

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

ERVIN FELDHEIM

## **Trasformata di Hankel di funzioni di Whittaker**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série, tome 10, n° 2 (1941), p. 103-114*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1941\\_2\\_10\\_2\\_103\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1941_2_10_2_103_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1941, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# TRASFORMATA DI HANKEL DI FUNZIONI DI WHITTAKER

di ERVIN FELDHEIM (Budapest).

1. - Riprendiamo la relazione funzionale

$$(1) \quad \int_0^1 x^{\gamma-1} (1-x)^{\alpha-\gamma-1} F_2(a; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; xy, xz) dx = \\ = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\gamma)}{\Gamma(\alpha)} F_2(\gamma; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; y, z)$$

dimostrata in un precedente lavoro <sup>(1)</sup>.  $F_2$  denota in questa relazione la funzione ipergeometrica di P. APPELL; i parametri verificano le disuguaglianze  $R(\alpha) > R(\gamma) > 0$ ,  $y$  e  $z$  sono scelti in modo di assicurare la convergenza delle serie doppie che rappresentano le funzioni  $F_2$ . In questo caso (1) si può dimostrare sviluppando le  $F_2$  ed effettuando l'integrazione per termini.

Questa Nota ha lo scopo di studiare i casi particolari importanti o almeno interessanti dell'equazione (1) ottenuti per valori speciali dei parametri e per certi passaggi al limite. Si ha notoriamente

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_2\left(\frac{1}{\varepsilon}; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; \varepsilon x, \varepsilon y\right) = {}_1F_1(\beta_1; \gamma_1; x) {}_1F_1(\beta_2; \gamma_2; y)$$

e

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} {}_1F_1\left(\frac{1}{\varepsilon}; \nu+1; \varepsilon x\right) = \Gamma(\nu+1) x^{-\frac{\nu}{2}} I_\nu(2\sqrt{x}) = \Gamma(\nu+1) (i\sqrt{x})^{-\nu} J_\nu(2i\sqrt{x}),$$

ove  ${}_1F_1$  e  $J_\nu$  (ed anche  $I_\nu$ ) denotano le funzioni confluenti di KUMMER <sup>(2)</sup> e quelle di BESSEL. La funzione di WHITTAKER è definita come

$$M_{k,m}(x) = \Gamma(2m+1) x^{\frac{1}{2}-m} N_{k,m}(x) = x^{m+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}-k+m; 2m+1; x\right).$$

<sup>(1)</sup> E. FELDHEIM: *Équations intégrales pour les polynômes d'Hermite à une et plusieurs variables, pour les polynômes de Laguerre, et pour les fonctions hypergéométriques les plus générales*. Annali d. R. Sc. Norm. Sup. di Pisa, vol. 9, (1940), p. 225-252.

<sup>(2)</sup> Vedi, per le notazioni e risultati citati, il trattato di WHITTAKER-WATSON: *A course of Modern Analysis*. Cambridge, 1927, che sono differenti di quelle usate nel lavoro citato sotto <sup>(1)</sup>, cioè le notazioni di P. APPELL - J. KAMPÉ DE FÉRIET: *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynômes d'Hermite*. Paris, 1926.

Si può dunque dedurre da (1) le due relazioni seguenti (cambiando le notazioni):

$$(2) \quad \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} e^{-x} J_{\nu}(2\sqrt{xy}) J_{\mu}(2\sqrt{xz}) dx = \\ = \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{\mu + \nu}{2}\right)}{\Gamma(\nu + 1)\Gamma(\mu + 1)} y^{\frac{\nu}{2}} z^{\frac{\mu}{2}} \Psi_2\left(\lambda + \frac{\mu + \nu}{2}; \nu + 1, \mu + 1; -y, -z\right)$$

per  $R(\nu) > -1$ ,  $R(\mu) > -1$ ,  $R\left(\lambda + \frac{\nu + \mu}{2}\right) > 0$ , ed anche

$$(3) \quad \int_0^{\infty} x^{\mu-1} e^{-x(1-z)} J_{\nu}(2\sqrt{xy}) M_{k,m}(2xz) dx = \\ = \frac{\Gamma\left(m + \mu + \frac{\nu + 1}{2}\right)}{\Gamma(\nu + 1)} y^{\frac{\nu}{2}} (2z)^{m + \frac{1}{2}} \Psi_1\left(m + \mu + \frac{\nu + 1}{2}, \cdot, \frac{1}{2} - k + m; \nu + 1, 2m + 1; -y, 2z\right)$$

ove  $R(\nu) > -1$ ,  $R\left(m + \mu + \frac{\nu + 1}{2}\right) > 0$ ,  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  essendo due funzioni confluenti a due variabili di P. HUMBERT.

Le formule (2) e (3) forniscono delle generalizzazioni di noti risultati sulle funzioni di BESSEL e di WHITTAKER, e permettono anche di stabilire formule notevoli ritenute nuove su queste funzioni e su loro casi particolari (come per esempio i polinomi di LAGUERRE).

