Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Emilio Baiada

Sopra un problema non regolare e un problema isoperimetrico del calcolo delle variazioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 13, nº 1-4 (1948), p. 59-75

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1948_2_13_1-4_59_0>

SOPRA UN PROBLEMA NON REGOLARE E UN PROBLEMA ISOPERIMETRICO DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI (*)

di EMILIO BAIADA (Pisa).

1. - In un gruppo di cinque memorie apparse su *Transactions of the American Mathematical Society* (Vol. 45) MAC SHANE si occupa del problema di Calcolo delle Variazioni nel caso non regolare e di alcuni problemi isoperimetrici che si ricollegano a quello.

La nota III si occupa del problema relativo al caso incompletamente regolare e i risultati a cui giunge si riferiscono a due casi distinti:

1°) Il campo C riempie tutto il piano (x, y) (Theorem I). Il teorema dato dal MAC SHANE estende alcuni dei risultati ottenuti precedentemente da C. CARATHEODORY (1), L. TONELLI (2) e N. BOGOLIOUBOFF (3).

2°) Il campo C non invade tutto il piano ed è formato da un insieme chiuso di punti. Il risultato ottenuto (Theorem II) non è il più generale, come apparirà dalla presente nota.

Nelle memorie IV e V il MAC SHANE si occupa più specificamente del problema isoperimetrico, tanto per integrali in forma ordinaria (nota IV) quanto per quelli in forma parametrica (nota V). I problemi trattati sono intimamente connessi ai problemi liberi studiati nelle precedenti note (I, II e III); perciò sfruttando i risultati ivi raggiunti Egli perviene a dei teoremi da cui ricava per corollario dei teoremi noti precedentemente ed afferma che i teoremi da Lui dati sono più generali di questi ultimi. A prova di ciò viene dato l'esempio notevole seguente:

Posto:

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}} = \int_{\mathfrak{C}} (x-y)^2 \sqrt{x'^2+8y'^2}\, ds,$$

(*) Lavoro eseguito nel Seminario di Matematica presso la Scuola Normale Superiore di Pisa nel 1942.

(1) C. CARATHEODORY: *Ueber die starken Maxima...* Math. Annalen, 62 (1906) p. 440-505.

(2) L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. II, p. 203.

(3) N. BOGOLIOUBOFF: *Sur quelques méthodes nouvelles dans le Calcul des Variations.* Annali di Matematica, Serie IV, vol. II.

trovare, fra tutte le curve continue rettificabili che congiungono due punti del piano e tutte di lunghezza uguale L, quelle che rendano massimo l'integrale $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$.

Faremo vedere che la prova dell'esistenza del massimo, pur non rientrando direttamente nei casi contemplati dai teoremi noti, si può dare facendo uso di ragionamenti che entrano nel quadro di quelli che si fanno nel metodo diretto del Calcolo delle Variazioni.

In generale si può osservare che i ragionamenti del MAC SHANE sono tutt'altro che semplici, inoltre Egli ricorre sempre all'approssimazione delle curve mediante poligonali. Faremo anche, in ultimo, osservare delle proprietà della curva massimante.

2. - Per affrontare lo studio del problema isoperimetrico enunciato nell'introduzione svolgiamo prima alcune considerazioni sul problema libero relativo a un integrale incompletamente regolare.

Questo problema, prima del MAC SHANE, è stato studiato da molti che però si sono sempre limitati al caso in cui il campo invade tutto il piano.

Vediamo ora quali considerazioni si possono pure fare quando ci si riferisce a campi limitati.

Sia $F(x, y, x', y')$ una funzione definita per tutti gli (x, y) appartenenti a un campo finito e chiuso C e per ogni x', y' non entrambi nulli. Supponiamo inoltre che la funzione, là dove è definita, sia continua e derivabile del primo e secondo ordine rispetto a tutti i suoi argomenti e queste derivate siano pure continue. La funzione F sia inoltre positivamente omogenea di grado uno rispetto a x' e y'.

Se $\mathfrak{C}$ indica una curva continua rettificabile di equazioni parametriche $x = x(s)$, $y = y(s)$, $0 \leq s \leq L$, poniamo:

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}} = \int_0^L F[x(s), y(s), x'(s), y'(s)]\, ds,$$

dove nella $F(x, y, x', y')$ si è sostituito a x, y le coordinate della curva e al posto di x', y' le derivate rispetto al parametro, là dove esistono, e uno là dove non esistono.

Supponiamo inoltre che l'integrale $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$ risulti *incompletamente regolare positivo*: cioè risultino soddisfatte le seguenti condizioni:

I. - La figurativa della funzione F relativa a un qualsiasi punto del campo C ha sempre almeno un piano d'appoggio [4] e resta tutta al disopra di tale piano.

[4] Per il significato di questa denominazione vedere il seguito.

II. - Se, in P, l'angolo θ corrisponde a una direzione orientata d'appoggio ([5]) per la figurativa, in tale punto è:

$$F_1(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) > 0.$$

III. - In ciascun punto $P \equiv (x, y)$ esistono le estreme direzioni orientate d'appoggio relative al piano d'appoggio multiplo della figurativa e, se $\theta^{(1)}$, $\theta^{(2)}$ sono gli angoli che definiscono tali direzioni orientate, è:

$$\begin{aligned}\Omega(x, y) = {} & \cos\theta^{(1)} F_x(x, y, \cos\theta^{(2)}, \operatorname{sen}\theta^{(2)}) + \operatorname{sen}\theta^{(1)} F_y(x, y, \cos\theta^{(2)}, \operatorname{sen}\theta^{(2)}) - \\ & - \cos\theta^{(2)} F_x(x, y, \cos\theta^{(1)}, \operatorname{sen}\theta^{(1)}) - \operatorname{sen}\theta^{(2)} F_y(x, y, \cos\theta^{(1)}, \operatorname{sen}\theta^{(1)}) \neq 0.\end{aligned}$$

Oltre all'integrale $\mathfrak{I}_{\mathfrak{C}}$ consideriamo anche l'integrale $\mathcal{F}_{\mathfrak{C}}$:

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{C}} = \int_0^L G[x(s), y(s), x'(s), y'(s)]\, ds,$$

che chiameremo *associato* al precedente e dove la funzione $G(x, y, x', y')$ integranda è definita nel seguente modo:

1° per tutti i θ che definiscono direzioni orientate esterne ai massimi angoli d'appoggio, porremo:

$$G(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = F(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta);$$

2° per tutti gli altri θ, porremo:

$$\begin{aligned}G(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = {} & \cos\theta F_{x'}(x, y, \cos\theta^{(1)}, \operatorname{sen}\theta^{(1)}) + \\ & + \operatorname{sen}\theta F_{y'}(x, y, \cos\theta^{(1)}, \operatorname{sen}\theta^{(1)}) = \cos\theta F_{x'}(x, y, \cos\theta^{(2)}, \operatorname{sen}\theta^{(2)}) + \\ & + \operatorname{sen}\theta F_{y'}(x, y, \cos\theta^{(2)}, \operatorname{sen}\theta^{(2)});\end{aligned}$$

3° $G(x, y, x', y')$ sia inoltre positivamente omogenea di grado 1 rispetto a x' e y'. Terremo sempre presente il noto significato geometrico della $G(x, y, x', y')$.

