Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Enrico Magenes

Sui teoremi di Tonelli per la semicontinuità nei problemi di Mayer e di Lagrange

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 15, nº 1-4 (1950), p. 113-125
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_2_15_1-4_113_0>

SUI TEOREMI DI TONELLI PER LA SEMICONTINUITÀ NEI PROBLEMI DI MAYER E DI LAGRANGE (¹)

di ENRICO MAGENES (Pisa).

Nel 1936 (²) il compianto Prof. LEONIDA TONELLI ha enunciato alcuni notevoli teoremi sulle condizioni sufficienti per la semicontinuità dei funzionali, che si incontrano nei problemi di Mayer e di Lagrange, proponendosi, come Egli stesso scrisse, di pubblicarne successivamente le dimostrazioni; ed aggiungeva «...., *voglio fin d'ora rilevare che tali dimostrazioni si ottengono integrando opportunamente quelle da me date, per gli integrali semplici in forma parametrica, nei miei Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* (Vol. I, pp. 262-275) *e, per gli integrali in forma ordinaria, nella mia Memoria* (³) : *Sugli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria* (pp. 407-411) ».

Scopo della presente Nota è di far vedere come si ottengano le dimostrazioni di quei teoremi, seguendo appunto le indicazioni sopra riportate.

Forma parametrica.

a) Sia $F(x, y, x', y', u)$ una funzione finita e continua, insieme con le sue derivate parziali del I ordine rispetto a x' e y', per ogni (x, y) di un campo A, per ogni coppia (x', y') di numeri non ambedue nulli e per ogni u di un dato intervallo Δ. Inoltre $F(x, y, x', y', u)$ sia nel dominio indicato (che diremo dominio D) positivamente omogenea di grado 1, rispetto a x' e y', e soddisfi alla :

$$(1) \qquad \frac{F(x, y, x', y', u_1) - F(x, y, x', y', u_2)}{u_1 - u_2} \leqslant R,$$

con R costante fissa e $u_1 \neq u_2$.

Diremo *curva ordinaria*, relativa alla F e all'elemento iniziale $a \in \Delta$, ogni curva continua e rettificabile $C: x = x(s)$, $y = y(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant L) - s$ essendo la lun-

(¹) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della Scuola Normale Superiore di Pisa.

(²) *Su la semicontinuità nei problemi di Mayer e di Lagrange*. Rend. Acc. Naz. dei Lincei (6), Vol. XXIV, 1936, pp. 399-404.

(³) Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. 3, 1934, pp. 401-450.

ghezza dell'arco variabile e L la lunghezza totale della C appartenente ad A e tale che l'equazione differenziale:

$$u'(s) = F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), u(s))$$

ammetta, in quasi-tutto $(0, L)$, una soluzione, assolutamente continua in $(0, L)$ e soddisfacente alla condizione: $u(0) = a$, $u(s) \in \Delta$. Rappresenteremo detta soluzione con $u_{C,a}(s)$.

Considerata una classe K di curve ordinarie C, diremo che il funzionale $u_{C,a}(s)$ è, nella classe K, *uniformemente semicontinuo inferiormente* su una curva ordinaria C_0, della classe, relativa all'elemento iniziale a_0, se, preso ad arbitrio $\varepsilon > 0$, è possibile determinare $\varrho > 0$, in modo che, per ogni curva ordinaria C di K, appartenente ordinatamente all'intorno (ϱ) di C_0 e relativa all'elemento iniziale a tale che $a - a_0 > -\varrho$, fissata comunque una corrispondenza ordinata Ω [4] fra C e C_0, tale che la distanza fra due punti corrispondenti qualsiasi risulti sempre $\leqslant \varrho$, la differenza tra il valore di $u_{C,a}$ in un punto qualunque di C e quello di u_{C_0,a_0} nel punto corrispondente di C_0 resti sempre $> -\varepsilon$.

Dei 3 teoremi enunciati dal TONELLI, mi limiterò a dimostrare il seguente Teorema II (il Teorema I si dimostra in modo analogo e il Teorema III si deduce da esso, seguendo gli accorgimenti usati dal TONELLI nel n. 98, pp. 272-275, del vol. I dei *Fondamenti* [5]).

