ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MARIO DOLCHER

Geometria delle trasformazioni continue. I : sopra un teorema di radó

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 14, nº 1-4 (1948), p. 99-116

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1948_2_14_1-4_99_0>

GEOMETRIA DELLE TRASFORMAZIONI CONTINUE. I: SOPRA UN TEOREMA DI RADÓ

di Mario Dolcher (Trieste) (*).

Alla memoria di LEONIDA TONELLI, dal quale appresi i fondamenti dell'Analisi Matematica e fui avviato alla ricerca scientifica.

Nel presente lavoro si studiano alcuni di quei caratteri geometrici delle trasformazioni continue che sono legati alla nozione di indice topologico di una curva chiusa rispetto a un punto; essi trovano riscontro in proposizioni classiche della teoria delle funzioni meromorfe.

Si sa che alcune proposizioni della teoria delle funzioni analitiche non discendono direttamente dal carattere metrico proprio di tali funzioni (monogenità) ma soltanto indirettamente, tramite alcune proprietà geometriche globali, che si compendiano nella struttura della corrispondente superficie di Riemann. E poichè questa viene individuata dalla funzione ma in nessun modo individua la funzione entro la più ampia classe delle trasformazioni continue, ne consegue che *quei caratteri che sono legati alla topologia delle superficie di Riemann sono ancor validi per trasformazioni soltanto continue della superficie sferica in sè*. È dunque importante poter giungere a tali proposizioni senza passare attraverso una teoria che, nel suo assetto classico, poggia su premesse di carattere estraneo alla natura del problema e non può quindi costituire una base appropriata per il suo studio.

Una via diretta per lo studio di tali questioni consiste nella topologia delle superficie di Riemann (1) o più in generale delle varietà orientabili (chiuse, ove si tratti dei caratteri algebrici).

Un'altra via, quella da me seguita, consiste nello studio diretto delle trasformazioni continue, ed è la via più adatta nello studio dei problemi in cui intervengono trasformazioni continue in generale, in particolare nello studio di que-

(*) Tesi di laurea discussa nell'Università di Pisa il 30 giugno 1942.

(1) Vedi ad es. Stoïlow: *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*. (Paris, 1938).

stioni, anche di carattere metrico, relative alle superficie ([2]). Tale via è in sostanza quella seguita da T. RADÓ e L. CESARI ([3]).

Sia Φ una trasformazione continua di una regione semplice chiusa $\bar{C}$ (di contorno C^*) del piano π in un piano π'; indicando con $O(Q;\, \Phi(C^*)) = n(Q)$ l'indice topologico della curva $\Phi(C^*)$ rispetto al punto Q (v. § 1, n. 6), si può dire, in termini imprecisi ma significativi (tanto più in quanto trovano l'analogo in proposizioni sulle funzioni algebriche): se sopra un campo g del piano π' si ha $n(Q) =$ cost. >0, allora un punto generico del campo proviene da almeno $n(Q)$ modelli sul piano π. Vi possono essere delle eccezioni; nel caso di trasformazioni algebriche $(n, 1)$ si tratta dei punti di diramazione. Diciamo $\mu(Q)$ $(0 \leqslant \mu(Q) \leqslant +\infty)$ il numero dei modelli del punto $Q(\varepsilon\, \pi')$ su π.

Si dànno a questo proposito nel § 3 i seguenti teoremi.

TEOREMA I. - *Per* $n(Q) \geqslant 1$ *è in ogni caso* $\mu(Q) \geqslant 1$. La proposizione è ben nota e se ne dà qui una semplice dimostrazione per ragioni di uniformità di trattazione.

TEOREMA II. - *Se per un punto* $Q_0\, \varepsilon\, \Phi(\bar{C})$ *esiste un componente* G_0 *di* $G = \Phi^{-1}(Q_0)$ *tale che per ogni curva semplice chiusa* γ^* *in* $\bar{C}$ *esclusiva con* G *e circuitante* G_0 *si abbia* $O(Q_0;\, \Phi(\gamma^*)) \geqslant n(Q_0)$, *allora, detto* g_0 *l'intorno massimale di* Q_0 *esclusivo con* $\Phi(C^*)$, *per* $Q(\neq Q_0)\, \varepsilon\, g_0$ *si ha* $\mu(Q) \geqslant n(Q_0)$.

Questo teorema è nuovo. Esso trova riscontro in un teorema di RADÓ, il quale dimostra ([3]) che, nella più restrittiva ipotesi che l'insieme $\Phi^{-1}(Q_0)$ consti di un solo punto P_0, « esiste un intorno di Q_0 » per ogni punto Q del quale è $\mu(Q) \geqslant n(Q_0)$. Il mio enunciato, oltre ad individuare tale intorno, si distingue essenzialmente dal Teorema di RADÓ in quanto mostra che l'eccezionalità del punto Q_0 non sta nel fatto, del tutto accessorio, che per esso sia $\mu = 1$, ma nella più generale proprietà che sta ad ipotesi del mio teorema.

Di conseguenza, una plausibile estensione della nozione di « punto di diramazione » al caso delle trasformazioni continue non può essere ragionevolmente fondata sul numero $\mu(Q_0)$, ma sugli indici topologici delle curve trasformate di

---

([2]) È notevole anche una terza direzione, seguita con successo in ricerche su questioni analoghe; consiste nello studio di trasformazioni continue topologicamente e non metricamente specializzate. Così le *trasformazioni interiori di* STOÏLOW (vedi: Annales de l'École Normale sup., t. 45, 1928) e le *funzioni pseudoarmoniche* di MORSE (M. MORSE - M. HEINS: *Topological methods in the theory of functions of a single complex variable*, tre Memorie in Annals of Math., 46 e 47, 1945 e 1946) e M. MORSE: *The topology of pseudoharmonic functions*, Duke Math. Journ., 13 (1946)).

([3]) T. RADÓ: *On continuous transformations in the plane*. Fund. Math., XXVII (1930); L. CESARI: (I) *Su un teorema di* RADÓ *sulle trasformazioni continue*. Atti dell'Ist. Veneto di Scienze e Lettere, Tomo C (1942). Per un'esposizione riassuntiva dei risultati di L. CESARI, relativamente allo studio delle superficie, vedasi anche: L. CESARI: (II) *Sulla quadratura delle superficie in forma parametrica*. Boll. U. M. I., Ser. II, Anno IV (1942), curve semplici chiuse circuitanti i singoli componenti dell' insieme chiuso $G=\Phi^{-1}(Q_0)$, a differenza dal caso algebrico, nel quale i due caratteri sono strettamente legati.

Le dimostrazioni dei precedenti teoremi sono nuove ed esclusivamente appoggiate a proposizioni sugli insiemi piani e sulle curve. Per quanto riguarda il secondo, la dimostrazione è poi condotta senza far uso della trasformazione $z=w^n$ (z, w variabili complesse), ben nota nella teoria delle funzioni analitiche e usata da T. RADÓ e L. CESARI, nozione metrica che considero estranea alla natura del problema.

Dai precedenti teoremi segue (§ 3) il

TEOREMA III. - *Se per un punto Q_0 di π' è $n>0$, esiste un intorno di Q_0 per ogni punto Q ($\neq Q_0$) del quale si ha $\mu(Q)\geqslant n$.*

Tale proposizione, dovuta a L. CESARI e contenuta in una proposizione più precisa dello stesso CESARI, è così dimostrata direttamente senza far uso della trasformazione citata.

Nel § 1 premetto varie definizioni e proposizioni di cui debbo far uso. Si tratta di proprietà note, delle quali per brevità ometto la dimostrazione.

Nel § 2 dimostro un Lemma sul quale sono basate le dimostrazioni del § 3.

§ 1. – Richiamo di alcune nozioni elementari.