Da questa definizione e da teoremi noti ([6]) si vede subito l'esistenza del minimo in piccolo per il funzionale $\mathfrak{I}_{\mathfrak{C}}$ e precisamente:

Considerato un insieme A limitato e chiuso di punti interni a C e preso ad arbitrio un numero $\delta > 0$, si possono determinare due numeri positivi δ_0 e ρ_0, con $\rho_0 < \delta_0$, in modo che, se M e N sono due punti qualunque, rispettivamente di A e di C, distanti tra loro per meno di ρ_0, nella classe di tutte le curve ordinarie $\mathfrak{C}$ che appartengono al cerchio (M, δ_0) e che congiungono fra loro in un dato ordine i punti M e N, ne esiste almeno una minimante per $\mathcal{F}_{\mathfrak{C}}$.

Queste minimanti sono costituite da punti interni al cerchio (M, δ_0) e

---

([5]) Per tali denominazioni vedere L. Tonelli: *Calcolo delle Variazioni*, Vol. II, p. 191-192.

([6]) Vedi L. Tonelli: *Calcolo delle Variazioni*, Vol. II, n. 51 *a*) e osserv. n. 4, *c*) e 34 *f*).

sono delle estremaloidi semplici positivamente semiforti (7) *aventi al più un numero finito di punti angolosi* (8).

Supponiamo inoltre che il funzionale $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ soddisfi a una condizione che ci permetta di assicurare l'esistenza del minimo (per es. : i piani d'appoggio siano sempre distinti dal piano (x', y') mentre $F(x, y, x', y')$ sia sempre positiva o al massimo nulla solo su un numero finito di curve di classe 2 aperte prive di punti multipli e aventi a due a due al più un sol punto a comune e tali da non formare nessuna curva chiusa (9)). Sia in questo caso $\mathcal{C}_0$ una curva minimante per l'integrale associato e dimostriamo che i punti di questa curva che non ammettono tangente non possono avere punti d'accumulazione interni al campo C. E infatti se P_0 fosse uno di questi punti in forza del teorema precedente si potrebbe trovare un punto P_1 su $\mathcal{C}_0$ sufficientemente vicino a P_0 tale che l'arco di minimante $\widehat{P_1 P_0}$ dovrebbe avere al massimo un numero finito di punti angolosi, contrariamente all'ipotesi che P_0 sia un punto d'accumulazione di tali punti.

Perciò in ogni arco di $\mathcal{C}_0$ interno a C non vi possono essere che un numero finito di punti angolosi e gli eventuali punti d'accumulazione di essi dovranno trovarsi sul contorno di C.

Suddividiamo la curva $\mathcal{C}_0$ nei suoi archi interni al campo C e nei suoi archi sul contorno del campo : ognuna di queste due classi può contenere al più un'infinità numerabile di archi. Ora su ognuno degli archi interni è certamente $F \equiv G$, poichè essi sono archi d'estremaloidi positivamente semiforti; quindi, per quanto compete a questi archi, il valore del funzionale $\mathfrak{I}_{\mathcal{C}}$ è lo stesso del suo associato.

D'altra parte, se per qualunque arco di $\mathcal{C}$ giacente sul contorno di C è pure $\mathfrak{I}_{\mathcal{C}} \equiv \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$, (per es : se il contorno di C è contorno rettificabile e l'angolo di direzione della tangente, ove questa esista, risulta esterno rispetto ai massimi angoli d'appoggio) oppure se il contorno di C è tale che nessun arco della minimante $\mathcal{C}_0$ possa giacervi, (per es : se il contorno di C è una curva di classe 2 e non è su di essa soddisfatta la condizione necessaria di EULERO generalizzata alla frontiera del campo (10)) avremo sempre per risultato :

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{C}_0} = \mathcal{F}_{\mathcal{C}_0}.$$

Notiamo subito che queste due eventualità favorevoli possono entrambe

(7) Per il significato di *estremaloide semplice* e di *direzione positivamente semiforte*, ved. L. TONELLI : *Calcolo delle Variazioni*, Vol. II, p. 189 e seg.

(8) Vedi L. TONELLI : *Calcolo delle Variazioni*, Vol. II, p. 200.

(9) Vedi L. TONELLI : *Calcolo delle Variazioni*, Vol. II, p. 25-27.

(10) Vedi per es. L. TONELLI : *Calcolo delle Variazioni*, Vol. II, p. 119.

verificarsi su parte distinte del contorno del campo C, la conclusione rimanendo vera ugualmente ([11]).

Ma siccome $\mathcal{C}_0$ è minimante per il problema associato ed inoltre:

$$G(x, y, x', y') \leqslant F(x, y, x', y'),$$

è:

$$\mathfrak{J}_{\mathcal{C}_0} = \mathcal{F}_{\mathcal{C}_0} \leqslant \mathcal{F}_{\mathcal{C}} < \mathfrak{J}_{\mathcal{C}} .$$

L'esistenza della curva minimante risulta così dimostrata ed inoltre sappiamo che essa è formata da archi d'estremaloidi positivamente semiforti ed eventualmente da archi di contorno ed i punti in cui la tangente non esiste devono avere i loro punti d'accumulazione sul contorno del campo.

3. - Applichiamo i risultati del paragrafo precedente al problema libero relativo alla funzione:

$$F(x, y, x', y') \equiv M\sqrt{x'^2+y'^2} - (x-y)^2\sqrt{x'^2+8y'^2}.$$

Per campo C prendiamo quello rinchiuso da un trapezio isoscele di cui le due basi sono parallele all'asse y, il lato obliquo più prossimo alla prima bisettrice degli assi coordinati sia parallelo a questa bisettrice e non giacente su di essa, inoltre tutto il campo stesso stia da una medesima parte rispetto alla bisettrice suddetta. A parte ciò il campo C può essere perfettamente arbitrario.

L'integrale:

$$\mathfrak{J}_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} F ds$$

è sul campo C incompletamente regolare definito positivo per ogni $M > \sqrt{8}A^2$: dove con A si è indicato il massimo di $|x-y|$ in C.