TEOREMA II. - *Nelle ipotesi ammesse sulla $F(x, y, x', y', u)$, se nel dominio D è sempre, per tutte le coppie $(\bar{x}', \bar{y}')$ di numeri non ambedue nulli*:

$$(2) \qquad E(x, y, x', y', \bar{x}', \bar{y}', u) = F(x, y, \bar{x}', \bar{y}', u) - \\ - \{ \bar{x}' F_{x'}(x, y, x', y', u) + \bar{y}' F_{y'}(x, y, x', y', u)\} \geqslant 0,$$

e se, per x, y, x', y', u fissi il segno $=$ in (2) non vale mai per tutte le coppie $(\bar{x}, \bar{y}')$ sopraindicate, il funzionale $u_{C,a}$ è, nella classe K, uniformemente semicontinuo inferiormente su ogni curva di K.

b) Dimostrazione. - Si può supporre $R > 0$. In virtù di noti ragionamenti [6], per ogni (x_0, y_0) di A e ogni u_0 di Δ, si possono determinare 3 numeri p_0, q_0 e r_0 con $r_0 > 0$, in modo che la funzione

$$\overline{F}(x, y, x', y', u) = F(x, y, x', y', u) + p_0 x' + q_0 y'$$

sia > 0 per $(x, y) \in A$ e $u \in \Delta$, soddisfacenti alla $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (u - u_0)^2} \leqslant r_0$,

---

(4) Per la definizione di corrispondenza Ω v. L. TONELLI: *Fondamenti...*, Vol. I, p. 72.

(5) È opportuno osservare che anche i teoremi analoghi, enunciati dal TONELLI nella stessa Nota per il caso in cui la F dipenda, oltre che da x, y, x', y', u, anche da un'altra variabile v, si possono dimostrare in modo analogo.

(6) V. L. TONELLI: *Fondamenti...*, Vol. I, pp. 239-241 e pag. 269.

e per tutte le coppie (x', y') di numeri non ambedue nulli. Sia allora C_0 $[x=x_0(s)\,;\ y=y_0(s),\ 0\leqslant s\leqslant L_0]$ una curva ordinaria di K, di elemento iniziale a_0.

Se consideriamo nello spazio (x, y, u) la curva rettificabile Γ, di equazioni:

$$x=x_0(s), \qquad y=y_0(s), \qquad u=u_{C_0,\,a_0}(s), \qquad 0\leqslant s\leqslant L_0,$$

potremo quindi determinare per ogni punto $[x_0(s), y_0(s), u_{C_0,a_0}(s)]$ di Γ i numeri p_0, q_0 e r_0 sopra indicati ([7]), e quindi una sfera di raggio r_0 col centro nel punto stesso. Sostituiamo a questa sfera un cilindro di asse parallelo all'asse u e inscritto nella sfera stessa, in modo che il massimo arco di Γ, contenente il punto $[x_0(s), y_0(s), u_{C_0,a_0}(s)]$ e in esso contenuto, sia anche contenuto nel cilindro coassiale di ugual base e di metà altezza, con baricentro nel punto stesso; e fissiamo di prendere tra tutti i possibili tali cilindri quello di raggio massimo. Il teorema di PINCHERLE-BOREL ci permette di scegliere un numero finito $0_1, 0_2, \ldots, 0_m$ di questi cilindri e quindi, sopprimendo in ciascuno di essi quelle parti che risultassero appartenere anche ad altri cilindri dello stesso gruppo e di indice inferiore, un numero finito di intorni spaziali, senza punti interni a comune, ricoprenti la curva Γ. In corrispondenza ad essi Γ risulterà spezzata in un numero finito di archi consecutivi e quindi così avverrà anche per la curva C_0. Potremo anche far in modo, suddividendo ulteriormente gli archi di C_0, così determinati, che ciascuno di essi abbia lunghezza $\leqslant \frac{1}{2R}$. Basterà allora dimostrare la semicontinuità inferiore di $u_{C,a}$ su ciascuno di questi archi, poichè sono in numero *finito*. Per questo supporremo senz'altro che C_0 stessa soddisfi alle condizioni cui soddisfano gli archi suddetti, vale a dire:

I) alla lunghezza $L_0 \leqslant \frac{1}{2R}$;

II) esistono 4 numeri p_0, q_0, $\varrho_0>0$, $R_0>0$ in modo che la funzione:

$$\overline{F}(x, y, x', y', u) = F(x, y, x', y', u) + p_0 x' + q_0 y' \tag{3}$$

sia >0 per gli (x, y) di A appartenenti all'intorno (ϱ_0) di C_0, per $u \in \Delta$ e soddisfacente alla $\overline{u}_0 - R_0 \leqslant u \leqslant \overline{U}_0 + R_0$, dove $\overline{u}_0$ e $\overline{U}_0$ sono il minimo e il massimo di $u_{C_0,a_0}(s)$ in $(0, L_0)$, e per le coppie (x', y') di numeri non ambedue nulli.

Scelto $\varepsilon>0$ ad arbitrio, ma $\leqslant R_0$, poniamo $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon R}{21R+1}$. Detti m e M il minimo e il massimo di $\overline{F}(x, y, x', y', u)$, per $(x, y) \in A$ e appartenente all'intorno (ϱ_0) di C_0, per $u \in \Delta$ e soddisfacente alla $\overline{u}_0 - R_0 \leqslant u \leqslant \overline{U}_0 + R_0$, e per le coppie (x', y') normalizzate, determiniamo un $\delta>0$ in modo che, per ogni punto

---

([7]) La scelta di p_0, q_0, r_0 può fissarsi in modo analogo a quello indicato a pag. 269 del Vol. I dei *Fondamenti*.