2. - Raggruppando in modo conveniente i termini delle funzioni  $\Psi_2$  di (2), si ottiene, per l'integrale di questa formula, l'espressione

$$(4) \quad \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{\mu + \nu}{2}\right)}{\Gamma(\nu + 1)} y^{\frac{\nu}{2}} z^{-\frac{\mu}{2}} e^{-\frac{z}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda + \frac{\mu + \nu}{2}\right)_k (-y)^k}{(\nu + 1)_k k!} N_{\lambda + \frac{\nu - 1}{2} + k, \frac{\mu}{2}}(z).$$

Scelto  $\lambda = 1 + \frac{\mu - \nu}{2}$ , la funzione  $N$  si riduce a un polinomio di LAGUERRE e si avrà una sorta di funzione generatrice dei polinomi di LAGUERRE

$$(5) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-y)^k L_k^{(\mu)}(z)}{\Gamma(\nu + 1 + k)} = y^{-\frac{\nu}{2}} z^{-\frac{\mu}{2}} e^z \int_0^{\infty} x^{\frac{\mu - \nu}{2}} e^{-x} J_{\nu}(2\sqrt{xy}) J_{\mu}(2\sqrt{xz}) dx, \quad (\mu, \nu > -1).$$

Per  $\mu = \nu$ , (4) si riduce a una nota funzione generatrice, simultaneamente con un integrale ben conosciuto di WEBER <sup>(3)</sup>

$$(5') \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-y)^k L_k^{(\nu)}(z)}{\Gamma(\nu + 1 + k)} = e^{-y} (yz)^{-\frac{\nu}{2}} I_{\nu}(2\sqrt{yz}) = (yz)^{-\frac{\nu}{2}} e^z \int_0^{\infty} e^{-x} J_{\nu}(2\sqrt{xy}) J_{\nu}(2\sqrt{xz}) dx.$$

<sup>(3)</sup> Per i risultati relativi alle funzioni di BESSEL, noi riferiamo a G. N. WATSON: *The theory of Bessel functions*. Cambridge, 1922.

Da altro lato, se  $\lambda = 1 + \frac{\nu - \mu}{2}$ , (4) dà

$$y^{\frac{\nu}{2}} z^{-\frac{\mu}{2}} e^{-\frac{z}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-y)^k}{k!} N_{\nu - \frac{\mu-1}{2} + k, \frac{\mu}{2}}(z),$$

e questa somma può esser espressa mediante una formula di A. ERDÉLYI (l. c. sotto (9)). Si avrà dunque la relazione

$$(6) \quad \int_0^{\infty} x^{-\frac{\mu-\nu}{2}} e^{-x} J_{\nu}(2\sqrt{xy}) J_{\mu}(2\sqrt{xz}) dx = \\ = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\mu-\nu)} y^{\frac{\mu-\nu}{2}} z^{\frac{1}{2}} e^{-(y+z)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{2\nu-\mu}(2\sqrt{yz} \sin \theta) I_{\mu-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{2} \cos^2 \theta\right) e^{\frac{z}{2} \cos^2 \theta} \sin^{2\nu-\mu+1} \theta \cos^{2\mu-2\nu} \theta d\theta$$

con  $2\nu + 1 > \mu > \nu > -1$ , e come risulta da (5), le due integrali (6) sono ancora uguali a

$$y^{\frac{\nu}{2}} z^{-\frac{\mu}{2}} e^{-y} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k L_k^{(\nu)}(y)}{\Gamma(\mu + 1 + k)}.$$

Un'altra trasformazione della serie doppia  $\Psi_2$  dà luogo all'espressione seguente dell'integrale (2):

$$(2') \quad \int_0^{\infty} x_{\lambda}^{-1} e^{-x} J_{\nu}(2\sqrt{xy}) J_{\mu}(2\sqrt{xz}) dx = \\ = \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{\mu + \nu}{2}\right)}{\Gamma(\nu + 1) \Gamma(\mu + 1)} y^{\frac{\nu}{2}} z^{\frac{\mu}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda + \frac{\mu + \nu}{2}\right)_m (-z)^m}{(\mu + 1)_m m!} F\left(-\mu - m, -m; \nu + 1; \frac{y}{z}\right)$$

con  $y < z$ ; se si ha la disuguaglianza inversa  $y > z$ , la relazione precedente deve essere modificata per il ricambio di  $\mu$  e  $\nu$ , ed  $y$  e  $z$  rispettivamente.

Nel caso  $y = z$ , per la nota formula di GAUSS (o di VANDERMONDE)

$$F(-\mu - m, -m; \nu + 1; 1) = \frac{\Gamma(\nu + 1) \Gamma(\nu + \mu + 2m + 1)}{\Gamma(\nu + 1 + \mu + m) \Gamma(\nu + 1 + m)}$$

e noi ritroviamo la nota relazione (4):

$$(7) \quad \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} e^{-x} J_{\nu}(2\sqrt{xy}) J_{\mu}(2\sqrt{xy}) dx = \\ = \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{\mu + \nu}{2}\right)}{\Gamma(\nu + 1) \Gamma(\mu + 1)} y^{\frac{\nu+\mu}{2}} {}_3F_3\left(\lambda + \frac{\mu + \nu}{2}, \frac{\mu + \nu + 1}{2}, \frac{\mu + \nu + 2}{2}; \nu + \mu + 1, \nu + 1, \mu + 1; -4y\right)$$

con  $R\left(\lambda + \frac{\mu + \nu}{2}\right) > 0$ ,  $R(\nu) > -1$ ,  $R(\mu) > -1$ .