Infatti:

$$F_1 = \frac{M}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{8(x-y)^2}{(x'^2+8y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e, per ogni $M < 8(x-y)^2$, esistono due piani d'appoggio simmetrici rispetto al piano (y', u). Si verifica subito con un breve calcolo che sulle direzioni estreme d'appoggio è $F_1 > 0$.

Quanto alla funzione:

$$\begin{aligned} \Omega_F = & -2(x-y)\sqrt{1+7\,\mathrm{sen}^2\,\theta^{(2)}}\,(\cos\theta^{(1)} + \mathrm{sen}\,\theta^{(1)}) - \\ & -2(x-y)\sqrt{1+7\,\mathrm{sen}^2\,\theta^{(1)}}\,(\cos\theta^{(2)} + \mathrm{sen}\,\theta^{(2)}), \end{aligned}$$

([11]) MAC SHANE ammette l'ipotesi più restrittiva che il problema sia quasi regolare sulla frontiera del campo.

si può osservare che, siccome per ragioni di simmetria della figurativa rispetto ai piani (x', u), (y', u) è:

$$\cos \theta^{(1)} = \cos \theta^{(2)} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \theta^{(1)} = -\operatorname{sen} \theta^{(2)},$$

è quindi:

$$\Omega_F = -2(x-y)\sqrt{1+7 \operatorname{sen}^2 \theta^{(1)}} \cdot 2 \cos \theta^{(1)}.$$

La funzione Ω_F si annulla qualunque sia M solo sulla bisettrice $x-y=0$ quindi mai nel campo C. Sono così verificate le condizioni I, II, III del paragrafo 2.

Sulle basi del trapezio la funzione F coincide con la G giacchè l'angolo di direzione $\theta = \pm \frac{M}{2}$ è sempre esterno ai due massimi angoli d'appoggio qualunque sia M. Ora vogliamo verificare che sui lati obliqui del trapezio non possono giacere degli archi della minimante del problema associato. Infatti per un teorema classico dovuto a WEIERSTRASS che estende la condizione di EULERO al contorno del campo dovrebbe essere:

$$F_{y'x} - F_{x'y} + F_1(x'y'' - x''y') \begin{matrix} \leq 0 \\ \geq 0 \end{matrix}$$

(la disuguaglianza superiore vale se il campo si trova a sinistra dell'arco, se il campo si trova alla destra deve valere la disuguaglianza inferiore).

Nel nostro caso dovrebbe essere:

$$\frac{-2(x-y)(x'+8y')}{\sqrt{x'^2+8y'^2}} \begin{matrix} \leq 0 \\ \geq 0 \end{matrix}.$$

Nel semipiano superiore limitato dalla bisettrice $x-y=0$ è $x-y<0$ e se si pensa percorrere il contorno di C nel verso antiorario lasciando perciò l'area alla sinistra è anche $x'+8y'>0$: la condizione precedente non può pertanto essere verificata. Analogo risultato vale se C è nel semipiano inferiore.

In forza dei risultati ottenuti nel paragrafo 2, comunque fissati due punti P_1 e P_2 di C, fra tutte le curve rettificabili congiungenti P_1, P_2 e appartenenti a C ne esiste almeno una minimante per il problema libero in questione qualunque sia $M > \sqrt{8} A^2$ ([12]).

([12]) Si potrebbe dimostrare l'esistenza del minimo anche per $M = \sqrt{8} A^2$, come si è accennato nel § precedente, ma tale esistenza non occorre nel seguito e perciò non vi insistiamo.

4. - In questo paragrafo poniamo:

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} (x-y)^2 \sqrt{x'^2+8y'^2}\, ds,$$

e

$$H_{\mathcal{C}}(M) = \int_{\mathcal{C}} \left\{ M\sqrt{x'^2+y'^2} - (x-y)^2\sqrt{x'^2+8y'^2} \right\} ds = M_0\, \mathfrak{L}_{\mathcal{C}} - \mathfrak{I}_{\mathcal{C}},$$

dove con $\mathfrak{L}_{\mathcal{C}}$ si è indicata la lunghezza della curva $\mathcal{C}$.

Osserviamo che, supposto che il problema del minimo fra tutte le curve rettificabili congiungenti due punti P_1 e P_2, relativo al funzionale $H_{\mathcal{C}}(M)$, ammetta soluzione e, se $\mathcal{C}(M)$ è una minimante, $\mathfrak{L}_{\mathcal{C}(M)}$ indica la sua lunghezza, anche il problema del massimo del funzionale $\mathfrak{I}_{\mathcal{C}}$ fra tutte le curve continue rettificabili del campo precedente congiungenti P_1 e P_2 che abbiano lunghezza uguale a $\mathfrak{L}_{\mathcal{C}}(M)$ ammette soluzione. Infatti da:

$$H_{\mathcal{C}}(M) = M\mathfrak{L}_{\mathcal{C}} - \mathfrak{I}_{\mathcal{C}} \geqslant H_{\mathcal{C}(M)} = M\mathfrak{L}_{\mathcal{C}(M)} - \mathfrak{I}_{\mathcal{C}(M)},$$

se $\mathfrak{L}_{\mathcal{C}} = \mathfrak{L}_{\mathcal{C}(M)}$, se ne ricava:

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{C}} \leqslant \mathfrak{I}_{\mathcal{C}(M)}.$$

Sappiamo dal paragrafo precedente che per $M > \sqrt{8}A^2$ il problema di minimo per $H_{\mathcal{C}}(M)$ ammette soluzione. Sappiamo anche ([13]) che la quantità $\mathfrak{L}_{\mathcal{C}(M)}$ pensata come funzione di M è monotona decrescente rispetto a M.

Dimostriamo qui che essa è anche continua rispetto a M.

Sia per ciò una successione:

(I) $$M_1,\ M_2, \ldots,\ M_n, \ldots$$

di numeri tendenti a un numero $M_0 > \sqrt{8}\,A^2$, e siano:

(II) $$\mathcal{C}(M_1),\ \mathcal{C}(M_2), \ldots,\ \mathcal{C}(M_n), \ldots$$

le curve minimanti del problema libero relativo ai funzionali:

$$H_{\mathcal{C}}(M_1),\ H_{\mathcal{C}}(M_2), \ldots,\ H_{\mathcal{C}}(M_n) \ldots$$

Siccome queste curve sono limitate in lunghezza, giacchè $\mathfrak{L}_{\mathcal{C}(M)}$ è una funzione monotona decrescente, esse ammettono una curva d' accumulazione che indichiamo con $\mathcal{C}_0$.

([13]) Vedi E. BAIADA: *Sopra un problema di* MAYER. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II, vol. IX, 1940.

