

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LANDOLINO GIULIANO

**Osservazioni sopra alcuni teoremi di semicontinuità
degli integrali doppi**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 10,
n° 2 (1941), p. 115-122

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1941_2_10_2_115_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1941, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

OSSERVAZIONI SOPRA ALCUNI TEOREMI
DI SEMICONTINUITÀ DEGLI INTEGRALI DOPPI (*).

di LANDOLINO GIULIANO (Pisa).

In questa breve Nota raccolgo qualche osservazione sopra alcuni teoremi di semicontinuità degli integrali doppi del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria; enuncerò, sotto ipotesi leggermente più larghe, due teoremi di semicontinuità stabiliti da L. TONELLI e generalizzerò un teorema di semicontinuità provato recentemente da L. AMERIO.

1. - In una importante Memoria ⁽¹⁾, il TONELLI ha dato i seguenti teoremi:

TEOREMA I. - *Sia D un campo aperto e limitato e $I_D(z)$ un integrale quasi regolare positivo relativo al campo D e alla funzione $f(x, y, z, p, q)$.*

Supponiamo che:

a) $f(x, y, z, p, q)$ sia finita e continua insieme alle sue derivate parziali ⁽²⁾ f_p, f_q, f_{px}, f_{qy} per ogni punto (x, y) di D e per tutti i valori finiti di z, p, q ;

b) sia sempre $f \geq N$, N essendo un numero fisso;

in tal caso $I_D(z)$ è semicontinuo inferiormente nella classe C delle funzioni $z(x, y)$ assolutamente continue in D , per ogni funzione di C che renda $I_D(z)$ finito.

TEOREMA II. - *Sia $I_D(z)$ un integrale quasi regolare positivo relativo a un campo aperto e limitato D e a una funzione $f(x, y, z, p, q)$.*

(*) Lavoro eseguito nel Seminario di Alta Matematica della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

⁽¹⁾ L. TONELLI: *Sur la semicontinuité des intégrales doubles du Calcul des Variations*. Acta Mathematica. T. 53 (1929) pp. 325-346. Rimandiamo, per brevità, ai numeri 1, 2, 3, 4 del § 1 di questa Memoria per la definizione di campo aperto e limitato D , di campo chiuso corrispondente \bar{D} , di funzione assolutamente continua, di integrale quasi regolare, di semicontinuità inferiore di un integrale doppio, etc. etc.

⁽²⁾ Nell'enunciato dato dal TONELLI compare anche l'ipotesi dell'esistenza e della continuità delle derivate parziali f_{pp}, f_{pq}, f_{qq} ; ma se, per dare la definizione di integrale quasi regolare, come lo stesso TONELLI ha osservato, (loc. cit. in ⁽¹⁾), si fa uso della funzione \mathcal{G} di Weierstrass, tale ipotesi diventa superflua.

Supponiamo che:

a) la frontiera di D sia una curva continua, chiusa, senza punti multipli, rettificabile;

b) $f(x, y, z, p, q)$ sia finita e continua insieme alle sue derivate parziali ⁽³⁾ f_p, f_q, f_{px}, f_{qy} per ogni punto (x, y) di D e della frontiera di D e per tutti i valori finiti di z, p, q ;

allora $I_D(z)$ è semicontinuo inferiormente nella classe C' delle funzioni $z(x, y)$ limitate e assolutamente continue in D e per ogni funzione di C' che renda $I_D(z)$ finito.