(4) Cfr. loc. cit. sotto (3).

3. - Consideriamo anche dei casi particolari interessanti della relazione (3).

a) Se  $\mu = \frac{1}{2}$  e  $\nu = 2m$ , si avrà

$$\begin{aligned} \Psi_1(2m+1, \frac{1}{2}-k+m; 2m+1, 2m+1; -y, 2z) &= \\ &= e^{-y}(1-2z)^{-\frac{1}{2}+k-m} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}-k+m; 2m+1; -\frac{2yz}{1-2z}\right) = \\ &= e^{-y}(1-2z)^{-\frac{1}{2}+k-m} e^{-\frac{2yz}{1-2z}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}+k+m; 2m+1; \frac{2yz}{1-2z}\right) = \\ &= (2yz)^{-m-\frac{1}{2}} (1-2z)^k e^{-y\frac{1-z}{1-2z}} M_{-k, m}\left(\frac{2yz}{1-2z}\right). \end{aligned}$$

La formula cercata è la seguente

$$(8) \quad \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x(1-z)} J_{2m}(2\sqrt{xy}) M_{k, m}(2xz) dx = (1-2z)^k y^{-\frac{1}{2}} e^{-y\frac{1-z}{1-2z}} M_{-k, m}\left(\frac{2yz}{1-2z}\right),$$

che noi abbiamo già stabilito, per un'altro metodo, in un precedente lavoro, sotto forma un poco differente. Le condizioni di validità di questa relazione sono  $R(m) > -\frac{1}{2}$ ,  $z < \frac{1}{2}$ . Se  $z > \frac{1}{2}$ , il risultato sarà scritto sotto la forma

$$(8') \quad \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x(1-z)} J_{2m}(2\sqrt{xy}) M_{k, m}(2xz) dx = \\ = e^{\pi i(\frac{1}{2}-k+m)} (2z-1)^k y^{-\frac{1}{2}} e^{-y\frac{z-1}{2z-1}} M_{k, m}\left(\frac{2yz}{2z-1}\right).$$

Per  $z=1$ , (8') fornisce la relazione molto interessante

$$(9) \quad \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} J_{2m}(2\sqrt{xy}) M_{k, m}(2x) dx = e^{\pi i(\frac{1}{2}-k+m)} y^{-\frac{1}{2}} M_{k, m}(2y).$$

Ponendo qui  $k = m + n + \frac{1}{2}$  ( $n$  intero  $\geq 0$ ), i risultati precedenti si riducono a quelli noti sui polinomi di LAGUERRE <sup>(5)</sup>. Per  $k=0$ , tenendo conto della relazione

$$(10) \quad M_{0, m}(2xz) = 2^{2m} \Gamma(m+1) (2xz)^{\frac{1}{2}} I_m(xz),$$

<sup>(5)</sup> La relazione (8) e le sue conseguenze sono già dimostrate, per altro metodo, in uno dei nostri lavori precedenti: *Contributions à la théorie des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables*. Parte II. (*Relations entre les polynomes de Laguerre à une et plusieurs variables*). In corso di stampa nel Recueil Mathématique. Moskva.

(8') si riduce a

$$(11) \int_0^\infty e^{-x(1-z)} J_{2m}(2\sqrt{xy}) I_m(xz) dx = e^{\pi i(m+\frac{1}{2})} (2z-1)^{\frac{1}{2}} e^{-y\frac{z-1}{2z-1}} I_m\left(\frac{yz}{2z-1}\right) \left(z \neq \frac{1}{2}\right)$$

e per  $z=1$ , si ottiene la formula

$$(12) \int_0^\infty J_{2m}(2\sqrt{xy}) I_m(x) dx = e^{\pi i(m+\frac{1}{2})} I_m(y), \quad \left(Rm > -\frac{1}{2}\right)$$

che deve confrontarsi all'altra già nota (6)

$$\int_0^\infty J_{2m}(2\sqrt{xy}) J_m(x) dx = J_m(y), \quad \left(Rm > -\frac{1}{2}\right).$$

Derivando la formula (11) rispetto a  $y$ , e tenendo conto delle relazioni ricorrenti relative alle funzioni di BESSEL, si trovano altri integrali che scriveremo soltanto nel caso  $z=1$ :

$$\int_0^\infty J_{2m-1}(2\sqrt{xy}) I_m(x) x^{\frac{1}{2}} dx = e^{\pi i(m+\frac{1}{2})} y^{\frac{1}{2}} I_{m-1}(y), \quad (Rm > 0)$$

ed anche

$$\int_0^\infty J_{2m+1}(2\sqrt{xy}) I_m(x) x^{\frac{1}{2}} dx = e^{\pi i(m-\frac{1}{2})} y^{\frac{1}{2}} I_{m+1}(y), \quad (Rm > -1).$$

Osserviamo che per  $m=\frac{1}{2}$  e  $m=-\frac{1}{2}$  rispettivamente, le formule precedenti prendono la forma particolarmente semplice

$$\int_0^\infty J_0(2\sqrt{xy}) chx dx = -shy, \quad \int_0^\infty J_0(2\sqrt{xy}) shx dx = -chy.$$

Nei casi  $z \rightarrow 0$  e  $k=m+\frac{1}{2}$  (o anche  $k=-m-\frac{1}{2}$ ) da (8) e (8') si ricava lo stesso caso particolare di una formula di SONINE:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^m J_{2m}(2\sqrt{xy}) dx = e^{-y} y^m.$$

Oltre a questi esempi di applicazione di (8), occorre notare anche il caso

(6) H. BATEMAN: *The solution of linear differential equations by means of definite integrals*. Trans. Cambridge Phil. Soc. vol. 21 (1912), pp. 171-196.