Dimostriamo che $\mathcal{C}_0$ è una minimante per il problema libero relativo al funzionale $H_{\mathcal{C}}(M_0)$ e che quindi:

$$H_{\mathcal{C}(M_0)}(M_0) = H_{\mathcal{C}_0}(M_0).$$

Osserviamo che:

$$(1) \qquad | H_{\mathcal{C}}(M_n) - H_{\mathcal{C}}(M_0) | = | M_n - M_0 | \mathcal{L}_{\mathcal{C}}.$$

Proviamo che la successione II è una successione minimizzante per il problema di minimo relativo al funzionale $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(M_0)$ associato al funzionale $H_{\mathcal{C}}(M_0)$. Infatti, sia:

$$(\mathrm{II}') \qquad \{ \mathcal{C}_1' \}, \ \{ \mathcal{C}_2' \}, \ldots, \ \{ \mathcal{C}_n' \} \ldots$$

una successione minimizzante per il problema suddetto; sappiamo che l'insieme delle lunghezze $\mathcal{L}_{\mathcal{C}(M_n)}$ delle curve della II è superiormente limitato cioè:

$$(2) \qquad \mathcal{L}_{\mathcal{C}(M_n)} \leqslant K \quad \text{qualunque sia } n.$$

Anche le lunghezze delle curve della successione (II′) sono superiormente limitate essendo $H_{\mathcal{C}}(M_0)$ definito positivo e quindi:

$$(3) \qquad \mathcal{L}_{\mathcal{C}_n'} \leqslant K' \quad \text{qualunque sia } n.$$

Se indichiamo con $G_M(x, y, x', y')$ la funzione associata della funzione:

$$F_M \equiv M \sqrt{x'^2 + y'^2} - (x-y)^2 \sqrt{x'^2 + 8 y'^2},$$

avremo:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(M_n) - \mathcal{F}_{\mathcal{C}}(M_0) = \int_{\mathcal{C}} \{ G_{M_n}(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) - G_{M_0}(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \} ds.$$

Se M_n tende a M_0 la differenza sotto il segno di integrale tende allo zero uniformemente qualunque siano x, y, in C e $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Infatti se con $\theta^{(1)}_{M)}$ indichiamo una delle direzioni orientate d'appoggio relativamente alla $F_{(M)}$, essa è uguale a:

$$M_n - (x-y)^2 \sqrt{1 + 7 \operatorname{sen}^2 \theta^{(1)}_{M_n}} - M_0 + (x-y)^2 \sqrt{1 + 7 \operatorname{sen}^2 \theta^{(1)}_{M_n}}$$

per ogni θ compreso nella parte a comune agli angoli d'appoggio; a

$$M_n - M_0$$

per ogni θ esterno a tutti gli angoli d'appoggio; a

$$M_n - (x-y)^2 \sqrt{1 + 7 \operatorname{sen}^2 \theta} - M_0 + (x-y)^2 \sqrt{1 + 7 \operatorname{sen}^2 \theta^{(1)}_{M_0}}$$

per ogni θ esterno a gli angoli d'appoggio della G_{M_0} ed intermo a un angolo d'appoggio della G_{M_0}; finalmente a :

$$M_n-(x-y)^2\sqrt{1+7\,\mathrm{sen}^2\,\theta_{M_0}^{(1)}}-M_0+(x-y)^2\sqrt{1+7\,\mathrm{sen}^2\,\theta}$$

nell'eventualità contraria.

Ora, se M_n è sufficientemente vicino [14] a M_0, anche $\theta_{M_n}^{(1)}$ è vicino quanto si vuole a $\theta_{M_0}^{(1)}$ e questo uniformemente rispetto a x, y in C.

Da questo e dalle (2) e (3) avremo che, preso un $\varepsilon>0$, possiamo determinare un indice $\bar{n}$ intero tale che, se $n>\bar{n}$, sia :

$$(4)\qquad |\mathcal{F}_{\mathcal{C}_n'}(M_n)-\mathcal{F}_{\mathcal{C}_n'}(M_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

e un indice intero $\bar{\bar{n}}$ tale che, se $n>\bar{\bar{n}}$, sia :

$$(5)\qquad |\mathcal{F}_{\mathcal{C}(M_n)}(M_n)-\mathcal{F}_{\mathcal{C}(M_n)}(M_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Inoltre essendo la (II') successione minimizzante si può determinare un n' intero tale che per $n>n'$ sia, se i indica l'estremo inferiore di $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ sulla nostra classe di curve :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}_n'}(M_0)<i+\frac{\varepsilon}{3}.$$

Ma la curva $\mathcal{C}(M_n)$, che è una minimante per il problema relativo al funzionale $H_{\mathcal{C}}(M_n)$, è anche curva minimante per il problema associato $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(M_n)$ a causa della dimostrazione stessa dell'esistenza di quella minimante e quindi :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}(M_n)}(M_n)\leq\mathcal{F}_{\mathcal{C}_n'}(M_n)$$

e, per la (4),

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}(M_n)}(M_n)\leq\mathcal{F}_{\mathcal{C}_n'}(M_0)+\frac{\varepsilon}{3},$$

mentre per la (5) si avrà :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}(M_n)}(M_0)\leq\mathcal{F}_{\mathcal{C}_n'}(M_0)+\frac{2\varepsilon}{3}\leq i+\varepsilon.$$

Risulta così dimostrato l'asserto. Perciò con gli stessi ragionamenti già fatti al paragrafo 2 si dimostrerebbe che $\mathcal{C}_0$ è una minimante per il problema associato e quindi anche per il problema incompletamente regolare.

Si ha così :

$$\lim_{n\to\infty}H_{\mathcal{C}(M_n)}(M_n)=H_{\mathcal{C}_0}(M_0)$$

e, per quanto si è già visto, $\mathcal{C}_0$, che è minimante, è formata da un numero

---

[14] Vedi L. TONELLI : *Calcolo delle Variazioni*, Vol. II, n. 62 *b*).

finito di archi di estremali sulle quali è $F_1 > 0$. Per un importante teorema di convergenza ([15]) è anche:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{\mathcal{C}(M_n)} = \mathcal{L}_{\mathcal{C}_0}, \qquad \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}_{\mathcal{C}(M_n)} = \mathcal{J}_{\mathcal{C}_0}.$$

È così dimostrato che $\mathcal{L}_{\mathcal{C}(M)}$ è funzione continua di M.

5. - Da quanto è stato detto risulta che se si tratta di risolvere il problema isoperimetrico relativo all'integrale $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ fra tutte le curve di lunghezza $\mathcal{L}_{\mathcal{C}} = K$ e riusciamo a provare che esiste un $\overline{M}$ per cui $\mathcal{L}_{\mathcal{C}(\overline{M})} > K$ mentre che se M tende all'infinito $\mathcal{L}_{\mathcal{C}(M)}$ tende alla distanza $\overline{P_1 P_2}$ dei due punti, l'esistenza della soluzione del problema viene provata. È questo lo schema del ragionamento che faremo nel seguito.

a) Proviamo prima che se M tende all'infinito la lunghezza $\mathcal{L}_{\mathcal{C}(M)}$ della minimante tende alla distanza $\overline{P_1 P_2}$.