1. - Generalità, notazioni. - Dicendo soltanto « insieme » s'intenderà nel seguito « insieme di punti del piano euclideo ». S'indicherà con π l'insieme di tutti i punti del piano stesso. Si indicherà con $x\,\varepsilon\,I$ l'appartenenza dell'elemento x all'insieme I, con $I_1 \subset I$ l'inclusione di I_1 in I (« ogni eventuale elemento di I_1 è elemento di I »), con $\mathcal{C}(I)$ l'insieme complementare di I (rispetto a π). Il simbolo 0 indicherà l'insieme vuoto.

Due insiemi si diranno *esclusivi* se non hanno alcun elemento in comune.

Un insieme I si dirà *massimale* (*minimale*) rispetto ad una proprietà $\mathfrak{p}$ se gode della proprietà $\mathfrak{p}$ e nessun insieme contenente I come parte propria (contenuto in I come parte propria) gode della proprietà stessa.

Diremo che una collezione $(I_\iota)_{\iota\,\varepsilon\,E}$ di insiemi non vuoti rappresenta una *decomposizione* di I se $I=\sum\limits_{\iota\,\varepsilon\,E} I_\iota$; la diremo anche una *ripartizione* di I se, inoltre, gli insiemi della collezione sono a due a due esclusivi. Una decomposizione, o una ripartizione, si dirà *propria* se E consta di almeno due elementi.

Detto I un insieme, I^* indicherà la sua frontiera, $\bar{I}$ la sua chiusura.

2. - Insiemi piani. - Un insieme A si dice *chiuso relativamente ad un insieme B* se è $A=\bar{A}\,.\,B$: un insieme A si dice *aperto relativamente ad un* *insieme* B se l'insieme $B.\,\mathcal{C}(A)$ è chiuso relativamente a B. Dicendo soltanto *chiuso* o *aperto* s'intende « relativamente a π ».

Un insieme I non vuoto si dice *sconnesso* se esiste almeno un suo particolare sottoinsieme proprio il quale sia chiuso e aperto relativamente ad I. Un insieme non vuoto si dice *connesso* se non è sconnesso. Un insieme chiuso e connesso di dice *continuo*, un insieme aperto e connesso si dice *campo*.

Si dice che un insieme I_1 è un *componente* dell'insieme I se I_1 è massimale rispetto alla proprietà di essere un sottoinsieme connesso di I. Due componenti distinti di un insieme sono in ogni caso esclusivi. I componenti di un insieme chiuso sono continui, i componenti di un insieme aperto sono campi. Detto G un insieme chiuso e limitato, un componente G_1 di G si dirà *componente isolato* o *componente di accumulazione* a seconda che l'insieme $G-G_1$ è o non è chiuso.

Si dice *distanza di due insiemi* I_1, I_2 l'estremo inferiore $\delta(\geqslant 0)$ delle distanze delle coppie di punti $P_1 \varepsilon I_1$, $P_2 \varepsilon I_2$. Scriveremo $\delta = \{I_1, I_2\}$ (la distanza di due punti P, Q si indicherà piuttosto con $|PQ|$).

È ben noto che: se G_1, G_2 sono insiemi chiusi e limitati, se è $\{G_1, G_2\} = \delta$ esiste una coppia di punti $P_1 \varepsilon G_1$, $P_2 \varepsilon G_2$ tali che $|P_1 P_2| = \delta$. Ne segue che la distanza di due insiemi chiusi e limitati esclusivi è in ogni caso positiva.

3. - **Trasformazioni continue.** - Sia I un insieme di punti di un piano π; ad ogni punto P di I si faccia corrispondere, mediante un'unica [4] legge Φ, un punto Q di un piano π'.

Scriveremo $Q = \Phi(P)$ e diremo che la legge Φ è una *trasformazione* (*univoca* [5]) *dell'insieme I*. Per ogni punto P di I, diremo che $Q = \Phi(P)$ è il *punto-imagine* (nella Φ) di P. Per ogni punto Q di π', indicheremo con $\Phi^{-1}(Q)$ l'insieme (eventualmente vuoto) dei punti di π la cui imagine è Q; lo diremo *insieme-modello* di Q. È ovvio il significato delle scritture $\Phi(I_1)$ (*insieme-imagine* su π' del sottoinsieme I_1 di I) e $\Phi^{-1}(J)$ (*insieme-modello* su π dell'insieme J del piano π'). Sussistono in ogni caso le relazioni

$$I_1 \subset \Phi^{-1}(\Phi(I_1)) \qquad \text{e} \qquad \Phi(\Phi^{-1}(J)) = J \cdot \Phi(I).$$

Si dice che la trasformazione Φ è *continua* in un punto P_0 di I se si ha

$$\lim_{P(\varepsilon I) \to P_0} \Phi(P) = \Phi(P_0).$$

---

(4) Non v'ha luogo, naturalmente, a distinguere fra « un'unica legge » e « un numero finito di leggi »; dico dunque *unica* per escludere il caso di infintte leggi non compendiabili in un'unica legge (definizioni e costruzioni che comportano *infinite scelte*). Ometterò in generale, per brevità, di enunciare una tale legge là dove una determinazione di essa si presenta ovvia.

(5) Salvo avvertimento contrario, dicendo « trasformazione » o « funzione » si sottointenderà « univoca ».

Dicendo che la Φ è una *trasformazione continua* s'intenderà: in ogni punto di I.

Sia Φ una trasformazione continua di un insieme chiuso e limitato I. Sono allora immediate le seguenti proposizioni:

(3·1) se I_1 è un sottoinsieme chiuso di I, è $\Phi(I_1)$ ancora chiuso e limitato;

(3·2) se J_1 è un sottoinsieme chiuso di $\Phi(I)$ è $\Phi^{-1}(J_1)$ ancora un insieme chiuso;

(3·3) se I_1 è un sottoinsieme connesso di I, è tale anche $\Phi(I_1)$;

(3·4) se K è un continuo contenuto in I, è tale anche $\Phi(K)$.

Sia la trasformazione continua Φ definita in un insieme I; per ogni numero positivo δ consideriamo la totalità delle coppie di punti P_1, P_2 di I tali che $|P_1P_2| \leq \delta$, e indichiamo con $\omega_\Phi(\delta)$ (possibilmente con $\omega(\delta)$) l'estremo superiore (finito o no) delle distanze $|Q_1Q_2|$ dei punti corrispondenti su π'.

La funzione non decrescente $\omega(\delta)$ si dirà *modulo di continuità* della trasformazione Φ [6]. Se I è chiuso e limitato, si ha $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$ (continuità uniforme della trasformazione Φ).

Una trasformazione si dice *topologica* se è biunivoca e bicontinua.

Se la trasformazione Φ dell'intero piano π è topologica e se è $\Phi(\pi) = \pi'$, allora si ha

$$(3·5) \qquad \lim_{P \to \infty} \Phi(P) = \infty \ [7] \qquad \left(\text{e } \lim_{Q \to \infty} \Phi^{-1}(Q) = \infty\right).$$

Si dice *curva semplice* (od *arco semplice*) l'imagine topologica di un segmento rettilineo non ridotto a un punto [8].

Si dice *arco semplice indefinito* l'imagine di una semiretta in una trasformazione topologica del piano in sè [9]. Il significato delle locuzioni « estremi dell'arco semplice », « origine dell'arco semplice indefinito » è ovvio.

---

(6) L. Cesari, loc. cit. in (3), I, pag. 381.

(7) Per assurdo: se, data su π una successione di punti distinti $P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots \to \infty$ la corrispondente $Q_1, Q_2, \ldots Q_n, \ldots$ su π' non tendesse all'infinito, questi infiniti punti avrebbero almeno un punto di accumulazione Q al finito; e allora il punto $\Phi^{-1}(Q_0) = P_0$ dovrebbe accumulare punti della prima successione, cosa che non si verifica per alcun punto di π'.

(8) Ciò non esclude che, per semplicità di espressione, parlandosi di archi semplici e di punti, questi vengano denominati « archi nulli ».