$k = m + n + \frac{1}{2}$  ( $n$  intero  $\geq 0$ ) che conduce all'importante e nota equazione sui polinomi di LAGUERRE (7):

$$(8'') \quad \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\frac{a}{2}} J_a(2\sqrt{xy}) L_n^{(a)}\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^n e^{-y} y^{\frac{a}{2}} L_n^{(a)}\left(\frac{y}{1-\lambda}\right), \quad (Ra > -1).$$

b) Seguendo gli stessi procedimenti che abbiamo utilizzato nella dimostrazione di (4) e di (2'), trasformiamo qui la funzione  $\Psi_1$  della relazione (3):

$$\begin{aligned} \Psi_1\left(m + \mu + \frac{\nu+1}{2}, \cdot, \frac{1}{2} - k + m; \nu + 1, 2m + 1; -y, 2z\right) &= \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(m + \mu + \frac{\nu+1}{2}\right)_s \left(\frac{1}{2} - k + m\right)_s}{(2m+1)_s s!} (2z)^s {}_1F_1\left(m + \mu + \frac{\nu+1}{2} + s; \nu + 1; -y\right) = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(m + \mu + \frac{\nu+1}{2}\right)_s \left(\frac{1}{2} - k + m\right)_s}{(2m+1)_s s!} (2z)^s e^{-y} {}_1F_1\left(\frac{\nu+1}{2} - m - \mu - s; \nu + 1; y\right) \end{aligned}$$

e quindi

$$(13) \quad \int_0^{\infty} x^{\mu-1} e^{-x(1-z)} J_{\nu}(2\sqrt{xy}) M_{k, m}(2xz) dx = \\ = \frac{\Gamma\left(m + \mu + \frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(m + \mu + \frac{\nu+1}{2}\right)_s \left(\frac{1}{2} - k + m\right)_s}{(2m+1)_s s!} (2z)^{m+s+\frac{1}{2}} M_{m+\mu+s, \frac{\nu}{2}}(y)$$

che è da confrontare a un risultato di A. ERDÉLYI (8).

$$\text{Se } m + \mu = \frac{\nu+1}{2},$$

$$M_{\frac{1}{2}+s+\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}}(y) = \frac{s! \Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+s+1)} y^{\frac{\nu+1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} L_s^{(\nu)}(y),$$

in modo che l'integrale (13) risulta uguale a

$$(14) \quad \int_0^{\infty} x^{\frac{\nu-1}{2}-m} e^{-x(1-z)} J_{\nu}(2\sqrt{xy}) M_{k, m}(2xz) dx = \\ = y^{\frac{\nu}{2}} e^{-y} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} - k + m\right)_s}{(2m+1)_s} (2z)^{m+s+\frac{1}{2}} L_s^{(\nu)}(y).$$

(7) Vedi l. c. (4).

(8) A. ERDÉLYI: *On certain Hankel-transforms*. Quarterly Journ. of Math. vol. 9 (1938), pp. 196-198.

Ponendo ancora  $\nu=2m$ , (14) si riduce a (8) o (8') e se ne ricava una nota funzione generatrice generale per i polinomi di LAGUERRE <sup>(9)</sup>.

c) La sommazione nella formula (13) può essere eseguita anche se  $k=\frac{1}{2}+m+n$  ( $n$  intero  $\geq 0$ ),  $\mu+\frac{\nu-1}{2}=m$ , e  $z=\frac{1}{2}$ . Si ritrova di questa guisa un risultato di A. ERDÉLYI, esposto nella nota citata sotto <sup>(8)</sup>, (ove però manca  $n!$  nel denominatore):

$$(15) \int_0^\infty e^{-x} x^\mu J_\nu(2\sqrt{xy}) L_n^{(\mu+\frac{\nu}{2})}(x) dx = \frac{\Gamma(\mu+\frac{\nu}{2}+n+1)}{n! \Gamma(\nu+n+1)} y^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} M_{\mu+\frac{n+1}{2}, \frac{\nu+n}{2}}(y), \quad R(\mu+\frac{\nu}{2}) > -1.$$

Un altro caso notevole si ottiene, ponendo nella (15),  $\mu=p+\frac{\nu}{2}$  ( $p$  intero  $\geq 0$ ):

$$(15') \quad n! \int_0^\infty e^{-x} x^{p+\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{xy}) L_n^{(p+\nu)}(x) dx = p! e^{-y} y^{n+\frac{\nu}{2}} L_p^{(n+\nu)}(y), \quad (R\nu > -1)$$

che contiene, per  $n=0$  e  $p=0$  (come anche (8'')), per  $\lambda \rightarrow 0$  e  $\lambda \rightarrow 1$ ), la rappresentazione integrale di LE ROY del polinomio di LAGUERRE e la sua inversa.