2. - Supposto di considerare l'integrale $I_D(z)$ nella classe delle funzioni $z(x, y)$ integrabili ⁽⁴⁾, oltre che assolutamente continue, in D , faremo qui vedere che l'ipotesi $b)$ del Teorema I può sostituirsi con la seguente, più generale:

$b')$ esistono due funzioni $\varphi_1(x, y)$ integrabile in D , e $\varphi_2(x, y)$ limitata e integrabile in D , in modo che in ogni punto (x, y) di D e per tutti i valori finiti di z, p, q , si abbia:

$$f(x, y, z, p, q) \geq \varphi_1(x, y) + z \varphi_2(x, y).$$

Sia M un numero positivo tale che per ogni punto (x, y) di D risulti $|\varphi_2(x, y)| < M$. Sia $z_0(x, y)$ una funzione della classe C , integrabile in D , per cui $I_D(z_0)$ esista finito. Sia Q un quadrato a lati paralleli agli assi x e y , contenente il campo D ; si divida Q in 4^n quadrati eguali (n intero positivo) mediante parallele agli assi e di questi quadrati si considerino quelli (lati compresi) i cui punti sono tutti punti di D . Diciamo D_n l'insieme ⁽⁵⁾ (limitato e chiuso) costituito da tutti i loro punti e sia B_n l'insieme complementare, rispetto a D , dell'insieme D_n interno a D . Per la condizione $b')$ si ha:

$$f(x, y, z_0, p_0, q_0) - \varphi_1(x, y) - z_0 \varphi_2(x, y) \geq 0$$

e

$$0 \leq \iint_{B_n} \{f(x, y, z_0, p_0, q_0) - \varphi_1(x, y) - z_0 \varphi_2(x, y)\} dx dy \leq \iint_{B_n} \{|f(x, y, z_0, p_0, q_0)| + |\varphi_1(x, y)|\} dx dy + M \iint_{B_n} |z_0| dx dy$$

e perciò, prefissato un numero $\sigma > 0$ arbitrario, si può determinare un n_0 tale che per $n \geq n_0$ si abbia:

$$(1) \quad \iint_{B_n} \{f(x, y, z_0, p_0, q_0) - \varphi_1(x, y) - z_0 \varphi_2(x, y)\} dx dy < \sigma.$$

⁽³⁾ Vedi nota ⁽²⁾.

⁽⁴⁾ Questa restrizione è superflua se $\varphi_2(x, y) \equiv 0$.

⁽⁵⁾ Cfr. loc. cit. in ⁽⁴⁾ § 1, n. 1.

Poichè è:

$$(2) \quad f(x, y, z, p, q) \geq \varphi_1(x, y) + z \varphi_2(x, y)$$

$I_D(z)$, se $z(x, y)$ è una funzione della classe C , integrabile in D , o esiste finito, o vale $+\infty$.

Ci si può limitare al caso di $I_D(z)$ finito.

Si ha allora, per le (1) e (2), per $n \geq n_0$:

$$I_{B_n}(z) - I_{B_n}(z_0) \geq \iint_{B_n} (z - z_0) \varphi_2(x, y) dx dy - \sigma.$$

Se ϱ è un numero positivo tale che ⁽⁶⁾

$$(4) \quad \varrho < \frac{\sigma}{MD}$$

e $z(x, y)$ è una funzione della classe C , integrabile in D , soddisfacente in tutti i punti di D alla disuguaglianza:

$$(5) \quad |z(x, y) - z_0(x, y)| < \varrho$$

si ha, tenendo conto della (4):

$$\left| \iint_{B_n} (z - z_0) \varphi_2(x, y) dx dy \right| < \varrho MD < \sigma$$

e perciò, per la (3):

$$I_{B_n}(z) - I_{B_n}(z_0) > -2\sigma$$

per ogni $n \geq n_0$ e per ogni funzione $z(x, y)$ della classe C , integrabile in D , soddisfacente in D alla (4). Ne segue che per dimostrare la semicontinuità inferiore dell'integrale $I_D(z)$ rispetto alla funzione $z_0(x, y)$, basta dimostrare la semicontinuità inferiore dell'integrale $I_{D_n}(z)$ rispetto alla funzione $z_0(x, y)$. Essendo $I_{D_n}(z)$ quasi regolare positivo e il campo D_n costituito da un numero finito di quadrati e poichè vale l'ipotesi a), tale semicontinuità si deduce dal Teorema II del n. 1.