(9) Si osservi che l'« imagine topologica di una semiretta » non è in generale un continuo. Lo sarà allora e solo che la trasformazione possa topologicamente estendersi all'intero piano euclideo.

Una semiretta può trasformarsi topologicamente in un segmento privo di un estremo o in altro insieme non chiuso: si pensi alle trasformazioni topologiche della semiretta $t \geq 1$ definite, in coordinate cartesiane, da formule come:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ y = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ y = t \operatorname{sen} t. \end{cases}$$

Si dice *curva semplice chiusa* l'imagine topologica di una circonferenza.

Se i punti di un arco semplice o di una curva semplice chiusa sono tutti e soli quelli di un numero finito di segmenti si parlerà di *arco semplice poligonale*, risp. di *curva semplice chiusa poligonale*.

Dalla prop. (3·4) segue che l'insieme dei punti di un arco semplice, e così di una curva semplice chiusa, è un continuo limitato; dalla (3·5), che l'insieme dei punti di un arco semplice indefinito è un continuo illimitato.

4. - Alcune proposizioni relative alla separazione nel piano. - Detti A, B, G tre insiemi, si dice che G *separa* A *e* B se $G\cdot(A+B)=0$ e nessun componente di $\mathcal{C}(G)$ contiene al tempo stesso punti di A e punti di B.

Si dice che un insieme G *separa un insieme* A *dall'infinito* se tutti i punti di A appartengono a componenti limitati di $\mathcal{C}(G)$.

Si dice che un insieme G separa il piano se esistono coppie di punti separati per mezzo di G, cioè se $\mathcal{C}(G)$ è sconnesso.

Sussiste il noto

(4·1) Teorema di JORDAN. - Ogni curva semplice chiusa separa il piano in due campi di cui è frontiera comune.

Diremo *regione semplice aperta* il campo limitato C individuato dalla curva; la curva stessa, frontiera di C, potrà indicarsi allora con C^*.

Diremo *regione semplice chiusa* l'insieme $\overline{C}=C+C^*$. I punti di C si diranno talvolta *interni* alla curva, quelli non appartenenti a $\overline{C}$ *esterni*. Se $P\,\varepsilon\,C$, si dirà anche che la curva *circuita* il punto P.

Ricordiamo ancora qualche proposizione elementare relativa a curve e alla separazione nel piano.

(4·2) Detti A e B due punti di una curva semplice chiusa, esistono due e due soli archi semplici di estremi A, B e contenuti per intero nella curva; essi non hanno, oltre agli estremi, nessun altro punto a comune (archi *complementari* nella curva data).

(4·3) Se una curva semplice chiusa C^* circuita un punto P e se a è un arco semplice non per P e avente gli estremi, e solo quelli, a comune con a, allora delle due curve semplici chiuse che si ottengono sostituendo l'arco risp. ai due archi della C^* aventi gli stessi estremi, una e una sola circuita il punto P.

(4·4) Se un insieme chiuso G separa due insiemi A e B, ogni continuo contenente punti di A e punti di B (in particolare: ogni arco semplice di estremi $P\,\varepsilon\,A$, $Q\,\varepsilon\,B$) ha almeno un punto a comune con G.

(4·5) Se un insieme chiuso e limitato G separa un insieme A dall'infinito, ogni continuo illimitato contenente A (in particolare: ogni arco semplice indefinito uscente da $P\,\varepsilon\,A$) ha almeno un punto a comune con G.

(4·6) Se G è un insieme chiuso e limitato separante un continuo K dall'infinito, esiste almeno un suo componente G_0 che gode della stessa proprietà e non viene separato dall'infinito per mezzo di $G-G_0$.

(4·7) Se G è un insieme chiuso e limitato, detto G' l'insieme dei punti separati dall'infinito per mezzo di G, l'insieme $G+G'$ è un insieme chiuso non separante il piano.

(4·8) Sia data una successione di curve semplici chiuse $C_1^*, C_2^*, \dots C_n^*, \dots$ e diciamo C_n ($\bar{C}_n$) ($n=1, 2, \dots$) le corrispondenti regioni semplici aperte (chiuse). Si hanno allora le due seguenti proposizioni:

(4·8−A) Se $\bar{C}_1 \supset \bar{C}_2 \supset \dots \bar{C}_n \supset \dots$, l'insieme $\prod_1^\infty{}_n \bar{C}_n$ è un continuo limitato non separante il piano. (4·8−B) Se $C_1 \supset \bar{C}_2$; $C_2 \supset \bar{C}_3$; ... $C_n \supset \bar{C}_{n+1}$; ..., si ha $\prod_1^\infty{}_n C_n = \prod_1^\infty{}_n \bar{C}_n$.

(4·9) Se G è un insieme chiuso e limitato e G_0 un suo componente, per ogni numero positivo ε esiste una curva semplice chiusa $C^{\varepsilon *}$ tale che: (1) non ha punti a comune con G, (2) circuita G_0, (3) ogni suo punto dista da G_0 meno di ε. (Alla curva $C^{\varepsilon *}$ si può anche imporre la condizione di essere poligonale). Posto $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ($n=1, 2, \dots$) si ottiene una successione di curve, $C_1^*, C_2^*, \dots C_n^*, \dots$, alle quali si può imporre la condizione che sia $\bar{C}_1 \supset \bar{C}_2 \supset \dots \bar{C}_n \supset \dots$.

(4·10) Detto K un continuo e detto K' l'insieme dei punti che esso separa dall'infinito, si ha

$$\prod_1^\infty{}_n C^{\frac{1}{n}} = \prod_1^\infty{}_n \bar{C}^{\frac{1}{n}} = K + K'.$$

(La prop. (4·10) segue senz'altro dalla (4·9). Infatti, per ogni punto P di $\mathcal{C}(K+K')$ esiste un arco semplice indefinito s_∞ uscente da P ed esclusivo con K; posto $\varepsilon = \{s_\infty, K\}$ (>0), si ha che per $n > \frac{1}{\varepsilon}$ le curve $C^{\frac{1}{n}*}$ non hanno punti a comune con s_∞, quindi non circuitano P).

Le proposizioni (4·10) (caso $K'=0$) e (4·8) si compendiano nel seguente teorema.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un insieme I sia un continuo limitato non separante il piano è che esista una successione di curve semplici chiuse $C_1^*, C_2^*, \dots C_n^*, \dots$, ciascuna interna alla precedente e tali che si abbia

$$I = \prod_1^\infty{}_n C_n \ (= \prod_1^\infty{}_n \bar{C}_n).$$

Diamo ancora un'utile proposizione relativa alle trasformazioni continue.

(4·11) Sia Φ una trasformazione continua di un insieme I connesso del piano π. Se sul piano π' un insieme K separa due punti Q_1 e Q_2, allora l'insieme $\Phi^{-1}(K)$ separa ogni eventuale punto di $\Phi^{-1}(Q_1)$ da ogni eventuale punto di $\Phi^{-1}(Q_2)$ [10].

Dimostrazione. - Per assurdo, sia $P_1 \varepsilon \Phi^{-1}(Q_1)$, $P_2 \varepsilon \Phi^{-1}(Q_2)$ e sia, se possibile, $I_{1,2}$ un sottoinsieme connesso di I contenente P_1 e P_2 ed esclusivo con $\Phi^{-1}(K)$; di qui l'esistenza di un insieme $J = \Phi(I_{1,2})$ su π', connesso e tale che $Q_1 \varepsilon J$, $Q_2 \varepsilon J$ e $J \cdot K = 0$, contro l'ipotesi fatta.

5. - Curve in generale. - Dicesi *curva* la trasformata continua di un segmento rettilineo, dicesi *curva chiusa* la trasformata continua di una circonferenza. Diremo *insieme-sostegno* di una curva o di una curva chiusa l'insieme dei punti del piano appartenenti alla stessa.

In luogo di « curva » si potrà sempre dire « arco »; in nessun caso si dirà « arco » per intendere « curva chiusa » [11].