Infatti la minimante, giacchè per M sufficientemente grande l'integrale diventa regolare, deve soddisfare alle equazioni di EULERO - LAGRANGE scritte nel modo seguente:

$$-2(x-y)\sqrt{x'^2+8y'^2} - \frac{d}{ds}\left[\frac{Mx'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} - \frac{x'(x-y)^2}{\sqrt{x'^2+8y'^2}}\right] = 0$$

$$2(x-y)\sqrt{x'^2+8y'^2} - \frac{d}{ds}\left[\frac{My'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} - \frac{8y'(x-y)^2}{\sqrt{x'^2+8y'^2}}\right] = 0$$

da cui, combinando linearmente e integrando rispetto a s, viene:

$$2\int_0^s (x-y)\sqrt{x'^2+8y'^2}(\mu-\lambda)ds - M(x'\lambda+\mu y') + (x-y)^2\frac{\lambda x' + 8\mu y'}{\sqrt{x'^2+8y'^2}} = c.$$

Per M sufficientemente grande il problema diventa regolare e la minimante ha ovunque tangente. Se per λ e μ prendiamo i coseni direttori d'un asse normale a $P_1 P_2$, per il teorema del valor medio esisterà sempre un punto in cui $x'\lambda + \mu y' = 0$ e quindi per M tendente all'infinito la costante c (che dipende generalmente da M) si mantiene limitata. Da questa osservazione risulta allora che $x'\lambda + \mu y'$ deve necessariamente tendere uniformemente a zero per M tendente all'infinito e così $\mathcal{C}(M)$ tende uniformemente al segmento $P_1 P_2$ e la sua lunghezza $\mathcal{L}_{\mathcal{C}(M)}$ tende alla lunghezza del segmento.

b) Supporremo ora invece M sufficientemente vicino a $\sqrt{8}\,A^2$: il problema di minimo relativo al funzionale $H_{\mathcal{C}}(M)$ è incompletamente regolare e, per

([15]) L. TONELLI: *Calcolo delle Variazioni*, Vol. II, n. 124 e n. 120.

quanto si è visto precedentemente nella dimostrazione dell'esistenza della minimante, si può osservare che l'angolo di direzione, in ogni punto della minimante (nei punti angolosi prenderemo la tangente a sinistra o la tangente a destra) deve risultare non interno ai due angoli d'appoggio.

Ora, per ragioni di simmetria, i piani d'appoggio devono contenere l'asse y' e sulle direzioni orientate estreme d'appoggio deve risultare $F_{y'}=0$ e cioè :

$$F_{y'}=\frac{My'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}-(x-y)^2\frac{8y'}{\sqrt{x'^2+8y'^2}}=0$$

e dunque

$$\frac{8(x-y)^2}{M}=\frac{\sqrt{x'^2+8y'^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2}}.$$

Cosichè, se indichiamo con a il minimo positivo di $|x-y|$ nel campo C avremo che in ogni punto della minimante $\mathcal{C}(M)$ l'angolo di direzione θ della tangente (la tangente destra e la tangente sinistra nei punti angolosi) là dove esiste deve essere tale che :

$$\frac{8a^2}{M}\leq\sqrt{1+7\ \mathrm{sen}^2\ \theta},$$

da cui

$$|\cos\theta|\leq\sqrt{\frac{8}{7}}\sqrt{1-\frac{8a^4}{M^2}}.$$

Ne segue che, se P_1, P_2 non si trovano su una medesima parallela all'asse y [16] e indichiamo con x_1 e x_2 rispettivamente le ascisse di P_1 e di P_2, sarà :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}(M)}\geq\frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{\frac{8}{7}}\sqrt{1-\frac{8a^4}{M^2}}}$$

e, se scegliamo M minore di $\sqrt{8}\,\frac{A^3}{a}$, sarà anche :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}(M)}\geq\frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{\frac{8}{7}}\sqrt{1-\frac{a^6}{A^6}}}.$$

Ora, se facciamo tendere a zero tutte le dimensioni di C rimpiccolendolo per similitudine e lasciando fermi il punto P_1 e la direzione $P_1\,P_2$, avremo che $\frac{a}{A}$ tende a 1 e $1-\frac{a^6}{A^6}$ tende a zero del primo ordine ripetto a $\overline{P_1}\,\overline{P_2}$ come infinitesimo principale e così pure $|x_1-x_2|$ è infinitesimo del primo ordine. Perciò $\mathcal{L}_{\mathcal{C}(M)}$ è certamente d'un ordine d'infinitesimo minore o tutt'al più uguale a $\frac{1}{2}$.

---

[16] Se $x_1=x_2$ l'esistenza della minimante è evidente e la minimante consta di due segmenti paralleli all'asse delle y.

Questo ragionamento dimostra l'esistenza della soluzione « in piccolo » del problema isoperimetrico considerato : vedremo nel paragrafo seguente come si passerà al problema in grande.

6. - Prendiamo adesso in considerazione il problema isoperimetrico enunciato nel paragrafo 1.

Sia :

$$\text{(I)} \qquad \{ \mathcal{C}_1 \},\ \{ \mathcal{C}_2 \},\dots,\ \{ \mathcal{C}_n \},\dots$$

una successione massimizzante per l'integrale $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}} = \int\limits_{\mathcal{C}} (x-y)^2 \sqrt{x'^2+8y'^2}\, ds$ fra tutte le curve rettificabili e continue congiungenti due punti P_1, P_2 e tutte di lunghezza L. Facciamo prima alcune considerazioni che ci saranno utili nel seguito.