3. - *La dimostrazione data dal TONELLI del Teorema II può ripetersi anche se la frontiera del campo D è costituita da un numero finito o da una infinità numerabile di curve continue, chiuse, semplici, rettificabili e di lunghezza complessiva finita.*

Infatti, basta soltanto tener presente che, indicando con $N(\bar{y})$ il numero delle intersezioni della retta $y = \bar{y}$ con la frontiera di D , risulta, anche in queste condizioni più generali, $N(\bar{y})$ finita per quasi tutti i valori di \bar{y} e la funzione $N(\bar{y})$ è ancora quasi continua e integrabile ⁽⁷⁾.

⁽⁶⁾ Indichiamo con la lettera D anche la misura del campo D .

⁽⁷⁾ Cfr. loc. cit. in ⁽⁴⁾ pag. 345 e S. BANACH: *Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie*. Fund. Math. T. VII (1925) pp. 225-236 vedi pag. 228, Théorème 2 e pag. 235, Théorème 1.

4. - L. AMERIO, in un suo recente lavoro ⁽⁸⁾, dimostra, fra l'altro, il seguente

TEOREMA. - Se, per il campo aperto e limitato D , approssimabile mediante i campi D_n in modo che sia $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = D$ esiste, in corrispondenza

di ogni n , un numero finito (variabile o no con n) di poligoni chiusi e semplici, una delle quali contenga nel suo interno tutte le altre, ciascuna costituita di un numero finito di lati appartenenti a D , in modo che se Δ_n è l'insieme dei punti interni alla prima ed esterni alle altre, $\bar{\Delta}_n$ faccia parte di D , contenga nel suo interno D_n e sia inoltre interno a D_{n+1} e se, indicando con λ_n il perimetro di Δ_n , esiste un numero $\lambda > 0$ per cui sia sempre $\lambda_n < \lambda$ ⁽⁹⁾;

se $I_D(z)$ è un integrale quasi regolare positivo e la funzione $f(x, y, z, p, q)$ soddisfa alle seguenti condizioni:

a) esistono finite e continue, per (x, y) in D , z, p, q , arbitrari, le derivate parziali f_p, f_q, f_{px}, f_{qy} ;

b) esistono quattro numeri $\bar{z}, \bar{p}, \bar{q}, M > 0$ tali che $f(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})$ sia integrabile in D , esista finita la derivata parziale $f_z(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})$ e risulti, per (x, y) in D :

$$\begin{aligned} |f_z(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})| < M, & \quad |f_p(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})| < M \\ |f_q(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})| < M, & \quad |f_{px}(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})| < M \\ |f_{qy}(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})| < M; \end{aligned}$$

c) per tutti i valori finiti di z, p, q si ha:

$$\begin{aligned} f(x, y, z, p, q) - f(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}) &\geq (z - \bar{z}) f_z(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}) + \\ &\quad + (p - \bar{p}) f_p(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}) + (q - \bar{q}) f_q(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}); \end{aligned}$$

allora $I_D(z)$ è semicontinuo inferiormente nella classe C^* delle funzioni $z(x, y)$ assolutamente continue e integrabili in D , per ogni funzione di C^* che renda $I_D(z)$ finito.

5. - Allo scopo di generalizzare il teorema dell'AMERIO, noi dimostreremo il seguente

TEOREMA. - Sia $I_D(z)$ un integrale quasi regolare positivo relativo a un campo aperto e limitato D e a una funzione $f(x, y, z, p, q)$.

Supponiamo che:

a) la frontiera di D sia formata da una curva continua, chiusa, semplice, rettificabile;

⁽⁸⁾ L. AMERIO: *Studi su gli integrali doppi del Calcolo delle Variazioni*. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, 1941, Fasc. I. pp. 57-89 vedi pag. 69.