d) Un'altra trasformazione di (3) dà luogo, dopo qualche calcolo semplice, al risultato

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x(1-z)} J_\nu(2\sqrt{xy}) M_{k,m}(2xz) dx = \frac{\Gamma(m+\mu+\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\nu+1)} y^{\frac{\nu}{2}} (2z)^{m+\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^\infty \frac{\Gamma(m+\mu+\frac{\nu+1}{2})}{(\nu+1)_r r!} (-y)^r \cdot F(m+\mu+\frac{\nu+1}{2}+r, \frac{1}{2}-k+m; 2m+1; 2z).$$

Osservando che per i valori speciali dei parametri considerati negli esempi precedenti, quest'ultima espressione può ancora esser ricondotta ai risultati ottenuti, cerchiamo qui altre formule che meritano d'esser menzionate.

La funzione  $F$  della somma precedente è convergente per  $z=\frac{1}{2}$  se  $k=\frac{1}{2}+m+n$  ( $n$  intero  $\geq 0$ ); allora, per la formula di VANDERMONDE,

$$F(m+\mu+\frac{\nu+1}{2}+r, -n; 2m+1; 1) = (-1)^n \frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(2m+n+1)} \frac{\Gamma(\mu-m+\frac{\nu+1}{2}+r)}{\Gamma(\mu-m+\frac{\nu+1}{2}-n+r)},$$

<sup>(9)</sup> A. ERDÉLYI: Math. Zeitschrift. vol. 42 (1936), p. 641, e anche E. FELDHEIM, loc. cit. sotto <sup>(5)</sup>.



e ne risulta, con qualche modificazione di notazione, la generalizzazione della relazione (15):

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\mu} J_{\nu}(2\sqrt{xy}) L_n^{(\alpha)}(x) dx = \\ = \frac{\Gamma\left(\mu + \frac{\nu}{2} + 1\right)}{\Gamma(\nu + 1)} \frac{\left(\alpha - \mu - \frac{\nu}{2}\right)_n}{n!} y^{\frac{\nu}{2}} {}_2F_2\left(\mu + \frac{\nu}{2} + 1, \mu - \alpha + \frac{\nu}{2} + 1; \nu + 1, \mu - \alpha + \frac{\nu}{2} - n + 1; -y\right)$$

con le condizioni  $R(\nu) > -1$ ,  $R\left(\mu + \frac{\nu}{2}\right) > 0$ ,  $\alpha - \mu - \frac{\nu}{2} \neq 0, -1, -2, \dots$ ;  ${}_2F_2$  denota una funzione ipergeometrica generalizzata. In questa forma non si vede come la (16) possa ricondursi per  $\alpha = \mu + \frac{\nu}{2}$ , alla formula (15). Ma, sviluppando la funzione  ${}_2F_2$  si ottiene nella (16),

$$(-1)^n y^{\frac{\nu}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\mu + \frac{\nu}{2} + k + 1\right) \Gamma\left(\mu + \frac{\nu}{2} - \alpha + k + 1\right) (-y)^k}{\Gamma(\nu + 1 + k) \Gamma\left(\mu + \frac{\nu}{2} - \alpha + 1 - n + k\right) k!},$$

e, se  $\alpha = \mu + \frac{\nu}{2}$ , i termini relativi ai valori di  $k$  inferiori ad  $n$  devono esser presi uguali a zero, e quindi la somma precedente sarà identica con il secondo membro di (15).

Indichiamo alcuni casi particolari di questa formula (16).

Se  $\mu = \frac{\nu}{2}$ , la funzione  ${}_2F_2$  sarà uguale a

$${}_1F_1(\nu - \alpha + 1; \nu - \alpha + 1 - n; -y) = e^{-y} {}_1F_1(-n; \nu - \alpha + 1 - n; y) = \\ = \frac{n! e^{-y}}{(\nu - \alpha + 1 - n)_n} L_n^{(\nu - \alpha - n)}(y),$$

e si avrà <sup>(10)</sup>

$$(17) \quad \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\frac{\nu}{2}} J_{\nu}(2\sqrt{xy}) L_n^{(\alpha)}(x) dx = (-1)^n y^{\frac{\nu}{2}} e^{-y} L_n^{(\nu - \alpha - n)}(y).$$

Il caso  $\alpha = \mu + \frac{\nu}{2}$  è già stato studiato sopra, mentre che per  $n=0$ , (16) si riduce alla nota formula di SONINE che si scrive immediatamente sotto la forma solita posto  $n=0$  nella (15).

<sup>(10)</sup> A. ERDÉLYI: *The Hankel-transform of a product of Whittaker's functions*. Journ. London Math. Soc. vol. 13 (1938), pp. 146-154, e anche E. FELDHEIM, Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wet., vol. 43 (1940), p. 10 (formula 22 a)).