1. - Se una curva continua rettificabile $\mathcal{C}$ è incontrata in due punti P e Q da una stessa parallela all'asse x e se P e Q si trovano entrambe dalla medesima parte rispetto alla bisettrice $y-x=0$, e se tutto l'arco stesso $\mathcal{C}'$ staccato da questa secante sulla curva $\mathcal{C}$ si trova al disotto [al disopra] di questa secante nel caso in cui P e Q siano nel semipiano $y-x>0$ [nel semipiano $y-x<0$], operando una simmetria dell'arco $\mathcal{C}'$ rispetto alla secante e sostituendo a $\mathcal{C}'$ nella curva $\mathcal{C}$ l'arco simmetrico, otteniamo una curva $\overline{\mathcal{C}}$ continua, rettificabile, di lunghezza uguale a quella della curva $\mathcal{C}$. Però come è evidente :

$$\mathfrak{J}_{\overline{\mathcal{C}}} > \mathfrak{J}_{\mathcal{C}} .$$

2. - Se una curva continua, rettificabile $\mathcal{C}$ è incontrata da una parallela all'asse y in due punti che si trovano sul medesimo semipiano $y-x>0$ [$y-x<0$] e se tutto l'arco $\mathcal{C}'$ staccato da questa secante si trova a destra [a sinistra] rispetto a questa secante, se operiamo una simmetria rispetto a questa secante e se sostituiamo nella curva $\mathcal{C}$ all'arco $\mathcal{C}'$ il suo simmetrico, otteniamo così una curva $\overline{\mathcal{C}}$ continua rettificabile di lunghezza uguale a quella della curva $\mathcal{C}$. Però anche qui sarà :

$$\mathfrak{J}_{\overline{\mathcal{C}}} > \mathfrak{J}_{\mathcal{C}} .$$

Ripetendo queste simmetrie un numero finito o infinito di volte si viene ad ottenere una curva $\mathcal{C}^*$ (direttamente se le simmetrie sono in numero finito, come curva d'accumulazione nel caso di infinite simmetrie) per cui non accade nessuna delle due eventualità precedenti ed inoltre tale che :

$$\mathfrak{J}_{\mathcal{C}^*} > \mathfrak{J}_{\mathcal{C}} .$$

In seguito a questo ragionamento possiamo senz'altro supporre che la successione massimizzante (I) sia formata tutta di curve per cui non accadono le eventualità precedenti.

La successione (I) ammette una curva limite $\mathcal{C}_0$ continua, rettificabile e da essa si può estrarre una successione che tenda uniformemente a $\mathcal{C}_0$ secondo una legge di corrispondenza ([17]) Ω. È evidente che se la lunghezza di $\mathcal{C}_0$ risulta uguale ad L il problema ammette soluzione e $\mathcal{C}_0$ è una curva massimante.

Potrebbe però presentarsi il caso $\mathcal{L}_{\mathcal{C}_0} < L$. Faremo vedere nel seguito che ciò è da escludersi.

Supponiamo che ciò avvenga, vuol dire che esisterà almeno un punto P_0 tale che comunque presi due punti $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ di $\mathcal{C}_0$ precedente e seguente P_0 (se P_0 non è punto terminale di $\mathcal{C}_0$; solo $P^{(1)}$ o solo $P^{(2)}$ se P_0 è rispettivamente secondo o primo punto terminale di $\mathcal{C}_0$) e indicati con: $P_n^{(1)}$ e $P_n^{(2)}$ i punti della $\mathcal{C}_n$ corrispondenti secondo la Ω a $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ e con:

$$\{\mathcal{C}_1(P_1^{(1)}, P_1^{(2)})\},\ \{\mathcal{C}_2(P_2^{(1)}, P_2^{(2)})\},\dots \{\mathcal{C}_n(P_n^{(1)}, P_n^{(2)})\},\dots$$

gli archi delle curve della successione (I) corrispondenti secondo la Ω all'arco $\mathcal{C}_0(P^{(1)}, P^{(2)})$ della curva $\mathcal{C}_0$ di estremi $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, sia:

$$\lim_{n\to\infty} \{\mathcal{L}_{\mathcal{C}_n(P_n^{(1)},\, P_n^{(2)})}\} = R > \mathcal{L}_{\mathcal{C}_0(P^{(1)},\, P^{(2)})},$$

a) P_0 non sia sulla retta $x-y=0$, $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ si potranno allora scegliere in modo che tutto $\mathcal{C}_0(P^{(1)}, P^{(2)})$ sia da una medesima parte rispetto alla bisettrice. È chiaro per le considerazioni fatte in 1°) e 2°) e a condizione di prendere sempre $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ sufficientemente vicini a P_0, che, posto $P^{(1)} \equiv (x_1, y_1)$ $P^{(2)} \equiv (x_2, y_2)$, sia:

(1) $$R \leq |x_1 - x_2| + |y_2 - y_1|.$$

Supponiamo che in P_0 non esista la tangente parallela all'asse y, ciò implica che, comunque si restringa l'intorno di P_0 esistono sempre dei punti $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ comprendenti P_0 e un $0 < K < \frac{\pi}{2}$ tali che l'angolo di direzione θ della corda $P^{(1)}P^{(2)}$ sia: $-K < \theta < K$. Quindi $|x_1 - x_2|$ è un infinitesimo del primo ordine rispetto a $\overline{P^{(1)}P^{(2)}}$, mentre R è infinitesimo [dalla (1)] del primo o di ordine superiore al primo. È dunque possibile trovare un intorno C, a forma di trapezio del tipo di quelli considerati al § 3, sufficientemente piccolo e contenente P_0 internamente e due punti $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ tali che esista un $\overline{M}$ per cui:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(\overline{M}) > R.$$

Dalla curva $\mathcal{C}_n(P_n^{(1)}, P_n^{(2)})$, con n sufficientemente grande in modo che essa appartenga al campo C, congiungendo $P_n^{(1)}$ con $P^{(1)}$ e $P_n^{(2)}$ con $P^{(2)}$ mediante segmenti, otteniamo una curva $\overline{\mathcal{C}}_n$, e per quanto si è già visto, fra tutte le

([17]) Per il significato di *corrispondenza* Ω vedere L. Tonelli: *Calcolo delle Variazioni*, Vol. I, n. 18 *b*).

curve congiungenti $P^{(1)}$ e $P^{(2)}$ di lunghezza $\mathcal{L}_{\overline{\mathcal{C}}_n}$, appartenenti al campo C, ne esiste una massimante che indichiamo con $\mathcal{C}_n^*$. Sia M_n il valore del parametro M che gli corrisponde.

Siccome $\mathcal{L}_{\mathcal{C}(M)}$ è funzione monotona e continua e siccome $\mathcal{L}_{\mathcal{C}_n^*}$ tende a R per n tendente all'infinito, M_n deve tendere a un numero determinato M_0 tale che:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}(M_0)} = R .$$

La successione $\{\mathcal{C}_n^*\}$ è, come abbiamo visto al § 3, una successione minimizzante per il problema libero fra tutte le curve rettificabili congiungenti $P^{(1)}, P^{(2)}$ interne al campo C e relativamente all'integrale $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ associato all'integrale $H_{\mathcal{C}}(M_0)$. Ma siccome:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{J}_{\mathcal{C}_n^*} = \lim_{n\to\infty} J_{\mathcal{C}_n(P_n^{(1)},\, P_n^{(2)})} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{\mathcal{C}_n^*} = R,$$

la successione $\{\mathcal{C}_n(P_n^{(1)}, P_n^{(2)})\}$ è anch'essa minimizzante per questo problema giacchè:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_{\mathcal{C}_n^*} = H_{\mathcal{C}(M_0)} = \lim_{n\to\infty} H_{\mathcal{C}_n^*}(M_0) = M_0 \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{\mathcal{C}_n^*} - \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}_{\mathcal{C}_n^*} .$$

Per gli stessi ragionamenti fatti al § 3 viene che $\mathcal{C}_0(P^{(1)}, P^{(2)})$ è minimante per il problema relativo a $H_{\mathcal{C}}(M_0)$ e quindi $\mathcal{L}_{\mathcal{C}} = R$ contrariamente all'ipotesi.

