe ampliata associata alla matrice T** ⁽²⁴⁾. A questa necessariamente appartiene la trasformazione birazionale che lega C a D , quando coesistano la (1) e la (5).

Poichè questa (5) sussiste contemporaneamente per T e per ciascuna delle classi predette ⁽²⁵⁾, questa relazione ha necessariamente luogo ed in una delle classi costituenti quella ampliata associata a T compare una corrispondenza cui è associato un sistema di retrosezioni ⁽²⁶⁾.

Dopo di che, la b) può enunciarsi come appresso:

c) condizione necessaria e sufficiente perchè due curve aventi una stessa varietà di Jacobi sian birazionalmente identiche è che nella classe ampliata associata alla matrice unimodulare T che lega le tabelle dei loro periodi normali esista una corrispondenza cui sia associato un sistema di retrosezioni su una (quindi su entrambe) delle due riemanniane.

⁽²⁴⁾ Già R. TORELLI considerava come appartenenti a una stessa classe le corrispondenze associate a T e $-T$. Cfr. i citati lavori di questo A.

⁽²⁵⁾ Loco cit. (1), a), n. 9.

⁽²⁶⁾ Loco cit. (1), b) nn. 3 ed 8 e n. 5 di questa.