La funzione  ${}_2F_2$  si riduce ancora a quella  ${}_1F_1$  se  $\mu = a + \frac{\nu}{2}$ , quando si ha l'equazione analoga a (15):

$$(18) \int_0^\infty e^{-x} x^\mu J_\nu(2\sqrt{xy}) L_n^{(\mu - \frac{\nu}{2})}(x) dx = (-1)^n \frac{\Gamma(\mu + \frac{\nu}{2} + 1)}{n! \Gamma(\nu + 1 - n)} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{n-1}{2}} M_{\mu + \frac{n+1}{2}, \frac{\nu-n}{2}}(y)$$

ove  $R(\nu) > -1$ ,  $R(\mu - \frac{\nu}{2}) > -1$ ,  $\nu \neq$  intero negativo o zero, mentre che l'analogo di (15') si ricava da (18) per  $\mu = p - n + \frac{\nu}{2}$ ,  $p$  intero ( $p > n - 1$ ) <sup>(11)</sup>:

$$(18') \quad n! \int_0^\infty e^{-x} x^{p-n+\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{xy}) L_n^{(p-n)}(x) dx = (-1)^n p! y^{\frac{\nu}{2}} e^{-y} L_p^{(\nu-n)}(y).$$

Ponendo qui  $p = n$ ,  $\nu = n \pm \frac{1}{2}$ , si ottengono rappresentazioni integrali per i polinomi di HERMITE che credo nuove e che sono da confrontare alle altre tali rappresentazioni date in precedenti lavori <sup>(12)</sup>:

$$(19) \quad \begin{cases} y^{n-\frac{1}{2}} e^{-y^2} H_{2n}(y) = n! 2^{2n+1} \int_0^\infty e^{-x^2} x^{n+\frac{1}{2}} J_{n-\frac{1}{2}}(2\sqrt{xy}) L_n(x^2) dx \\ y^{n-\frac{1}{2}} e^{-y^2} H_{2n+1}(y) = n! 2^{2n+2} \int_0^\infty e^{-x^2} x^{n+\frac{3}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(2\sqrt{xy}) L_n(x^2) dx. \end{cases}$$

Osserviamo anche che la stessa sostituzione  $\nu = n \pm \frac{1}{2}$  permetterà di ricavare da (18) le generalizzazioni di (19), relative alle funzioni del cilindro parabolico  $D$  di WEBER. (19) e altre formule più generali si deducono anche da (17).

e) Ritornando alla formula generale (3), sia  $k = 0$ , donde, per (10):

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-x(1-z)} x^{\mu-\frac{1}{2}} J_\nu(2\sqrt{xy}) I_m(xz) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(m + \mu + \frac{\nu+1}{2}) \Gamma(m + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(2m+1)} y^{\frac{\nu}{2}} (2z)^m \Psi_1\left(m + \mu + \frac{\nu+1}{2}, \cdot, m + \frac{1}{2}; \nu+1, 2m+1; -y, 2z\right) = \\ &= \frac{\Gamma(m + \mu + \frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1)} y^{\frac{\nu}{2}} (2z)^m \sum_{r=0}^\infty \sum_{s=0}^\infty \frac{\left(m + \mu + \frac{\nu+1}{2}\right)_{r+s} \Gamma(m + s + \frac{1}{2})}{(\nu+1)_r \Gamma(2m+s+1) r! s!} (-y)^r (2z)^s. \end{aligned}$$

<sup>(11)</sup> Osserviamo che tenendo conto della nota formula

$$L_n^{(-k)}(x) = (-x)^k \frac{(n-k)!}{n!} L_n^{(k)}(x) \quad (k \text{ intero, } 1 \leq k \leq n).$$

(18') sarà applicabile anche se  $p < n - 1$  (p. es. per  $p = 0$  si ritrova una formula elementare).

<sup>(12)</sup> Vedi i nostri lavori citati in <sup>(1)</sup> e <sup>(10)</sup>.

Se  $m = -\frac{1}{2}$ , la funzione di BESSEL si riduce a

$$I_{-\frac{1}{2}}(xz) = \left(\frac{xz\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{ch} xz,$$

e si ha

$$\frac{\Gamma\left(m + s + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2m + s + 1)} = \begin{cases} 1, & \text{se } s > 0 \\ 2, & \text{se } s = 0. \end{cases}$$

Supposto  $|z| < \frac{1}{2}$ , ed eseguito i calcoli, si ottiene

$$(20) \quad \int_0^{\infty} e^{-x(1-z)} x^{\mu-\frac{1}{2}} J_{2\nu}(2\sqrt{xy}) \operatorname{ch}(xz) dx = \\ = \frac{\Gamma\left(\mu + \nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\nu + 1)} y^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left\{ e^{-\frac{y}{2}} M_{\mu, \nu}(y) + (1-2z)^{-\mu} e^{-\frac{y}{2(1-2z)}} M_{\mu, \nu}\left(\frac{y}{1-2z}\right) \right\},$$

con  $\nu > -\frac{1}{2}$ ,  $|z| < \frac{1}{2}$ .