β) Consideriamo ora l'insieme E dei punti di $\mathcal{C}_0$ che hanno tangente parallela all'asse y. L'insieme E è misurabile secondo LEBESGUE e, preso un $\varepsilon > 0$, si può ricoprire E con al più un'infinità numerabile di archi:

$$\mathcal{C}_0(M^{(1)}, N^{(1)}),\ \mathcal{C}_0(M^{(2)}, N^{(2)}),\ldots,\ \mathcal{C}_0(M^{(i)}, N^{(i)})\ldots$$

tali che, posto:

$$M^{(i)} \equiv (x_i, y_i),\ N^{(i)} \equiv (\bar{x}_i, \bar{y}_i)\ ; \quad \mathcal{J}_{\mathcal{C}_{0,E}} = \int_E (x-y)^2 \sqrt{x'^2 + 8y'^2}\, ds ,$$

sia:

$$(1) \quad \sum_i |x_i - \bar{x}_i| < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad (2) \quad \sum_i \mathcal{J}_{\mathcal{C}_0(M^{(i)},\, N^{(i)})} < \mathcal{J}_{\mathcal{C}_{0,E}} + \varepsilon .$$

Per la (1) viene:

$$R' = \sum_i \lim_{n\to\infty} \left\{ \mathcal{L}_{\mathcal{C}_n(M_n^{(i)},\, N_n^{(i)})} \right\} \leqslant \varepsilon + \sum_i |y_i - \bar{y}_i| ,$$

dove $M_n^{(i)}, N_n^{(i)}$ sono i corrispondenti di $M^{(i)}, N^{(i)}$ secondo la corrispondenza Ω.

Ma siccome:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}_0(M^{(i)},\, N^{(i)})} \geqslant |y_i - \bar{y}_i| ,$$

sarà pure:

$$(3) \qquad R' \leqslant \varepsilon + \sum_i \mathcal{L}_{\mathcal{C}_0(M^{(i)},\, N^{(i)})} .$$

Ora, per un teorema noto di confronto ([18]) è:

$$(4)\quad \lim_{n\to\infty} \mathfrak{J}_{\mathcal{C}_n(M_n^{(i)},\, N^{(i)})} - \mathfrak{J}_{\mathcal{C}_0(M^{(i)},\, N^{(i)})} = (x_i'-y_i')^2 \left[\lim_{n\to\infty} R_{\mathcal{C}_n(M_n^{(i)},\, N_n^{(i)})} - R_{\mathcal{C}_0(M^{(i)},\, N^{(i)})}\right],$$

dove (x_i', y_i') sono le coordinate di un punto dell'arco $\mathcal{C}_0(M^{(i)}, N^{(i)})$ mentre per brevità abbiamo posto:

$$R_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} \sqrt{x'^2+8y'^2}\, ds .$$

Però, siccome il funzionale $8\mathcal{L}_{\mathcal{C}} - R_{\mathcal{C}}$ è semicontinuo inferiormente, è:

$$\lim_{n\to\infty} R_{\mathcal{C}_n} - R_{\mathcal{C}_0} \leq 8\left[\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{\mathcal{C}_n} - \mathcal{L}_{\mathcal{C}_0}\right],$$

cosichè la (4) permette di scrivere la seguente disuguaglianza:

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{J}_{\mathcal{C}_n(M_n^{(i)},\, N_n^{(i)})} - \mathfrak{J}_{\mathcal{C}_0(M^{(i)},\, N^{(i)})} \leq 8(x_i'-y_i')^2 \left[\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{\mathcal{C}_n(M_n^{(i)},\, N_n^{(i)})} - \mathcal{L}_{\mathcal{C}_0(M^{(i)},\, N^{(i)})}\right]$$

da cui, sommando rispetto a i, tenendo conto della (3) e indicando con A il massimo di $(x-y)^2$ su $\mathcal{C}_0$, viene:

$$\sum_i \lim_{n\to\infty} \mathfrak{J}_{\mathcal{C}_n(M_n^{(i)},\, N_n^{(i)})} - \sum_i \mathfrak{J}_{\mathcal{C}_0(M^{(i)},\, N^{(i)})} \leq 8A\varepsilon ,$$

e quindi, per la (2):

$$\mathfrak{J}_{\mathcal{C}_{0,E}} > \sum_i \lim_{n\to\infty} \left\{ \mathfrak{J}_{\mathcal{C}_n(M_n^{(i)},\, N_n^{(i)})} \right\} - \varepsilon(8A+1).$$

γ) Sia Q l'insieme dei punti di $\mathcal{C}_0$ che giacciono sulla bisettrice $x-y=0$. Comunque prefissato un $\varepsilon>0$, Q si può ricoprire con una successione di archi:

$$\mathcal{C}_0(Q^{(1)}, R^{(1)}),\ \mathcal{C}_0(Q^{(2)}, R^{(2)}),\dots,\ \mathcal{C}_0(Q^{(i)}, R^{(i)}),\dots$$

tali che

$$\sum_i \lim_{n\to\infty} \left\{ \mathfrak{J}_{\mathcal{C}_n(Q^{(i)},\, R^{(i)})} \right\} < \varepsilon .$$

Consideriamo ora la curva $\mathcal{C}_0$ e togliamo da essa i plurintervalli

$$\Delta^{(1)} = \sum_i \mathcal{C}_0(M^{(i)}, N^{(1)}) \quad \text{e} \quad \Delta^{(1)} = \sum_i \mathcal{C}^0(Q^{(i)}, R^{(i)}) .$$

Rimarrà un insieme chiuso T di punti tale che per ogni suo punto P_0 esiste un arco $\mathcal{C}_0(P^{(1)}, P^{(2)})$, che lo contiene internamente, per cui:

$$(5)\qquad \lim_{n\to\infty} \left\{ \mathfrak{J}_{\mathcal{C}_n(P_n^{(1)},\, P_n^{(2)})} \right\} = \mathfrak{J}_{\mathcal{C}_0(P^{(1)},\, P^{(2)})} ,$$

e tale uguaglianza vale anche per ogni arco interno a $\mathcal{C}_0(P^{(1)}, P^{(2)})$.