Occorre distinguere fra una curva, od una curva chiusa, e il relativo insieme-sostegno, notando che questo non individua, in generale, la curva (la individua solo nel caso banale in cui tale insieme consti di un solo punto). Tuttavia, quando non si abbiano a temere equivoci, si userà lo stesso simbolo per i due enti. Così se C^* è una circonferenza e Φ una trasformazione continua di C^*, il simbolo $\Phi(C^*)$ potrà indicare, a seconda dei casi, tanto la curva trasformata quanto il suo insieme-sostegno. Talvolta però, per semplicità e per proprietà di notazioni si indicherà una curva con una lettera in grassetto $\mathbf{c}$.

Dicesi *curva orientata* la trasformata continua di un segmento rettilineo orientato; dicesi *curva chiusa orientata* la trasformata continua di una circonferenza orientata. Ad ogni curva (e così ad ogni curva chiusa) sono associate due curve (risp. due curve chiuse) orientate, eventualmente coincidenti. Indicheremo che una curva si pensa orientata ponendo una freccia sul relativo simbolo ($\overrightarrow{C^*}$, $\Phi(\overrightarrow{C^*})$, $\overrightarrow{\mathbf{c}}$).

Dette $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ due curve e data una loro rappresentazione parametrica simultanea $P_1 = P_1(t)$, $P_2 = P_2(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, si consideri l'estremo superiore ϱ (qui: massimo) delle distanze $|P_1 P_2|$ di punti corrispondenti delle due curve. Si dice ***distanza delle due curve*** $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ ***nel senso di Fréchet*** l'estremo inferiore ϱ_0 dei numeri ϱ relativi alle possibili rappresentazioni parametriche simultanee delle due curve. Scriveremo $\|\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\| = \varrho_0$. Si ha:

$$(1)\quad \|\mathbf{c}, \mathbf{c}\| = 0, \qquad (2)\quad \|\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\| = \|\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_1\|, \qquad (3)\quad \|\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\| + \|\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\| \geqslant \|\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3\|.$$

---

[10] Non si può invece affermare che ove l'insieme K separi il piano lo stesso avvenga per $\Phi^{-1}(K)$.

[11] Si potrà dire « curva » per intendere « curva chiusa » solo quando non vi sia luogo a equivoco; così p. es. nel seguito, quando si tratterà dell'indice topologico.

La stessa nozione s'introduce ovviamente per curve chiuse, e ancora per curve, e curve chiuse, orientate.

6. - **L'indice topologico di una curva rispetto a un punto.** - Sul piano π si fissi un senso positivo delle rotazioni. Data allora una curva orientata $\vec{\mathbf{c}}$ e dato un punto Q non su $\vec{\mathbf{c}}$, è noto che alla coppia $(Q, \vec{\mathbf{c}})$ si può associare un intero relativo n esprimente il numero di volte che la curva $\vec{\mathbf{c}}$ circuita intorno al punto, in relazione all'orientazione del piano. Omettendo qui, per brevità, una definizione di tale nozione ([12]), l'intero n si dirà *indice topologico della curva* (*chiusa*) *orientata* $\vec{\mathbf{c}}$ *rispetto al punto* Q; scriveremo

$$O(Q\,;\,\vec{\mathbf{c}}) = n.$$

Essendo che ad orientazioni opposte della curva corrispondono, per uno stesso punto Q, valori opposti per l'indice topologico, possiamo estendere tale nozione al caso di curve (chiuse) non orientate, ponendo

$$O(Q\,;\,\mathbf{c}) = |\,O(Q\,;\,\vec{\mathbf{c}})\,| \quad (^{13}).$$

Importa osservare che l'indice topologico è invariante rispetto a trasformazioni topologiche del piano in sè (qualora, naturalmente, si subordini l'orientazione del secondo piano al carattere — diretto o inverso — della trasformazione).

Sono di immediata dimostrazione le due proposizioni seguenti.

(6·1) Se $\vec{\mathbf{c}}$ è una curva chiusa orientata e se due punti A e B non vengono separati fra loro per mezzo dell'insieme dei punti di $\vec{\mathbf{c}}$, si ha

$$O(A\,;\,\vec{\mathbf{c}}) = O(B\,;\,\vec{\mathbf{c}}).$$

(6·2) Dette $\vec{\mathbf{c}}_1$, $\vec{\mathbf{c}}_2$ due curve chiuse orientate e detto Q un punto fuori delle curve stesse, se è $\|\vec{\mathbf{c}}_1, \vec{\mathbf{c}}_2\| < \{Q, \vec{\mathbf{c}}\}$, è anche $O(Q\,;\,\vec{\mathbf{c}}_1) = O(Q\,;\,\vec{\mathbf{c}}_2)$. La proposizione vale anche per curve non orientate.

([12]) Per una definizione elementare di indice topologico vedasi p. es. B. v. Kerékjártó: *Vorlesungen über Topologie*, *I*, (Berlin, 1923), p. 83 segg. Per una definizione più generale ed una trattazione più approfondita nel senso della Topologia combinatoria, vedere Alexandroff - Hopf: *Topologie*, *I*, (Berlin, 1935), Kap. XI, XII, in partic. pagg. 419, 425, 462-64.

([13]) L'indice topologico come funzione di punto, rispetto a una data curva (orientata o no) rimanga indefinito per i punti della curva; potrebbe definirsi ivi nullo (cfr. in L. Cesari, loc. cit. in ([3]), II, pag. 110); per le applicazioni che qui se ne fanno tale convenzione non è necessaria.

Diremo *decomposizione regolare* (*D*) di una regione semplice chiusa $\overline{C}$ ogni decomposizione della stessa in un numero finito di regioni semplici chiuse $\overline{C}_i$ ($i=1, 2,\dots m$) non aventi, a due a due, punti interni a comune. Fissata un'orientazione sulla C^*, si penseranno in ogni caso orientate le curve C_i^* ($i=1, 2,\dots m$) concordemente alla C^*. Allora: sugli archi appartenenti alla C^* si subordinerà il verso su questa prefissato; sugli altri archi, comuni ciascuno a due delle curve C_i^*, i due versi subordinati saranno opposti.

Ciò premesso, sia $\overline{C}$ una regione semplice chiusa di contorno orientato $\overrightarrow{C^*}$. e siano $\overrightarrow{C_i^*}$ ($i=1, 2,\dots m$) le curve relative ad una sua decomposizione regolare. Detta allora Φ una trasformazione continua di $\overline{C}$ in un insieme di un piano π' e posto $\vec{\mathrm{c}}=\Phi(\overrightarrow{C^*})$, $\vec{\mathrm{c}}_i=\Phi(\overrightarrow{C_i^*})$, per ogni punto Q del piano π' non appartenente ad alcuna di queste curve si ha, in ogni caso,

$$(6{\cdot}3) \qquad \sum_1^m{}_i\, O(Q\,;\,\vec{\mathrm{c}}_i)=O(Q\,;\,\vec{\mathrm{c}}) \quad ({}^{14}) \quad (\textit{Additività dell'indice topologico}).$$

Quindi anche, per il caso delle curve non orientate,

$$(6{\cdot}4) \qquad \sum_1^m{}_i\, O(Q\,;\,\mathrm{c}_i)\geqslant O(Q\,;\,\mathrm{c}).$$

Sia $\vec{\mathrm{c}}$ una curva chiusa orientata e sia Q un punto del suo piano; detto A un punto qualunque di $\vec{\mathrm{c}}$, si potrà pensare la curva stessa come *arco* di estremi coincidenti in A, cioè come trasformata continua di un segmento orientato $\vec{\mathrm{s}}=\overrightarrow{A_0B_0}$. È ovvio, ed è ben noto [15] come si possa allora associare con continuità ad ogni punto P di $\vec{\mathrm{s}}$ una determinazione $\theta(P)$ dell'anomalia del punto $\Phi(P)$ nel sistema di coordinate polari individuato, sul piano di $\vec{\mathrm{c}}$, da: polo Q, semiretta $QA\infty$, verso positivo del piano. Si può ben supporre che sia $\theta(A_0)=0$. Si avrà allora in ogni caso (esprimendo l'angolo in giri) $\theta(B_0)=n$. Una tale funzione si potrà dire una *funzione angolare relativa alla coppia* $(Q, \vec{\mathrm{c}})$.