(x_0, y_0) di C_0, se x' e y' soddisfano alla

$$\frac{1}{4} \leqslant x'^2 + y'^2 \leqslant \left(\frac{M}{m}\right)^2,$$

e se u soddisfa alla $\overline{u}_0 - R_0 \leqslant u \leqslant \overline{U}_0 + R_0$, sia

$$(4) \qquad | \overline{F}(x, y, x', y', u) - \overline{F}(x_0, y_0, x', y', u) | < \varepsilon_1 .$$

per ogni (x, y) di A distante da (x_0, y_0) per non più di δ. Inoltre, tenendo presente che

$$\overline{F}_{x'}(x_0(s), y_0(s), x_0'(s), y_0'(s), u_{C_0\,a_0}(s)) \quad \text{e} \quad \overline{F}_{y'}(x_0(s), y_0(s), x_0'(s), y_0'(s), u_{C_0, a_0}(s))$$

sono in $(0, L_0)$ integrabili e in modulo $\leqslant M_1$, con M_1 costante opportuna, determiniamo (8) un $\eta > 0$ tale che sia

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left| \sum_r \int_{a_r}^{b_r} y'(s) \overline{F}_{x'}(x_0(s), y_0(s), x_0'(s), y_0'(s), u_{C_0, a_0}(s)) ds \right| < \varepsilon_1 + M_1 \sum_r | y(b_r) - y(a_r) |, \\ & \left| \sum_r \int_{a_r}^{b_r} y'(s) \overline{F}_{y'}(x_0(s), y_0(s), x_0'(s), y_0'(s), u_{C_0\,a_0}(s)) ds \right| < \varepsilon_1 + M_1 \sum_r | y(b_r) - y(a_r) | \end{aligned} \right.$$

per ogni sistema di intervalli (a_r, b_r) non sovrapponentisi di $(0, L_0)$ e per ogni funzione $y(s)$ assolutamente continua soddisfacente negli (a_r, b_r) alla $| y(s) | \leqslant \eta$, e quasi-dappertutto negli (a_r, b_r) alla $y'(s) | \leqslant 1 + \frac{M}{m}$.

Dividiamo ora C_0 in n archi, di uguale lunghezza, mediante i punti $P_0^{(0)}$, $P_1^{(0)}, \ldots, P_n^{(0)}$, corrispondenti ai valori $s_0 = 0$, $s_1, \ldots, s_n = L_0$ di s, in modo che siano soddisfatte le

$$(6) \qquad \frac{1 + L_0}{n} < \frac{1}{2}\delta ; \qquad \frac{1 + L_0}{n} < \eta ; \qquad \frac{4M_1}{n} < \varepsilon_1 ; \qquad \frac{8M_1(1 + L_0)}{n} < \varepsilon ,$$

e la

$$(7) \qquad | u_{C_0, a_0}(s') - u_{C_0, a_0}(s'') | < \varepsilon_1 ,$$

per ogni coppia (s', s'') di valori di s appartenenti a uno stesso intervallo (s_i, s_{i+1}), e inoltre in modo che, se γ_0 è un qualsiasi arco di C_0, per ogni arco γ continuo e rettificabile, appartenente ordinatamente all'intorno $\left(\frac{1 + L_0}{n}\right)$ di γ_0, sia

$$(8) \qquad \left| \int_{\gamma_0} (p_0 x_0' + q_0 y_0') ds - \int_{\gamma} (p_0 x' + q_0 y') \, ds \right| < \varepsilon_1 .$$

---

(8) V. L. TONELLI : *Fondamenti....*, Vol. I, pag. 213.

Sia poi $\varrho > 0$ e $< \min\left(\varrho_0, \eta, \frac{1}{n^2}, \varepsilon_1\right)$ e inoltre tale che ogni curva, appartenente ordinatamente all'intorno (ϱ) di un qualunque arco $C_0(P_i^{(0)}, P_{i+1}^{(0)})$ di C_0, abbia lunghezza $> \frac{1}{2n} L_0$.