([18]) Vedere L. TONELLI: *Calcolo delle Variazioni*, Vol. I, n. 121.

([19]) Vedi per es. L. TONELLI: *Calcolo delle Variazioni*, Vol. II, n. 153.

Diciamo che si può ricoprire T con una successione di archi :

$$\mathcal{C}_0(U^{(1)}, S^{(1)}),\ \mathcal{C}_0(U^{(2)}, S^{(2)}),\dots,\ \mathcal{C}_0(U^{(i)}, S^{(i)}),\dots$$

in modo che se, $U_n{}^{(i)}$, $S_n{}^{(i)}$ indicano i corrispondenti di $U^{(i)}$, $S^{(i)}$ secondo la corrispondenza Ω, sia :

$$\sum_i \lim_{n\to\infty} \left\{ \mathfrak{I}_{\mathcal{C}_n(U_n{}^{(i)},\, S_n{}^{(i)})} \right\} = \sum_i \mathfrak{I}_{\mathcal{C}_0(U^{(i)},\, S^{(i)})}\,,$$

e inoltre :

$$(6)\quad \mathfrak{I}_{\mathcal{C}_0,\, T} = \int_T (x-y)^2 \sqrt{x'^2+8y'^2}\, ds \geqslant \sum_i \mathfrak{I}_{\mathcal{C}_0(U^{(i)},\, S^{(i)})} - \varepsilon = \sum_i \lim_{n\to\infty} \left\{ \mathfrak{I}_{\mathcal{C}_n(U_n{}^{(i)},\, S_n{}^{(i)})} \right\} - \varepsilon.$$

Infatti, per il lemma di PINCHERLE - BOREL, si può scegliere un numero finito di archi ricoprenti T e che godono della proprietà (5) ; inoltre si può trovare un plurintervallo Δ che ricopra anch'esso T e tale però che :

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{C}_0,\, \Delta} \leqslant \mathfrak{I}_{\mathcal{C}_0,\, T} + \varepsilon\,.$$

Considerato il plurintervallo prodotto di Δ e del numero finito di archi sopra detto, esso ricopre T e gode della proprietà richiesta.

Per quanto abbiamo visto in β) è :

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{C}_0,\, E} > \sum_i \lim_{n\to\infty} \mathfrak{I}_{\mathcal{C}_n(M_n{}^{(i)},\, N_n{}^{(i)})} - \varepsilon\,(6A+1)\,,$$

e, per ciò che abbiamo detto in γ), è

$$0 > \sum_i \lim_{n\to\infty} \left\{ \mathfrak{I}_{\mathcal{C}_n(Q_n{}^{(i)},\, R_n{}^{(i)})} \right\} - \varepsilon\,,$$

da cui, sommando membro a membro con la (6) e ricordando che le convergenze sono uniformi, risulta

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{C}_0} > \lim_{n\to\infty} \mathfrak{I}_{\mathcal{C}_n} - \varepsilon\,(8A+3).$$

Poichè ε è arbitrario, è così provato che la curva $\mathcal{C}_0$ è curva massimante per il problema considerato.

7. - Sappiamo già che la curva massimante $\mathcal{C}_0 \equiv (x=x(s),\ y=y(s))$ deve (se non si riduce a un segmento) soddisfare alle equazioni :

$$(7)\qquad 2\int_0^s (x-y)\sqrt{x'^2+8y'^2}\, ds - \left[\frac{Mx'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} - \frac{(x-y)^2 x'}{\sqrt{x'^2+8y'^2}}\right] = C_1\,,$$

$$(8)\qquad -\,2\int_0^s (x-y)\sqrt{x'^2+8y'^2}\, ds - \left[\frac{My'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} - \frac{8(x-y)^2 y'}{\sqrt{x'^2+8y'^2}}\right] = C_2\,,$$

da cui, sommando :

$$\text{(9)} \qquad \frac{M(x'+y')}{\sqrt{x'^2+y'^2}} - \frac{(x-y)^2(x'+8y')}{\sqrt{x'^2+8y'^2}} = C.$$

Ma, per la dimostrazione svolta nel § precedente, sappiamo che ogni punto P_0 di $\mathcal{C}_0$ in cui la tangente non esiste si può circondare con un arco $\mathcal{C}_0(P^{(1)}, P^{(2)})$ che rende anche minimo il problema libero relativo al funzionale $H_{\mathcal{C}}(M_0)$ e quindi relativamente a questo arco devono essere soddisfatte le equazioni ottenute dalle 7) e 8) sostituendo M con M_0 ; e facendo la differenza risulta :

$$(M-M_0)\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = k_1, \qquad (M-M_0)\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = k_2,$$

e quindi, o si tratta d'un segmento rettilineo, oppure $M=M_0$. Inoltre sappiamo che in P_0 al più vi può essere un punto angoloso. Indichiamo con θ, $\overline{\theta}$ le direzioni orientate delle tangenti destre e sinistre e sappiamo già che (§ 3) :

$$a) \qquad \sqrt{1+7\,\mathrm{sen}^2\,\theta} = \frac{8(x-y)^2}{M}$$

e inoltre, o

$$\begin{array}{llll} 1^\circ) & \cos\theta = \cos\overline{\theta}, & \mathrm{sen}\,\theta = -\,\mathrm{sen}\,\overline{\theta}, \\ 2^\circ) & \cos\theta = -\cos\overline{\theta}, & \mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{sen}\,\overline{\theta}, \\ 3^\circ) & \cos\theta = -\cos\overline{\theta} & \mathrm{sen}\,\theta = -\,\mathrm{sen}\,\overline{\theta}, \end{array}$$

la 9) diventa $\beta)$ $M\cos\theta = \frac{8}{7}\cdot C$ e quindi la 2ª) e 3ª) eventualità non possono presentarsi giacchè θ non può essere $\pm\frac{\pi}{2}$. D'altra parte, confrontando $\beta)$ con $a)$, si ricava che nei punti in cui non esiste la tangente deve essere :

$$(x-y)^2 = k.$$

Ora, è semplice verificare che una curva non può essere massimante se è incontrata in più di due punti da una parallela alla bisettrice $x-y=0$.

D'altra parte dalle 1°) e 2°) si vede che se P_0 si trova sulla bisettrice $x-y=0$ e se $\overline{s}$ è il valore del parametro s che gli corrisponde avremo che passando al limite per s tendente a $\overline{s}$ in 7) e 8) viene che esistono $\lim\limits_{s\to\overline{s}} x'$, e $\lim\limits_{s\to\overline{s}} y'$ e quindi esiste la tangente anche in P_0.

Da questi ragionamenti risulta che al più possono esistere quattro punti angolosi sulla $\mathcal{C}_0$.