Ciò premesso, dimostriamo un teorema di cui si farà uso nel § seguente.

(6·5) Sia Φ una trasformazione continua di una regione semplice chiusa $\overline{C}$ del piano π, di contorno C^*, e sia $\mathrm{c}=\Phi(C^*)$ la curva chiusa imagine di C^* sul piano π'. Allora, detto Q un punto qualunque di π' tale che $O(Q\,;\,\Phi(C^*))=n>0$, e detta $\bar{s}$ una semiretta qualunque uscente da Q, si ha che

(1) l'insieme chiuso H dei punti di C^* la cui imagine appartiene ad $\bar{s}$ consta di almeno n componenti,

---

[14] Per una formulazione più generale della proposizione vedasi ancora ALEXANDROFF - HOPF, op. cit., p. 418.

[15] Mediante una tale considerazione si definisce elementarmente l'indice topologico. Cfr. ALEXANDROFF - HOPF, op. cit., p. 463 (Winkelfunktion).

(2) posto $\delta = \{Q, \Phi(C^*)\}$, se ε è un numero positivo tale che $\omega(\varepsilon) < \delta$, è impossibile ripartire l'insieme H in meno di n insiemi di diametro $\leqslant \varepsilon$.

Dim. Dalla prop. (4·11) segue anzitutto che l'insieme $\Phi(C^*)$ separa Q dall'infinito: è dunque $\bar{s}\cdot\Phi(C^*) \neq 0$ e $H \neq 0$. Detto A_0 un punto di $s\cdot\Phi(C^*)$ ed A un punto di $\Phi^{-1}(A_0)\cdot C^*$, sia $\theta(P)$ $(P \varepsilon C^*)$ una funzione angolare relativa alla coppia (Q, c), a partire da A $(\theta(A) = 0)$. Poichè l'angolo $\theta(P)$ varia con continuità dal valore 0 al valore n, esistono, su C^*, $2n$ punti (A), B_1, A_1, B_2, $A_2, \ldots B_n$, $A_n (= A)$ susseguentisi, sulla curva pensata percorsa « semplicemente », nell'ordine indicato e tali che sia $\theta(A_r) = r$ $(r = 1, 2, \ldots n)$, $\theta(B_r) = r - \frac{1}{2}$ $(r = 1, 2, \ldots n)$. E allora, poichè $A_i \varepsilon H$, $B_i \varepsilon \mathcal{C}(H)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$, l'asserto (1) è raggiunto.

Constatato poi che se un arco della C^* contiene due distinti dei punti A_i (e quindi almeno uno dei B_i) l'arco-imagine su π' ha diametro $\geqslant 2\delta$ (in quanto le imagini dei B_i sono punti della semiretta opposta alla $\bar{s}$), ne segue che le distanze di due qualunque distinti degli A_i sono tutte maggiori di ε, da cui l'asserto (2).

Allo scopo di formulare un'ulteriore proposizione sull'indice topologico, riportiamo qui un teorema di immediata dimostrazione (cfr. prop. (4·9)).

(6·6) *Sia $\bar{C}$ una regione semplice chiusa e sia G un insieme chiuso tutto in C. Prefissato ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, esiste una decomposizione regolare della regione $\bar{C}$ in regioni $\bar{C}_i$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ per modo che:*

(a) *nessuna delle curve C_i^* abbia punti a comune con G,*

(b′) *ogni punto delle C_i^* che circuitano punti di G disti da G meno di $\varepsilon/2$,*

(b″) *le rimanenti curve C_i^* (se ve ne sono) abbiano diametro minore di ε.*

Sia allora Φ una trasformazione continua di una regione semplice chiusa $\bar{C}$, di contorno C^*, e sia Q un punto del secondo piano appartenente all'insieme $\Phi(\bar{C})$, ma fuori della curva $\Phi(C^*)$. Sia $G = \Phi^{-1}(Q)$ (è $G.\,C^* = 0$). Sia ancora prefissato un numero $\varepsilon > 0$ ad arbitrio.

(6·7) *Nelle condizioni dette, esiste una decomposizione regolare di $\bar{C}$ in regioni semplici $\bar{C}_i$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ tale che, posto $\mathrm{c} = \Phi(C^*)$, $\mathrm{c}_i = \Phi(C_i^*)$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ siano verificate le condizioni seguenti:*

(a) *nessuna delle curve c_i passi per Q,*

(b) *nessuna delle curve stesse abbia diametro maggiore di ε* [16].

Si ha allora anche, orientando ad arbitrio la C^* e concordemente ad essa le C_i^*, e deducendone in base alla Φ le orientazioni per c, c_i $(i = 1, 2, \ldots m)$:

$$\sum_1^m O(Q\,;\,\vec{\mathrm{c}}_i) = O(Q\,;\,\vec{\mathrm{c}}).$$

---

[16] L. Cesari, loc. cit. in [4], I, pag. 381, Lemma IV.

§ 2. – Un lemma sugli insiemi piani.

LEMMA. - *Siano dati comunque: una curva semplice chiusa C^* e un insieme chiuso G tutto contenuto nella regione interna C, un insieme chiuso H tutto in $\bar{C}$ e contenente G, un insieme chiuso K tutto in C, esclusivo con G e separante un componente G_0 di G da C^*; abbia K un numero finito ν $(\geqslant 0)$ di punti a comune con H. Sia inoltre prefissato un numero $\delta > 0$ ad arbitrio.*

Esiste allora una curva semplice chiusa γ^* la quale

(*A*) *è tutta contenuta in C, circuita G_0 e non ha punti a comune con G;*

(*B*) *ogni suo punto ha da K distanza minore di δ;*

(*C*) *le sue eventuali intersezioni con H sono contenute sopra non più di ν archetti della curva stessa, a due a due esclusivi e di diametro $< \delta$.* (*Alla curva γ^* si può inoltre imporre la condizione di essere poligonale*) ([17]).

Dim. - Se è $\nu = 0$, ossia $H.K = 0$, l'esistenza della curva richiesta segue dalla (4·9) (tenuto conto della (4·6)), quando sia ε minore di δ, di $\{H, K\}$ e di $\{K, C^*\}$. Altrimenti, associamo ad ognuno dei punti A_i $(i = 1, 2, \dots \nu)$ di $H.K$ un suo intorno circolare, che diremo c_i, con centro nel punto stesso; supporremo tutti questi intorni di ugual raggio, che diremo δ', e abbastanza piccoli affinchè sia: $\delta' < \delta/2$, $\bar{c}_i . C^* = 0$, $\bar{c}_i . G = 0$, $\bar{c}_i . \bar{c}_j = 0$ $(i, j = 1, 2, \dots \nu;\ i \neq j)$.

Posto $H' = H - H. \sum_1^\nu {}_i\, c_i$, si ha manifestamente $H'. K = 0$; sia $\delta'' = \{H', K\}$, e sia ε il minore fra δ' e δ''.

Sia ora γ'^* una curva poligonale semplice chiusa tutta in C, contenente G_0 nella regione interna, ogni punto della quale disti da K meno di ε; l'esistenza di una tale curva segue dalla prop. (4·9); si ha $\gamma'^*. H \subset \sum_1^\nu {}_i\, c_i$. Se è $\gamma'^*. H = 0$, poniamo $\gamma^* = \gamma'^*$: la curva soddisfa senz'altro alle condizioni richieste.