Fissati così n e ϱ, sia C una qualunque curva ordinaria di K, di elemento iniziale a, con $a - a_0 > -\varrho$, appartenente ordinatamente all'intorno (ϱ) di C_0. Sia Ω' una qualunque corrispondenza ordinata tra C e C_0 tale che la distanza tra due punti corrispondenti sia sempre $\leqslant \varrho$ e indichiamo con $P_0, P_1, \dots, P_n$ i punti di C corrispondenti a $P_0^{(0)}, P_1^{(0)}, \dots, P_n^{(0)}$, intendendo che, se in base a Ω' corrispondessero più punti sulla C, P_r sia il primo di essi per $r < n$ e l'ultimo per $r = n$. Indicando con σ le lunghezze degli archi di C e con $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ quelle di $C(P_0, P_1), \dots, C(P_0, P_n)$, sarà allora:

$$\sigma_{i+1} - \sigma_i > \frac{s_{i+1} - s_i}{2}, \qquad (i = 0, 1, \dots, n-1). \tag{9}$$

Per ogni i da 0 a $n-1$, poniamo fra $C_0(P_i^{(0)}, P_{i+1}^{(0)})$ e $C(P_i, P_{i+1})$ la nuova corrispondenza ordinata Ω'' definita da:

$$\sigma = \sigma(s) = \sigma_i + \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{s_{i+1} - s_i}(s - s_i). \tag{10}$$

Se $x = \bar{x}(\sigma)$, $y = \bar{y}(\sigma)$ $(0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_n)$ è la rappresentazione parametrica di C in funzione di σ, introducendo le (10) otterremo per $C(P_i, P_{i+1})$:

$$x = \bar{x}[\sigma(s)] = x(s); \qquad y = \bar{y}[\sigma(s)] = y(s), \qquad (s_i \leqslant s \leqslant s_{i+1}).$$

Detti $Q^{(0)}$ e P i punti di C_0 e C, corrispondenti, secondo la Ω'', a uno stesso valore di s in (s_i, s_{i+1}), e detto $P^{(0)}$ il punto di C_0 corrispondente a P secondo Ω', risulta dist. $(P^{(0)}, P) \leqslant \varrho < \frac{1}{n^2}$ e dist. $(P^{(0)}, Q^{(0)}) \leqslant \frac{L_0}{n}$ e quindi dist. $(Q^{(0)}, P) < \frac{1 + L_0}{n}$ e perciò:

$$|x(s) - x_0(s)| < \frac{1 + L}{n}; \qquad |y(s) - y_0(s)| < \frac{1 + L_0}{n}, \tag{11}$$

per $s \in (s_i, s_{i+1})$ e inoltre:

$$\begin{cases} |x(s_i) - x_0(s_i)| \leqslant \varrho; & |y(s_i) - y_0(s_i)| \leqslant \varrho, \\ |x(s_{i+1}) - x_0(s_{i+1})| \leqslant \varrho; & |y(s_{i+1}) - y_0(s_{i+1})| \leqslant \varrho. \end{cases} \tag{12}$$

E negli archi in cui è verificata la

$$\sigma_{i+1} - \sigma_i < \frac{M}{m}(s_{i+1} - s_i),$$

varranno pure in quasi-tutto (s_i, s_{i+1}) le

$$\begin{cases} |x_0'(s)| \leqslant 1; & |y_0'(s)| \leqslant 1, \\ |x'(s)| < \frac{M}{m}; & |y'(s)| < \frac{M}{m}. \end{cases} \tag{13}$$

Sia ora $\bar{P}$ un *qualunque* punto di C corrispondente al valore $\bar{s}$ di s ; per i punti $\bar{P}^{(0)}$ e $\bar{Q}^{(0)}$, corrispondenti a $\bar{P}$ secondo la Ω' e la Ω'' è soddisfatta, in virtù di (7), la

$$(14) \qquad | u_0(\bar{P}^{(0)}) - u_0(\bar{Q}^{(0)}) | < \varepsilon_1 ,$$

intendendo d'ora innanzi di indicare con $u_0(P)$ e $u(P)$ il valore di u_{C_0, α_0} e $u_{C, \alpha}$ in un punto P. Se è $u(\bar{P}) - u_0(\bar{Q}^{(0)}) \geqslant 0$, per la (14) è pure $u(\bar{P}) - u_0(\bar{P}^{(0)}) > -\varepsilon$. Supponiamo allora $u(\bar{P}) < u_0(\bar{Q}^{(0)})$ e sia $(s^*, \bar{s})$ l'intorno sinistro più ampio di $\bar{s}$, nei cui punti interni vale ancora la $u(P) < u_0(Q^{(0)})$; supponiamo dapprima che sia verificata in $(s^*, \bar{s})$ la :

$$(15) \qquad u(P) \geqslant \bar{u}_0 - R_0 .$$

Osserviamo che è

$$(16) \qquad u(P^*) - u_0(Q^{*(0)}) > -\varepsilon_1 .$$

dove P^* e $Q^{*(0)}$ corrispondono a s^* rispettivamente su C e su C_0.