Questa relazione può esser dimostrata direttamente e senz'alcuna difficoltà, mediante la generalizzazione della nota formula di SONINE (dovuta a HANKEL), più volte menzionata in corso del presente lavoro e che si deduce da (20) per  $z=0$ . Se  $m = \frac{1}{2}$ , si ha una formula analoga a (20).

Tutti questi casi particolari che danno risultati in parte già noti, mostrano come una relazione generale può contenere dei risultati non aventi, in apparenza, null'altro in comune se non il loro carattere. Noi ci limiteremo qui a questi soli esempi osservando che altri casi particolari notevoli possono ancora certamente esser dedotti da (2) e (3).

4. - Ho considerato, nel lavoro citato sotto (<sup>1</sup>), anche l'analogo di (1) per il caso di tre variabili, e ne dedussi varie conseguenze. Colgo l'occasione per indicare qui un errore nel n.º 4, § 5, ove le formule (24), (25) e (26) sono da sopprimere.

L'equazione (21) del detto lavoro, può esser scritta, per mezzo delle funzioni di WHITTAKER, sotto la forma seguente, generalizzazione immediata di (3):

$$(21) \quad \int_0^{\infty} x^{\mu-1} e^{-x(1-z-t)} J_{\nu}(2\sqrt{xy}) M_{k, m}(2xz) M_{l, n}(2xt) dx = \\ = \frac{\Gamma\left(m + n + \mu + \frac{\nu}{2} + 1\right)}{\Gamma(\nu + 1)} y^{\frac{\nu}{2}} (2z)^{m+\frac{1}{2}} (2t)^{n+\frac{1}{2}} \Psi_1\left(m + n + \mu + \frac{\nu}{2} + 1, \cdot, \frac{1}{2} - k + m, \frac{1}{2} - l + n; \right. \\ \left. \nu + 1, 2m + 1, 2n + 1; -y, 2z, 2t\right)$$

con  $R\left(m+n+\mu+\frac{\nu}{2}+1\right) > 0$ ,  $R(\nu) > -1$ ,  $|z|+|t| < \frac{1}{2}$ , e quest'ultima condizione può essere levata in certi casi.

Se  $k = \frac{1}{2} + m + p$ ,  $l = \frac{1}{2} + n + q$  ( $p$  e  $q$  interi  $\geq 0$ ), si ottiene una relazione generale per i polinomi di LAGUERRE.

Indichiamo ancora una generalizzazione di (7) e di (16). Si avrà, in primo luogo,

$$\int_0^\infty x^{e-1} e^{-\frac{x}{2}} M_{k,m}(xy) J_\nu(2\sqrt{xz}) J_\mu(2\sqrt{xt}) dx =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\rho+m+\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)} y^{m+\frac{1}{2}} z^{\frac{\nu}{2}} t^{\frac{\mu}{2}} \Psi_1\left(\rho+m+\frac{\nu+\mu+1}{2}, \dots, \frac{1}{2}-k+m; 2m+1, \nu+1, \mu+1; y, -z, -t\right)$$

ove  $R\left(\rho+m+\frac{\nu+\mu+1}{2}\right) > 0$ ,  $R(\nu) > -1$ ,  $R(\mu) > -1$ ,  $|z|+|t| < 1$  (l'ultima condizione essendo fatta per assicurare la convergenza).

La relazione (22) si semplifica per  $k = \frac{1}{2} + m + n$  ( $n$  intero  $\geq 0$ ),  $t = z$  e  $y = 1$ . In modo generale, si può scrivere

$$\Psi_1(a, -n; c, d, e; 1, z, z) = \sum_{p=0}^\infty \sum_{q=0}^\infty \sum_{r=0}^\infty \frac{(a)_{p+q+r} (-n)_p z^{q+r}}{(c)_p (d)_q (e)_r p! q! r!} =$$

$$= \sum_{p=0}^n \sum_{s=0}^\infty \frac{(a)_{p+s} (-n)_p z^s}{(c)_p (d)_s p! s!} \sum_{r=0}^\infty \frac{(1-d-s)_r (-s)_r}{(e)_r r!} = \sum_{p=0}^n \sum_{s=0}^\infty \frac{(a)_{p+s} (-n)_p (d+e-1)_{2s} z^s}{(c)_p (d)_s (e)_s p! s! (d+e-1)_s}$$

$$= \sum_{s=0}^\infty \frac{(a)_s (d+e-1)_{2s} z^s}{(d)_s (e)_s (d+e-1)_s s!} \sum_{p=0}^n \frac{(a+s)_p (-n)_p}{(c)_p p!} = \frac{(c-a)_n}{(c)_n} \sum_{s=0}^\infty \frac{(a)_s (d+e-1)_{2s} (1+a-c)_s z^s}{(d)_s (e)_s (1+a-c-n)_s (d+e-1)_s s!}$$

$$= \frac{(c-a)_n}{(c)_n} \sum_{s=0}^\infty \frac{(a)_s (a-c+1)_s \left(\frac{d+e-1}{2}\right)_s \left(\frac{d+e}{2}\right)_s (4z)^s}{(a-c+1-n)_s (d)_s (e)_s (d+e-1)_s s!} =$$

$$= \frac{(c-a)_n}{(c)_n} {}_4F_4\left(a, a-c+1, \frac{d+e-1}{2}, \frac{d+e}{2}; a-c+1-n, d, e, d+e-1; 4z\right).$$