([17]) Si noti che la (*A*) non potrebbe sostituirsi con l'affermazione, più forte: « *è tutta contenuta in C e lascia G nella regione interna* ». Ed è in questa constatazione che risiede l'interesse del Lemma stesso in relazione alle trasformazioni continue (vedere dimostrazione del Teor. III del § 3). Si pensi ad es., sul piano cartesiano (x, y), alla configurazione seguente:

C^*: circonferenza $x^2 + y^2 = 9$; G: coppia di punti $(\pm 1, 0)$;
H: segmenti $x = 0$, $|y| \leqslant 3$ e $|x| \leqslant 3$, $y = 0$;
K: insieme dei punti delle due circonferenze $(x \mp 1)^2 + y^2 = 1$.

In questo caso, l'insieme $H.K$ consta di tre punti, eppure, com'è evidente, ogni curva semplice chiusa circuitante G ha almeno quattro punti a comune con H, due qualunque dei quali non possono essere contenuti sopra un arco della curva stessa avente diametro minore di 1.

Altrimenti, diciamo $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots \bar{c}_{\nu'}$ $(\nu' \leqslant \nu)$ i cerchietti con i quali la γ'^* ha punti a comune. Ci proponiamo di costruire una nuova poligonale semplice chiusa γ^* — che sarà la curva cercata — tale che:

(a) fuori dei cerchietti ogni suo punto appartenga anche alla γ'^*,

(b) lasci G_0 nella regione interna e non abbia punti in comune con G,

(c) abbia con ciascuno dei $\bar{c}_i$ $(i=1, 2,\ldots \nu')$ un'intersezione connessa (arco, o punto), o vuota.

Allo scopo, notato che le intersezioni della γ'^* con le circonferenze c_i^* $(i=1, 2,\ldots \nu')$ sono in numero finito, pensiamo decomposta la curva γ'^* in archi mediante tali punti. Il continuo $L=\gamma'^* + \sum_1^{\nu}{}_i\, \bar{c}_i$ separa il piano: sia g_0 il componente (limitato) di $\mathcal{C}(L)$ il quale contiene G_0. La frontiera g_0^* è composta di: (1) archi di γ'^* (in numero finito), (2) archi delle c_i^* (in numero finito). Fra gli archi (2) distinguiamo ancora: (2′) archi ad estremi distinti, (2″) archi ridotti a un punto, (2‴) intere circonferenze, aventi un punto a comune con la γ'^*. Se vi sono archi del tipo (2‴), sopprimiamoli, conservando di ciascuno un unico punto, quello della γ'^*. Dato che ogni arco (1) ha gli estremi a comune con archi (2), la frontiera così ridotta può pensarsi percorsa a partire p. es. da un arco (2); ne consegue un ordine circolare fra gli archi, nel quale, com'è facile vedere, nè uno stesso arco ricorre più di una volta, nè ha punti a comune con altri, eccetto gli estremi con gli archi adiacenti. Tale insieme contenuto in g_0^* è dunque una curva semplice chiusa, che diremo γ''^*.

Se essa contiene al più un arco (proprio o nullo) su ciascuna delle c_i^*, essa è senz'altro la curva richiesta; se sostituiamo ad ogni arco massimale di circonferenza appartenente alla γ''^* la coppia di raggi avente per estremi gli estremi dell'arco, la curva ottenuta, che diremo γ^*, è poligonale.

Se invece almeno una delle circonferenze c_i^* contiene più archi di γ''^*, occorrerà modificare ulteriormente la curva per raggiungere la condizione (C). Contenga dunque p. es. c_1^* più di un arco della γ''^*; se alla γ''^* togliamo gli archetti appartenenti a c_1^*, rimane un numero finito di archi semplici, ognuno dei quali avrà con c_1^* gli estremi, e solo quelli, a comune; diciamo $\widehat{M_1'N_1'}$, $\widehat{M_1''N_1''}$, $\ldots \widehat{M_1^{(r_1)}N_1^{(r_1)}}$ questi archi e, cominciando da $\widehat{M_1'N_1'}$, sappiamo (prop. (4·3)) che o l'arco stesso o il suo complementare godono della seguente proprietà: « la curva semplice chiusa che si ottiene completando l'arco con la relativa corda circuita G_0 ». Dei due archi complementari consideriamo quello che gode di tale proprietà, e completiamolo come detto. Se esso è $\widehat{M_1'N_1'}$, abbiamo una nuova curva semplice chiusa la cui intersezione con c_1^* è connessa; comunque, una curva semplice chiusa la cui intersezione con c_1^* consta di r_1-1 archi. Ma così possiamo continuare, fino a ridurre ad uno il numero degli archi che la curva ha in comune con c_1^*. Indi, se la curva ottenuta ha ancora con qualcuna delle c_i^*

più di un archetto a comune, ripetiamo l'operazione, sino ad ottenere una curva non avente con alcuna delle c_i^* più di un arco a comune; diciamo $\bar{c}_{i_1}, \bar{c}_{i_2},..., \bar{c}_{i_{\nu''}}$ $(\nu'' \leqslant \nu' \leqslant \nu)$ i cerchietti con cui quest'ultima curva ha punti in comune.

Se infine sostituiamo gli archetti non nulli che la nostra curva ha entro i cerchietti c_{i_k} $(k=1, 2,... \nu'')$ con le coppie di raggi dei cerchi stessi relative agli estremi dell'arco, abbiamo la curva poligonale semplice chiusa richiesta.

§ 3. - Teoremi sulle trasformazioni continue.

TEOREMA I (di KRONECKER) - *Detta* Φ *una trasformazione continua di una regione semplice chiusa* $\bar{C}$ *(di contorno* C^**) del piano* π *in un insieme di punti di un piano* π', *se* Q *è un punto di* π' *fuori della curva* $\Phi(C^*)$ *e tale che sia* $O(Q; \Phi(C^*)) \neq 0$ $(>0;$ [18]$)$, *allora esiste in* C *almeno un punto* P *per il quale si ha* $\Phi(P)=Q$ [19].

Dim. - Supposto $\bar{C}$ un cerchio (condizione in ogni caso raggiungibile mediante opportuna trasformazione topologica del piano π in sè), sia A il centro, ϱ il raggio; sia $B=\Phi(A)$. Se $B=Q$, il teorema è senz'altro provato. Altrimenti, detta $C_\lambda^*(0<\lambda\leqslant\varrho)$ la circonferenza di centro A e raggio λ, i valori di λ si possono ripartire in tre classi a seconda che si ha:

(I) $O(Q; \Phi(C_\lambda^*))=0$, (II) la curva $\Phi(C_\lambda^*)$ passa per Q, (III) $O(Q; \Phi(C_\lambda^*))\neq 0$.

La prima non è vuota; infatti, per $\delta>0$ arbitrario minore di $|QB|$, se ε è tale che $\omega(\varepsilon)<\delta$, si ha che per $\lambda<\varepsilon/2$, avendo la curva C_λ^*, e quindi anche l'insieme C_λ^*+A, diametro $<\varepsilon$, l'insieme $\Phi(C_\lambda^*+A) = \Phi(C_\lambda^*)+B$ avrà diametro $<|QB|$, quindi la curva $\Phi(C_\lambda^*)$ non potrà contenere nè circuitare il punto Q. La terza classe non è vuota poichè contiene almeno il valore $\lambda=\varrho$.

E ancora, osserviamo che la prima classe assieme ad ogni valore di λ contiene i valori abbastanza vicini ad esso; le stesso dicasi per la terza (si ricordi la (6·2) tenendo presente che valori di λ vicini danno, su π', curve prossime nel senso di FRÉCHET). Dunque queste due classi estreme sono due insiemi aperti rispetto all'intervallo $0<\lambda\leqslant\varrho$. Non essendo possibile una *ripartizione* dell'intervallo stesso in due insiemi aperti in quanto insieme connesso, ne segue

---

(18) Si ricordi che l'indice topologico di una curva chiusa non orientata è, per definizione, $\geqslant 0$. Dove l'orientazione non entra come elemento essenziale, ho ritenuto preferibile parlare di curve non orientate. Così nei Teoremi seguenti, fatta eccezione per il Corollario al Teor. I.