Se $(s^*, \bar{s})$ è contenuto negli intervalli (s_i, s_{i+1}) per i da r a q, cioè se è :

$$s_r \leqslant s^* < s_{r+1} ; \qquad s_q < \bar{s} \leqslant s_{q+1} , \qquad (0 \leqslant r \leqslant q),$$

potremo scrivere

$$\begin{aligned} u(\bar{P}) &= u(P^*) + \int_{C(P^*, \bar{P})} F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}, u)d\sigma = u(P^*) + \int_{C(P^*, \bar{P})} \bar{F}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}', u)d\sigma - \\ &- \int_{C(P^*, \bar{P})} (p_0\bar{x}' + q_0\bar{y}')d\sigma = u(P^*) + \bar{I}_{C(P^*, \bar{P})} - \int_{C(P^*, \bar{P})} (p_0\bar{x}' + q_0\bar{y}')d\sigma = u(P^*) + \\ &+ \bar{I}_{C(P^*, P_{r+1})} + \sum_{r+1}^{q-1}{}_i \bar{I}_{C(P_i, P_{i+1})} + \bar{I}_{C(P_q, \bar{P})} - \int_{C(P^*, \bar{P})} (p_0\bar{x}' + q_0\bar{y}')d\sigma , \end{aligned}$$

dove si intende

$$\bar{I}_{C(P^*, \bar{P})} = \int_{C(P^*, \bar{P})} F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}', u)d\sigma,$$

e analogamente per gli altri simboli.

E analogamente :

$$\begin{aligned} u_0(\bar{Q}^{(0)}) = u^0(Q^{*(0)}) + \bar{I}_{C_0(Q^{*(0)}, P_{r+1}^{(0)})} + \sum_{r+1}^{q-1}{}_i \bar{I}_{C_0(P_i^{(0)}, P_{i+1}^{(0)})} + \bar{I}_{C_0(P_q^{(0)}, \bar{Q}^{(0)})} - \\ - \int_{C_0(Q^{*(0)}, \bar{Q}^{(0)})} (p_0 x_0' + q_0 y_0')d\sigma . \end{aligned}$$

Osserviamo ora che, in virtù anche della ipotesi (15) è :

$$\bar{I}_{C_0(P_i^{(0)}, P_{i+1}^{(0)})} \leqslant M(s_{i+i} - s_i) ; \qquad \bar{I}_{C(P_i, P_{i+1})} \geqslant m(\sigma_{i+1} - \sigma_i), \qquad (i = r+1, ..., q-1).$$

Se quindi è verificata la $\sigma_{i+1}-\sigma_i \geqslant \frac{M}{m}\,(s_{i+1}-s_i)$, è senz'altro:

$$\bar{I}_{C(P_i,\,P_{i+1})} \geqslant \bar{I}_{C_0(P_i^{(0)},\,P_{i+1}^{(0)})}.$$

Analoga osservazione va fatta per gli archi $C_0(Q^{*(0)},\,P_{r+1}^{(0)})$, $C(P^*,\,P_{r+1})$, $C_0(P_q^{(0)},\,\bar{Q}^{(0)})$, $C(P_q,\,\bar{P})$. Cosicchè, tenendo presente la (16) e la (8), si ha:

$$u(\bar{P})-u_0(\bar{Q}^{(0)}) \geqslant -\varepsilon_1+\sum\nolimits_i''\left[\bar{I}_{C(P_i,\,P_{i+1})}-\bar{I}_{C_0(P_i^{(0)},\,P_{i+1}^{(0)})}\right]-\varepsilon_1\,, \tag{17}$$

dove $\sum_i''$ è estesa solo a quegli archi in cui valga la $\sigma_{i+1}-\sigma_i<\frac{M}{m}\,(s_{i+1}-s_i)$ [o le analoghe se si tratta di $C_0(Q^{*(0)},\,P_{r+1}^{(0)})$, $C(P^*,\,P_{r+1})$ o di $C_0(P_q^{(0)},\,\bar{Q}^{(0)})$, $C(P_q,\,\bar{P})$]. Posto allora, per ogni i della $\sum_i''$,

$$D_i=\bar{I}_{C(P_i,\,P_{i+1})}-\bar{I}_{C_0(P_i^{(0)},\,P_{i+1}^{(0)})}\,,$$

si ha:

$$\begin{aligned}D_i&=\int_{s_i}^{s_{i+1}}\{\bar{F}(x(s),\,y(s),\,x'(s),\,y'(s),\,u[\sigma(s)])-\bar{F}(x_0(s),\,y_0(s),\,x_0'(s),\,y_0'(s),\,u_0(s))\}ds=\\&=\int_{s_i}^{s_{i+1}}[\bar{F}(x,\,y,\,x',\,y',\,u)-\bar{F}(x_0,\,y_0,\,x',\,y',\,u)]\,ds+\int_{s_i}^{s_{i+1}}\bar{F}(x_0,\,y_0,\,x',\,y',\,u)-\\&-\bar{F}(x_0,\,y_0,\,x',\,y',\,u_0)]\,ds+\int_{s_i}^{s_{i+1}}[\bar{F}(x_0,\,y_0,\,x',\,y',\,u_0)-\bar{F}(x_0,\,y_0,\,x_0',\,y_0',\,u_0)]ds.\end{aligned}$$