Si avrà dunque, con altre notazioni, (13)

$$(23) \quad \int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-x} J_\nu(2\sqrt{xy}) J_\mu(2\sqrt{xy}) L_n^{(\alpha)}(x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{\nu+\mu}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)} \frac{\left(\alpha-\lambda-\frac{\nu+\mu}{2}+1\right)_n}{n!} y^{\frac{\nu+\mu}{2}} {}_4F_4\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}, \frac{\nu+\mu+2}{2}, \lambda+\frac{\nu+\mu}{2}, \lambda-\alpha+\frac{\nu+\mu}{2}; \nu+1, \mu+1, \nu+\mu+1, \lambda-\alpha+\frac{\nu+\mu}{2}-n; -4y\right).$$

(13) Un'altra dimostrazione di (23), non essenzialmente differente da quella data qui, può esser dedotta sviluppando, in (23), il polinomio  $L_n^{(\alpha)}(x)$  in serie di potenze di  $x$ , e inte-

Per  $n=0$ , (23) si riduce subito a (7).

Posto qui  $\lambda + \frac{\nu + \mu}{2} = \alpha + 1$ , si ricava da (23), l'equazione

$$(24) \int_0^\infty x^{\alpha - \frac{\nu + \mu}{2}} e^{-x} J_\nu(2\sqrt{xy}) J_\mu(2\sqrt{xy}) L_n^{(\alpha)}(x) dx = \frac{(\nu + \mu + 1)_{2n}}{(\nu + \mu + 1)_n} \frac{\Gamma(\alpha + n + 1) y^{n + \frac{\nu + \mu}{2}}}{\Gamma(\nu + n + 1) \Gamma(\mu + n + 1) n!} \times \\ \times {}_3F_3\left(\frac{\nu + \mu + 1}{2} + n, \frac{\nu + \mu + 2}{2} + n, \alpha + 1 + n; \nu + 1 + n, \mu + 1 + n, \nu + \mu + 1 + n; -4y\right)$$

che si riduce per  $\alpha = \mu + \nu$ , a una relazione analoga a (16):

$$(25) \int_0^\infty x^{\frac{\mu + \nu}{2}} e^{-x} J_\nu(2\sqrt{xy}) J_\mu(2\sqrt{xy}) L_n^{(\mu + \nu)}(x) dx = \\ = \frac{\Gamma(\nu + \mu + 1 + 2n)}{\Gamma(\nu + 1 + n) \Gamma(\mu + 1 + n) n!} y^{n + \frac{\nu + \mu}{2}} {}_2F_2\left(\frac{\nu + \mu + 1}{2} + n, \frac{\nu + \mu + 2}{2} + n; \nu + 1 + n, \mu + 1 + n; -4y\right).$$

Se si pone in (25),  $\mu = \nu$ , la funzione  ${}_2F_2$  si riduce a una funzione di WHITTAKER :

$$(25') \int_0^\infty e^{-x} x^\nu J_\nu^2(2\sqrt{xy}) L_n^{(2\nu)}(x) dx = \frac{\Gamma(2\nu + 1 + 2n)}{2^{n+\nu+1} [\Gamma(\nu + 1 + n)]^2 n!} y^{\frac{n+\nu-1}{2}} e^{-2y} M_{\frac{\nu+n}{2}, \frac{\nu+n}{2}}(4y)$$

e (23) fornisce l'analoga per  $\lambda = \nu + 1$ ,  $\mu = \nu = \alpha$ :

$$(23') \int_0^\infty x^\nu e^{-x} J_\nu^2(2\sqrt{xy}) L_n^{(\nu)}(x) dx = \frac{\Gamma(2\nu + 1)}{2^{\nu-n+1} [\Gamma(\nu + 1)]^2} \frac{(-\nu)_n}{n!} y^{\frac{n+\nu-1}{2}} e^{-2y} M_{\frac{\nu+n}{2}, \frac{\nu-n}{2}}(4y).$$

Osserviamo anche che altri casi di riduzione di (23) sono:

$$\begin{aligned} \alpha = \nu, \mu = \nu + 1, \lambda = \nu + \frac{3}{2}, \\ \alpha = 2\nu, \mu = -\nu, \lambda = \nu + 1, \\ \alpha = 2\nu + 1, \mu = -\nu - 1, \lambda = \nu + \frac{3}{2}, \\ \alpha = \nu = \mu, \lambda = 1. \end{aligned}$$

Se  $\nu = -\mu = \pm \frac{1}{2}$ ,  $\lambda = \frac{3}{2}$ , si ottiene il caso particolare di (17), relativo a  $\nu = \frac{1}{2}$ ; per  $\nu = -\mu = \pm \frac{1}{2}$ ,  $\alpha = p - n$  ( $p$  intero) e  $\lambda = p - n + \frac{3}{2}$  si ritrova ancora il caso  $\nu = \frac{1}{2}$  della formula (18').

---

grando, mediante (7) (la validità delle integrazioni per termini delle serie che intervengono nel presente lavoro può essere facilmente giustificata, in conseguenza della convergenza assoluta delle dette serie).