(19) Per una formulazione più generale del Teorema, vedi ALEXANDROFF-HOPF, op. cit., p. 467-68.

l'esistenza di valori della seconda classe, cioè l'esistenza di punti P entro C sul piano π, per i quali è $\Phi(P)=Q$.

COROLLARIO : *Sia Φ una trasformazione continua di una regione semplice chiusa $\bar{C}$ (di contorno C^*) del piano π, in un insieme di punti di un piano π'. Se Q è un punto di π' appartenente all'insieme $\Phi(\bar{C})$ e non alla curva $\Phi(C^*)$, posto $G=\Phi^{-1}(Q)$ $(G.\,C^*=0)$, per ogni curva semplice chiusa $\overrightarrow{\gamma^*}$ del piano π, tutta in $\bar{C}$ e circuitante G, si ha*

$$O(Q\,;\,\Phi(\overrightarrow{\gamma^*}))=O(Q\,;\,\Phi(\overrightarrow{C^*})).$$

(Si è supposta la $\overrightarrow{\gamma^*}$ orientata concordemente alla $\overrightarrow{C^*}$)

Questo Corollario segue immediatamente dal Teor. I, tenuto conto della prop. (6·3).

TEOREMA II. - *Sia Φ una trasformazione continua di una regione semplice chiusa $\bar{C}$ (di contorno C^*) del piano π in un insieme del piano π'. Esista sul piano π' un punto Q_0 non di $\Phi(C^*)$ che goda della seguente proprietà: fra i componenti dell'insieme chiuso $G=\Phi^{-1}(Q_0)$ $(\subset C)$ ve ne sia almeno uno, G_0, tale che per ogni curva semplice chiusa γ^* in $\bar{C}$ esclusiva con G e circuitante G_0 si abbia*

$$O(Q_0\,;\,\Phi(\gamma^*))\geqslant n>0.$$

In tali ipotesi, detto g_0 quel campo componente dell'insieme complementare di $\Phi(C^*)$ il quale contiene Q_0, si ha che:

per ogni punto Q di g_0 distinto da Q_0, l'insieme $\Phi^{-1}(Q)$ consta di almeno n punti ([20]).

Dim. - Su π', sia dunque Q un punto arbitrario di g_0, distinto da Q_0; possiamo anche supporre che sia $|Q_0\,Q|<\{Q_0,\,\Phi(C^*)\}$ e che il segmento $\overline{Q_0\,Q}$ sia tutto contenuto in g_0 (condizioni in ogni caso raggiungibili mediante opportuna trasformazione topologica del piano in sè). Sia Γ^* la circonferenza di centro Q_0 e raggio $|Q_0\,Q|$, e sia σ_∞ la semiretta uscente da Q_0 e passante per Q; sia $\sigma=\sigma_\infty\,.\,\Phi(\bar{C})$. Si avrà (Teor. I) $\sigma_\infty\,.\,g_0\subset\sigma$ e sarà $\Gamma^*.\,\sigma=Q$.

Su π, poniamo $K=\Phi^{-1}(\Gamma^*)$, $H=\Phi^{-1}(\sigma)$; K è un insieme chiuso, tutto in C, esclusivo con G e separante G da C^* (prop. (4·11)) ; H è un insieme chiuso contenente G e tale che $\Phi(H)=\sigma$. È $H.\,K=\Phi^{-1}(Q)$; infatti se è $P\,\varepsilon\,\Phi^{-1}(Q)$, da $Q\,\varepsilon\,\sigma$ segue $P\,\varepsilon\,\Phi^{-1}(\sigma)$ $[=H]$ e da $Q\,\varepsilon\,\Gamma^*$ segue $P\,\varepsilon\,\Phi^{-1}(\Gamma^*)$ $[=K]$, dunque $P\,\varepsilon\,H.\,K$; e viceversa da $P\,\varepsilon\,H.\,K$ segue $\Phi(P)\,\varepsilon\,\sigma.\,\Gamma^*=Q$.

([20]) Un caso particolare notevole di questo Teor. II è quello in cui $\Phi^{-1}(Q_0)$ è un unico punto, P_0. Si ha allora, per ogni curva semplice chiusa $\gamma^*\subset\bar{C}$ circuitante P_0, tramite il Corollario del Teor. I, anche $O(Q_0;\,\Phi(\gamma^*))=n$, e resta applicabile il Teor. II. Questo caso particolare è stato considerato da T. RADÓ (loc. cit. in ([3])).

Se $H.K$ è un insieme infinito, l'asserto relativo al punto Q è raggiunto. Altrimenti, consti $H.K$ di ν punti che diciamo $A_1, A_2, \ldots A_\nu$ ($\nu \geqslant 1$, Teor. I). Detto ε un numero positivo minore di $|Q_0 Q|$ e di $\{\Gamma^*, \Phi(C^*)\}$, sia δ tale che $\omega(\delta) < \varepsilon$. In virtù del Lemma del § prec., esiste sul piano π una curva semplice chiusa γ^* la quale:

(a) è tutta contenuta in C e circuita G_0; è esclusiva con G,

(b) nessuno dei suoi punti dista più di δ dall'insieme K,

(c) l'insieme $\gamma^*. H$ è tutto contenuto sopra non più di ν archetti della curva stessa, a due a due esclusivi e di diametro $< \delta$.

Detto $\nu'(\leqslant \nu)$ il numero di tali archetti, ne consegue, per la trasformata $\Phi(\gamma^*)$ su π' che: sta tutta in g_0, poichè ogni suo punto dista da Γ^* meno di $\{\Gamma^*, \Phi(C^*)\}$; è $O(Q_0; \Phi(\gamma^*)) \geqslant n$ in virtù dell'ipotesi fatta. Si ha ancora $\Phi(\gamma^*). \sigma = \Phi(\gamma^*, H)$; ed essendo $\gamma^*. H$ contenuto su $\nu'(\leqslant \nu)$ archetti, tutti di diametro $< \delta$, ed essendo $\omega(\delta) < \varepsilon$, ciascuno dei corrispondenti ν' archetti della $\Phi(\gamma^*)$ su π' avrà diametro $< \varepsilon$, quindi anche $< |Q_0 Q|$. E allora, la prop. (6·5) ci assicura che la $\Phi(\gamma^*)$ non circuita più di ν' volte il punto Q_0. È dunque $[n =]\ O(Q_0; \Phi(\gamma^*)) \leqslant \nu' \leqslant \nu$, cioè $\nu \geqslant n$. L'insieme $\Phi^{-1}(Q) = H.K$ consta di almeno n punti.

TEOREMA III. - *Sia Φ una trasformazione continua di una regione semplice chiusa $\overline{C}$ (di contorno C^*) del piano π in un insieme del piano π', e sia Q_0 un punto di π', tale che $O(Q_0; \Phi(C^*)) = n > 0$.*

In tali ipotesi, esiste un intorno di Q_0, per ogni punto Q del quale distinto da Q_0 l'insieme $\Phi^{-1}(Q)$ consta di almeno n punti ([21]).

Dim. - È noto (prop. (6·7)) che in corrispondenza ad ogni numero $\varepsilon > 0$, esiste una decomposizione regolare (D) della regione $\overline{C}$ in regioni $\overline{C}_i$ ($i = 1, 2, \ldots m$) di contorni C_i^* per le quali, posto $\mathfrak{c} = \Phi(C^*)$, $\mathfrak{c}_i = \Phi(C_i^*)$, si abbia che

(a) sia $C_i^*. G = 0$, quindi Q_0 non appartenga ad alcuna delle $\mathfrak{c}_i$ ($i = 1, 2, \ldots m$),

(b) nessuna delle $\mathfrak{c}_i$ ($i = 1, 2, \ldots m$) abbia diametro maggiore di ε.