Il primo integrale dell'ultimo membro è $>-\varepsilon_1(s_{i+1}-s_i)$; il secondo, in virtù delle (1) e (3), e poichè è $u_0(s)-u[\sigma(s)]>0$ per $s^*<s\leqslant\bar{s}$, è $\geqslant R\int_{s_i}^{s_{i+1}}(u_0-u_0)ds$ e quindi, se δ_1 è il massimo di $u_0(s)-u[\sigma(s)]$ in $(s^*,\,\bar{s})$, è pure $\geqslant -R(s_{i+1}-s_i)\delta_1$. Infine si ha:

$$\begin{aligned}\bar{F}(x_0,\,y_0,\,x',\,y',\,u_0)-\bar{F}(x_0,\,y_0,\,x_0',y_0',\,u_0)&=E(x_0,\,y_0,\,x_0',\,y_0',\,x',\,y',\,u_0)+\\+(x'-x_0')\bar{F}_{x'}(x_0,\,y_0,\,x_0',\,y_0',\,u_0)&+(y'-y_0')\bar{F}_{y'}(x_0,\,y_0,\,y_0',\,y_0',\,u_0).\end{aligned}$$

Cosicchè, sommando rispetto ad i secondo la $\sum_i''$, e ricordando la (2), si ha:

$$u(\overline{P})-u_0(\overline{Q}^{(0)})>-2\varepsilon_1-\varepsilon_1 L_0-R\delta_1 L_0+\int_{s^*}^{s_{r+1}}(x'-x_0')\overline{F}_{x'}(x_0, y_0, x_0', y_0' u_0)ds+$$

$$+\sum_{r+1}^{q-1}{}_i''\int_{s_i}^{s_{i+1}}(x'-x_0')\overline{F}_{x'}ds+\int_{s_q}^{\overline{s}}(x'-x_0)\overline{F}_{x'}ds+\int_{s^*}^{s_{r+1}}(y'-y_0')\overline{F}_{y'}(x_0, y_0, x_0', y_0', u_0)ds+$$

$$+\sum_{r+1}^{q-1}{}''\int_{s_i}^{s_{i+1}}(y'-y_0')\overline{F}_{y'}ds+\int_{s_q}^{\overline{s}}(y'-y_0')\overline{F}_{y'}ds,$$

dove gli integrali estesi a (s^*, s_{r+1}) e $(s_q, \overline{s})$ possono eventualmente mancare.

In virtù allora delle (11), (13), (6) e (5), otteniamo:

$$\left|\int_{s^*}^{s_{r+1}}(x'-x_0')\overline{F}_{x'}(x_0, y_0, x_0', y_0', u_0)ds\right|<\varepsilon_1+M_1\left|x(s_{r+1})-x_0(s_{r+1})+x_0(s^*)-x(s^*)\right|,$$

$$\left|\sum_{r+1}^{q-1}{}_i''\int_{s_i}^{s_{i+1}}(x'-x_0')\overline{F}_{x'}(x_0, y_0, x_0', y_0', u_0)ds\right|<\varepsilon_1+M_1\sum_{r+1}^{q-1}{}_i''\left|x(s_{i+1})-x_0(s_{i+1})+x_0(s_i)-x(s_i)\right|,$$

$$\left|\int_{s_q}^{\overline{s}}(x'-x_0')\overline{F}_{x'}(x_0, y_0, x_0', y_0' u_0)ds\right|<\varepsilon_1+M_1\left|x(\overline{s})-x_0(\overline{s})+x_0(s_q)-x(s_q)\right|,$$

e analogamente per gli altri integrali. Sicchè, in virtù delle (11), (12), (6) e della $L_0\leqslant\frac{1}{2R}$, otteniamo in definitiva:

$$u(\overline{P})-u_0(\overline{Q}^{(0)})>-\varepsilon_1\left(10+\frac{1}{2R}\right)-\frac{\delta_1}{2}.$$