⁽⁹⁾ L'AMERIO esprime tutto ciò dicendo che il campo D soddisfa alla condizione (λ).

b) la funzione $f(x, y, z, p, q)$ sia finita e continua insieme alle sue derivate parziali f_p, f_q, f_{px}, f_{qy} per ogni punto (x, y) di D e per tutti i valori finiti di z, p, q ;

c) esistano quattro funzioni $\varphi_1(x, y)$, integrabile in D , e $\varphi_2(x, y)$, $\varphi_3(x, y)$, $\varphi_4(x, y)$ limitate e integrabili in D , con φ_3 e φ_4 continue in D e tali che esistano in D le derivate parziali $\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_4}{\partial y}$ le quali siano integrabili in D in modo che in ogni punto (x, y) di D e per tutti i valori finiti di z, p, q si abbia:

$$f(x, y, z, p, q) \geq \varphi_1(x, y) + z\varphi_2(x, y) + p\varphi_3(x, y) + q\varphi_4(x, y);$$

allora $I_D(z)$ è semicontinuo inferiormente nella classe C^* delle funzioni $z(x, y)$ assolutamente continue e integrabili in D e per ogni funzione di C^* che renda $I_D(z)$ finito.

Sia Γ la curva continua, chiusa, semplice, rettificabile che costituisce la frontiera di D .

Sia Q un quadrato a lati paralleli agli assi, contenente D ; si divida Q in 4^n quadrati uguali (n intero positivo) e di ognuno di tali quadrati si supponga faccia parte anche il relativo contorno. Abbiamo chiamato insieme D_n l'insieme di tutti i quadrati così ottenuti che risultano tutti costituiti di punti di D . D_n è contenuto in D_{n+1} ed è limitato da uno o più (in numero finito) poligoni chiusi, che ne costituiscono il contorno. In virtù di un noto risultato di A. DENJOY ⁽⁴⁰⁾ esiste una costante positiva λ tale che la lunghezza totale λ_n del contorno di D_n risulti sempre, per tutti gli n , minore di λ . Abbiamo così, qualunque sia n ,

$$(1) \quad \lambda_n < \lambda.$$

Sia ora M un numero positivo tale che per ogni punto (x, y) di D risulti:

$$(2) \quad |\varphi_2(x, y)| < M, \quad |\varphi_3(x, y)| < M, \quad |\varphi_4(x, y)| < M$$

e poniamo

$$(3) \quad \iint_D \left\{ \left| \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_4}{\partial y} \right| \right\} dx dy = \Phi.$$

Sia $z_0(x, y)$ una funzione della classe C^* e per cui $I_D(z_0)$ esista finito. Diciamo B_n l'insieme complementare di D_n rispetto a D e si ponga

$$E_{n,r} = D_{n+r} - D_n.$$

Per la condizione c) si ha:

$$0 \leq f(x, y, z_0, p_0, q_0) - \varphi_1(x, y) - z_0\varphi_2(x, y) - p_0\varphi_3(x, y) - q_0\varphi_4(x, y)$$

⁽⁴⁰⁾ A. DENJOY: *Sur les polygones d'approximation d'une courbe rectifiable*. Comptes Rendus. 1933. I. T. 196, pp. 29-32.

e, tenendo conto delle (2):

$$0 \leq \iint_{E_{n,r}} \{f(x, y, z_0, p_0, q_0) - \varphi_1(x, y) - z_0 \varphi_2(x, y) - p_0 \varphi_3(x, y) - q_0 \varphi_4(x, y)\} dx dy \leq \iint_{E_n} \{|f(x, y, z_0, p_0, q_0)| + |\varphi_1(x, y)|\} dx dy + M \iint_{E_n} \{|z_0| + |p_0| + |q_0|\} dx dy$$

e perciò, prefissato un numero $\sigma > 0$ arbitrario, si può determinare un n_0 tale che per $n \geq n_0$ e per ogni r intero positivo si abbia:

$$(4) \quad 0 \leq \iint_{E_{n,r}} \{f(x, y, z_0, p_0, q_0) - \varphi_1(x, y) - z_0 \varphi_2(x, y) - p_0 \varphi_3(x, y) - q_0 \varphi_4(x, y)\} dx dy < \sigma.$$