Ne segue che (6·4)

$$\sum_1^m {}_i\, O(Q_0; \mathfrak{c}_i) \geqslant O(Q_0; \mathfrak{c}) \quad [= n].$$

Posto $\varepsilon = 1/p$ ($p = 1, 2, \ldots$), si ottiene su π una successione di decomposizioni $(D^{(1)}), (D^{(2)}), \ldots (D^{(p)}), \ldots$; essa si potra supporre inoltre tale che ciascuna decomposizione subordini le precedenti. Dette $C_i^{(p)*}$ ($i = 1, 2, \ldots m_p$) le curve della p^{ma} decomposizione ($p = 1, 2, \ldots$), sia $\mathfrak{c}_i^{(p)} = \Phi(C_i^{(p)*})$.

Osserviamo dapprima che, considerando una successione qualunque di regioni

---

([21]) Teorema *A* di CESARI, loc. cit. in ([3]), I, pag. 378.

$C^{(1)}, C^{(2)}, \dots C^{(p)}, \dots$ relative risp. alle decomposizioni eseguite e ciascuna delle quali contenga la seguente, posto $\prod_{1}^{\infty} C^{(p)} = L$, i punti della frontiera L^* appartengono tutti ad uno stesso componente di G. Intanto, L è un continuo (prop. (4·10)); l'esistenza poi su L^* di punti appartenenti a due componenti distinti di G porterebbe all'esistenza su L^* di almeno un punto P^0, non appartenente a G. Come punto di L^*, P^0 sarebbe punto-limite di una opportuna successione di punti $P^{(1)} \varepsilon C^{(1)*}$, $P^{(2)} \varepsilon C^{(2)*}, \dots P^{(p)} \varepsilon C^{(p)*} \dots$. Ne seguirebbe che in ogni intorno del punto $Q^0 = \Phi(P^0) (\neq Q_0)$ cadrebbero punti di ciascuna delle curve $\Phi(C^{(p)*})$ $(p = 1, 2, \dots)$ il che è in contrasto con la proprietà (b) della successione di curve.

Per ogni decomposizione $(D^{(p)})$ $(p = 1, 2, \dots)$ della successione, diciamo $N^{(p)}$ il numero degli indici $O(Q_0 ; \mathfrak{c}_i^{(p)})$ che non sono nulli. Essendo per ogni i $(i = 1, 2, \dots N^{(p)})$ (prop. (6·4))

$$O(Q_0 ; \mathfrak{c}_i^{(p)}) \leq \sum_{1}^{N_i^{(p+1)}} O(Q_0 ; \mathfrak{c}_j^{(p+1)}),$$

$(N_i^{(p+1)}$ indica il numero delle regioni di $(D^{(p+1)})$ contenute in $\overline{C}_i^{(p)})$, ne segue che, se è $O(Q_0 ; \mathfrak{c}_i^{(p)}) \neq 0$, esiste in $\overline{C}_i^{(p)}$ almeno una regione $\overline{C}_j^{(p+1)}$ tale che $O(Q_0 ; \mathfrak{c}_j^{(p+1)}) \neq 0$.

Quindi è $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_p \leq \dots$. Distinguiamo ora due casi.

I caso: esista un intero $\bar{p}$ tale che sia $N^{(\bar{p})} \geq n$. Siano allora $C_{i_l}^{(\bar{p})*}$ $(l = 1, 2, \dots N^{(\bar{p})})$ le curve per le cui trasformate si ha $O(Q_0 ; \mathfrak{c}_{i_l}^{(\bar{p})}) \neq 0$; su π', sia g_0 il campo massimale contenente Q_0 e senza punti a comune con le curve $\mathfrak{c}_{i_l}^{(\bar{p})}$ $(l = 1, 2, \dots m_{\bar{p}})$. Sia $Q \varepsilon g_0$; potremo, anche qui, ben supporre che il segmento $\overline{Q_0 Q}$ e la circonferenza di centro Q_0 e passante per Q siano contenuti in g_0. Considerando allora le trasformazioni Φ_l subordinate dalla Φ sopra le regioni aperte $C_{i_l}^{(\bar{p})}$ $(l = 1, 2, \dots N^{(\bar{p})})$, il Teor. I permette di concludere l'esistenza, in ognuna di queste regioni che sono a due a due esclusive, di (almeno) un punto P_l la cui imagine è Q. Il teorema resta dunque, in questo primo caso, provato [22].

II caso: per ogni valore di p sia $N^{(p)} < n$. Esiste allora un intero $\bar{p}$ tale che per $p \geq \bar{p}$ sia $N^{(p)} = N^{(\bar{p})}$ $[< n]$. Siano come prima $C_{i_l}^{(\bar{p})*}$ le sole curve della decomposizione $(D^{(\bar{p})})$ per le cui trasformate l'indice $n_l = O(Q_0 ; \mathfrak{c}_{i_l}^{(\bar{p})})$ sia

---

[22] Possiamo anche osservare che tali punti appartengono ad altrettanti componenti distinti di $\Phi^{-1}(Q)$; chè altrimenti anche punti dei contorni $\overline{C}_i^{(p)*}$ avrebbero Q come punto imagine.

positivo. Riferendoci sempre alla decomposizione $(D^{(\bar{p})})$, scriveremo, per semplicità, C_l^* in luogo di $C_{i_l}^{(\bar{p})}$ $(l=1, 2, \ldots N=N^{(\bar{p})})$. Essendo (6·4)

$$n=O(Q_0\,;\ \Phi(C)\,)\leqslant \sum_{1}^{m_{\bar{p}}}{}_i\, O(Q_0\,;\ c_i^{(\bar{p})})\leqslant \sum_{1}^{N}{}_l\, O(Q_0\,;\ c_l)=\sum_{1}^{N}{}_l\, n_l\,,$$

basterà provare la seguente tesi: *per ogni valore di* l $(l=1, 2, \ldots N)$ *esiste su* π' *un intorno di* Q_0 *ogni punto del quale è punto-imagine di almeno* n_l *punti appartenenti a* C_l. E infatti, ciò porterà all'esistenza di un intorno di Q_0 (la parte comune degli N intorni così trovati) ogni punto Q del quale (distinto da Q_0) sarà imagine di almeno n_l punti distinti di C_l, per $l=1, 2, \ldots N$; e non potendo accadere che punti relativi a valori distinti di C_l coincidano (poichè i campi C_l sono a due a due esclusivi), seguirà l'esistenza di almeno $\sum_{1}^{N}{}_l\, n_l$ $(\geqslant n)$ punti del piano aventi come imagine Q.

Allo scopo, posto $G_l=G.\,C_l$, asseriamo che in C_l esiste un componente G_l^0 di G_l il quale gode della seguente proprietà: « per ogni curva semplice chiusa γ^* tutta in $\bar{C}_l$ esclusiva con G_l e circuitante G_l^0, si ha $O(Q_0\,;\ \Phi(\gamma^*))=n_l$ ». Per provare ciò, basta pensare proseguita oltre $\bar{p}$ la successione delle decomposizioni di $\bar{C}$, e scegliere fra le regioni delle decomposizioni successive a $(D^{(\bar{p})})$ contenute in $\bar{C}_l$ ogni volta quella, unica data l'ipotesi che caratterizza il *II caso*, l'imagine del cui contorno circuita (n_l volte) Q_0. Tali regioni risultano ciascuna interna alla precedente e il loro continuo-limite individua, nel senso sopra espressamente osservato, il componente G_l^0 richiesto. Ci troviamo allora, per la trasformazione Φ_l subordinata dalla Φ su C_l, nelle condizioni di applicabilità del Teor. II.

E allora, esiste un intorno di Q_0 ogni punto del quale proviene come imagine da almeno $\sum_{1}^{N}{}_l\, n_l$ $(\geqslant n)$ punti di C. E ciò, come già constatato, equivale alla dimostrazione della nostra tesi.

EZIO DELLA MONICA - *Direttore responsabile*. Finito di stampare il 10 settembre 1948.