Dico che è

$$\delta_1<2\varepsilon_1\left(10+\frac{1}{2R}\right).$$

Infatti, se s' è un valore di $(s^*, \overline{s})$ tale che $u_0(s')-u[\sigma(s')]=\delta_1$, detti P' e $Q'^{(0)}$ i punti corrispondenti a s' su C e su C_0, ripetendo su $u(P')-u_0(Q'^{(0)})$ il ragionamento, fatto or ora su $u(\overline{P})-u_0(\overline{Q}^{(0)})$, otterremo:

$$u(P')-u_0(Q'^{(0)})=\delta_1>-\varepsilon_1\left(10+\frac{1}{2R}\right)-\frac{\delta_1}{2},$$

da cui

$$\delta_1<2\varepsilon_1\left(10+\frac{1}{2R}\right).$$

In virtù anche della (14), si ha quindi:

$$u(\overline{P}) - u_0(\overline{P}^{(0)}) > -\varepsilon. \tag{18}$$

Dimostriamo ora che la (15) è effettivamente verificata. Infatti, se ciò non fosse, poichè vale la (16), ci sarà un primo valore di s, $s'' > s^*$, tale che $u[\sigma(s'')] = \overline{u}_0 - R_0$, e per $s^* \leqslant s < s''$ è verificata la (15). Ripetiamo allora su $u(P'') - u_0(P''^{(0)})$ (dove P'' corrisponde a s'' su C e $P''^{(0)}$ corrisponde a P'' secondo la Ω') il ragionamento fatto più sopra per $u(\overline{P}) - u_0(\overline{P}^{(0)})$, che ci ha condotti alla (18); otterremo $u(P'') - u_0(P''^{(0)}) > -\varepsilon_1 > -R_0$, in contraddizione col fatto che, essendo $\overline{u}_0$ il minimo di $u_0(P^{(0)})$ su C_0, dovrebbe essere $u(P'') - u_0(P''^{(0)}) \leqslant -R_0$. c. v. d.

Forma ordinaria.

a) Sia $f(x, y, y', u)$ una funzione finita e continua, insieme con la sua derivata parziale $f_{y'}$, per ogni (x, y) di un campo A, ogni y' finito e ogni u di un intervallo Δ. Inoltre, nel dominio D_1, ora indicato, la f soddisfi alla

$$\frac{f(x, y, y', u_1) - f(x, y, y', u_2)}{u_1 - u_2} \leqslant R\{1 + |y'| + |f(x, y, y', u_2)|\}, \tag{1}$$

con R costante fissa e $u_1 \geqslant u_2$. Diremo *curva ordinaria*, relativa alle f e all'elemento iniziale $\alpha \in \Delta$, ogni curva C: $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, con $y(x)$ assolutamente continua in (a, b), appartenente ad A e tale che l'equazione differenziale

$$u'(x) = f(x, y(x), y'(x), u(x)),$$

ammetta in quasi-tutto (a, b) una soluzione, assolutamente continua in (a, b) e soddisfacente alla $u(a) = \alpha$ e alla $u(x) \in \Delta$. Rappresenteremo detta soluzione con $u_{C,\alpha}(x)$, e porremo ovviamente una definizione di *semicontinuità inferiore uniforme*, analoga a quella data per la forma parametrica.

Dei teoremi enunciati dal TONELLI, mi limito anche qui a dimostrare il Teorema IV (il Teorema V si deduce da esso come si può dedurre il Teorema III dal Teorema II; valgono anche qui osservazioni analoghe a quelle della nota ([5])).

TEOREMA IV. - *Nelle ipotesi ammesse sulla $f(x, y, y', u)$, se nel dominio D_1 è, per tutti gli $\overline{y}'$,*

$$E(x, y, y', \overline{y}', u) = f(x, y, \overline{y}', u) - \{f(x, y, y', u) + (\overline{y}' - y') f_{y'}(x, y, y', u)\} \geqslant 0, \tag{2}$$

purchè per x, y, y', u fissi, il segno $=$ non valga mai per tutti gli $\overline{y}'$, il funzionale $u_{C,\alpha}$ è, in una classe K di curve ordinarie C, uniformemente semicontinuo inferiormente su ogni elemento di K.

b) Si può supporre $R>0$. In virtù di noti ragionamenti ([9]), preso ad arbitrio un $\varepsilon>0$, per ogni $(x_0, y_0) \in A$, ogni $u_0 \in \Delta$ e ogni y_0', si possono determinare 4 numeri p, q, $\varrho>0$, $\nu>0$, in modo che per $(x, y) \in A$, $u \in \Delta$ e soddisfacenti alla :

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(u-u_0)^2} \leqslant \varrho ,$$

sia :

$$f(x, y, y', u)-(p+qy')>\nu\,|\,y'\,|$$

per tutti gli y', e

$$f(x, y, y', u)<p+qy'+\varepsilon$$

per gli y' tali che $|\,y'-y_0'\,| \leqslant \varrho$.