Poichè è

$$(5) \quad f(x, y, z, p, q) \geq \varphi_1(x, y) + z \varphi_2(x, y) + p \varphi_3(x, y) + q \varphi_4(x, y)$$

$I_D(z)$, se $z(x, y)$ è una funzione della classe C^* , o esiste finito, o vale $+\infty$. Ci si può limitare al caso di $I_D(z)$ finito e allora si ha per le (4) e (5):

$$(6) \quad I_{E_{n_0,r}}(z) - I_{E_{n_0,r}}(z_0) \geq \iint_{E_{n_0,r}} \{(z - z_0) \varphi_2(x, y) + (p - p_0) \varphi_3(x, y) + (q - q_0) \varphi_4(x, y)\} dx dy - \sigma.$$

Sia ϱ un numero positivo tale che

$$(7) \quad \varrho < \frac{\sigma}{MD}, \quad \varrho < \frac{\sigma}{4M\lambda + \Phi}$$

e $z(x, y)$ una funzione della classe C^* soddisfacente in tutti i punti di D alla disuguaglianza:

$$(8) \quad |z(x, y) - z_0(x, y)| < \varrho.$$

È allora, per la prima delle (2) e tenendo conto della prima delle (7):

$$(9) \quad \left| \iint_{E_{n_0,r}} (z - z_0) \varphi_2(x, y) dx dy \right| < \varrho MD < \sigma.$$

Si osservi ora che il campo $E_{n_0,r}$ è sempre costituito da un numero finito di parti connesse ciascuna delle quali ha per contorni delle poligonali chiuse facenti parte di λ_{n_0+r} o di λ_{n_0} . Sia $E'_{n_0,r}$, una di queste parti e diciamo λ'_{n_0+r} e λ'_{n_0} rispettivamente la lunghezza della porzione di λ_{n_0+r} e di λ_{n_0} che le spetta.

Si ha, per il teorema di GREEN:

$$\begin{aligned} \iint_{\bar{E}'_{n_0, r}} \{ (p-p_0) \varphi_3(x, y) + (q-q_0) \varphi_4(x, y) \} dx dy = \\ = \int_{\lambda'_{n_0+r}} (z-z_0) \varphi_3(x, y) dy - (z-z_0) \varphi_4(x, y) dx - \\ - \iint_{\bar{E}'_{n_0, r}} (z-z_0) \left\{ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_4}{\partial y} \right\} dx dy \end{aligned}$$

e perciò, tenendo conto delle (1), (2), (3), (7), (8) anche:

$$(10) \quad \left| \iint_{\bar{E}'_{n_0, r}} \{ (p-p_0) \varphi_3(x, y) + (q-q_0) \varphi_4(x, y) \} dx dy \right| < 4\varrho M\lambda + \varrho \Phi < \sigma.$$

Dalla (6), per le (9) e (10) si ha quindi:

$$I_{E'_{n_0, r}}(z) - I_{E'_{n_0, r}}(z_0) > -2\sigma$$

e perciò, se r è sufficientemente grande:

$$I_{B_{n_0}}(z) - I_{B_{n_0}}(z_0) > -3\sigma$$

e ciò per ogni funzione $z(x, y)$ della classe C^* soddisfacente in tutti i punti di D alla (8). Ne segue che per dimostrare la semicontinuità inferiore dell'integrale $I_D(z)$ rispetto alla funzione $z_0(x, y)$ basta dimostrare la semicontinuità inferiore dell'integrale $I_{D_{n_0}}(z)$ rispetto alla funzione $z_0(x, y)$. Poichè D_{n_0} è costituito da un numero finito di quadrati e $I_{D_{n_0}}(z)$ è quasi regolare positivo ed è soddisfatta la condizione b), tale semicontinuità deriva dal Teorema II del n. 1.

OSSERVAZIONE. - Il ragionamento ora esposto si estende facilmente al caso in cui la frontiera del campo D sia formata da un numero finito o da una infinità numerabile di curve continue, chiuse, semplici, rettificabili e di lunghezza complessiva finita.

6. - Il teorema del n. 5, quando si sostituisca alla condizione a) quella, più generale, espressa nell'osservazione precedente, generalizza il teorema dato dall'AMERIO.

Infatti affermiamo, in primo luogo, che ogni campo D soddisfacente alla condizione (λ) ⁽¹¹⁾ è un campo del tipo considerato all'Osservazione del numero precedente. Per questo, si osservi che la frontiera di ogni campo poligonale Δ_n (considerato dall'AMERIO) costituisce un insieme di curve continue, chiuse, sem-

⁽¹¹⁾ Vedi nota ⁽⁹⁾.

plici, di lunghezza complessiva inferiore ad uno stesso numero indipendente da n e tutte contenute in uno stesso campo limitato, indipendente da n . Pertanto, per il teorema di HILBERT ⁽¹²⁾, esiste almeno una curva di accumulazione formata da un numero finito o da una infinità numerabile di curve continue, chiuse, rettificabili e di lunghezza complessiva finita. Ora, la frontiera (insieme chiuso) di D dovrà far parte di tali curve di ognuna delle quali, dato che i campi A_n potranno non essere convessi, potranno far parte degli archi, ognuno costituito di punti (che sono anche punti frontiera di D) multipli. Poichè ogni tale curva ha lunghezza finita, il numero di questi archi ad essa relativi risulta, per un noto teorema di CANTOR, finito o tutt'al più numerabile. Si deduce che la frontiera di D è formata da un numero finito o da una infinità numerabile di curve continue, chiuse, senza punti multipli, rettificabili e di lunghezza complessiva finita. Quanto volevamo è perciò provato.

Si osservi ora che, com'è chiaro, non ogni campo del tipo da noi preso in esame all'osservazione del n. 5 soddisfa alla condizione (λ) .

Si noti, infine, che la nostra condizione $c)$ è più larga delle due condizioni $b)$ e $c)$ che compaiono nell'enunciato del teorema dato dall'AMERIO.

Come avevamo affermato dunque, il teorema del n. 5, quando si sostituisca alla condizione $a)$ quella, più generale, espressa nell'osservazione dello stesso numero, generalizza il teorema dato dall'AMERIO.

7. - OSSERVAZIONE. Se $I_D(z)$ è un integrale quasi regolare positivo seminormale potrà abbandonarsi, in tutti gli enunciati dei teoremi sopra riportati l'ipotesi dell'esistenza e della continuità delle derivate parziali f_{px} e f_{qy} come pure potrà, se si vuole, non farsi alcuna ipotesi di derivabilità sulla funzione $f(x, y, z, p, q)$ purchè si ammetta che la $f(x, y, z, p, q)$ sia continua e che la sua *figurativa* per ogni punto (x, y, z) tale che (x, y) appartenga a D (oppure a \bar{D} se si tratta del teorema II del n. 1) sia una superficie concava verso l'alto e tale che esista almeno un piano il quale la lasci tutta al di sopra e avente con essa un solo punto a comune ⁽¹³⁾.

⁽¹²⁾ Cfr. L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Zanichelli, Bologna, 1922, Vol. I, pag. 87.

⁽¹³⁾ Per questo cfr. L. GIULIANO: *Sulle condizioni sufficienti per la semicontinuità degli integrali doppi del Calcolo delle Variazioni*. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, 1941, fase. I, pp. 37-55.