Considerata allora una curva ordinaria C_0 di K $(y=y_0(x)$ $a_0 \leqslant x \leqslant b_0)$, di elemento iniziale α_0, sfruttando la prima parte della proprietà ora enunciata, in modo analogo a quanto si è fatto per il Teorema II, potremo riportare la dimostrazione al caso che C_0 soddisfi alla condizione :

I) esistano 5 numeri p, q, ν, ϱ_0, r_0, con ν, ϱ_0 e r_0 positivi, in modo che per $(x, y) \in A$ e appartenenti all'intorno (ϱ_0) di C_0, per $u \in \Delta$ e soddisfacente alla $\bar{u}_0-r_0 \leqslant u \leqslant \bar{U}_0+r_0$, (dove $\bar{u}$ e $\bar{U}_0$ sono rispettivamente il minimo e il massimo di $u_{C_0,\alpha_0}(x)$ in (a_0, b_0)), e per ogni y' sia

$$\bar{f}(x, y, y', u)=f(x, y, y', u)-(p+qy')>\nu\,|\,y'\,| \,; \tag{3}$$

e inoltre, in virtù dell'uniforme continuità di $y_0(x)$ e di $u_{C_0,\alpha_0}(x)$ in (a_0, b_0), e sempre per il fatto che, avendo diviso una curva in un numero *finito* di archi e volendo dimostrare la semicontinuità di $u_{C,\alpha}$ su di essa, basta dimostrarla su ciascuno degli archi considerati, potremo anche supporre che C_0 soddisfi alla condizione

$$\text{II)}\ \max\left[b_0-a_0\,;\ 2\,|\,p\,|\,(b_0-a_0)\,;\quad \bar{U}_0-\bar{u}_0\,;\quad \frac{\bar{U}_0-\bar{u}_0}{\nu}\,;\quad \frac{|\,p\,|\,(b_0-a_0)}{\nu}\,;\right.$$
$$\left.\frac{|\,q\,|\,(\bar{U}_0-\bar{u}_0)}{\nu}\,;\quad \frac{|\,p\,|\,|\,q\,|\,(b_0-a_0)}{\nu}\,;\quad \frac{|\,q\,|\,(\bar{Y}_0-\bar{y}_0)}{\nu}\,;\quad \frac{q^2(\bar{Y}_0-\bar{y}_0)}{\nu}\right] \leqslant \frac{1}{20\,R},$$

dove $\bar{Y}_0$ e $\bar{y}_0$ indicano il massimo e il minimo di $y_0(x)$ (a_0, b_0).

Sia ora C: $y=y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, una qualsiasi curva ordinaria di K, appartenente propriamente all'intorno (ϱ) di C_0 e relativa all'elemento iniziale α, tale che $\alpha-\alpha_0>\varrho$, dove ϱ è positivo e $<\varrho_0$ e $<r_0$.

Preso ad arbitrio un $\varepsilon>0$ e $<r_0$, sia $\bar{x}$ un qualunque punto di (a, b). Indichiamo per brevità $u_{C,\alpha}(x)$ con $u(x)$ e $u_{C_0,\alpha_0}(x)$ con $u_0(x)$ e poniamo

$$\varepsilon_1=\min\left[\frac{7}{60}\,\varepsilon,\ \frac{\nu}{20R(2+6\,|\,q\,|+2\,\nu+4q^2)}\right].$$

([9]) V. Lemma 2, pag. 405 e Lemma 14, pag. 422, della nota citata in ([3]).

Supporremo che sia $u(\bar{x}) < u_0(\bar{x})$ e inoltre, per il momento, che in tutto $(a, \bar{x})$ sia verificata la

$$u(x) \geqslant \bar{u}_0 - r_0. \tag{4}$$

Allora, se $\bar{x} \in (a_0+\varrho, b_0-\varrho)$ potremo scrivere:

$$u(\bar{x}) - u_0(\bar{x}) = a - a_0 + \int_a^{\bar{x}} f(x, y, y', u)dx - \int_{a_0}^{\bar{x}} f(x, y_0, y_0', u_0)dx =$$
$$= a - a_0 + \int_a^{a_0+\varrho} \bar{f}(x, y, y', u)dx + \int_{a_0+\varrho}^{\bar{x}} \bar{f}(x, y, y', u)dx - \int_{a_0}^{a_0+\varrho} \bar{f}(x, y_0, y_0', u_0)\,dx -$$
$$- \int_{a_0+\varrho}^{\bar{x}} \bar{f}(x, y_0, y_0', u_0)\,dx + \int_a^{\bar{x}} (p + qy')dx - \int_{a_0}^{\bar{x}} (p + qy_0')dx,$$

e quindi in virtù del fatto che, per le (4) e (3), è $\bar{f}(x, y(x), y'(x), u(x)) > 0$, della assoluta continuità della funzione integrale e della continuità dell'integrale $\int (p + qy')dx$, se ϱ è sufficientemente piccolo:

$$u(\bar{x}) - u_0(\bar{x}) > a - a_0 + \int_{a_0+\varrho}^{\bar{x}} \bar{f}(x, y, y', u)dx - \frac{\varepsilon_1}{4} - \int_{a_0+\varrho}^{\bar{x}} \bar{f}(x, y_0, y_0', u_0)dx - \frac{\varepsilon_1}{4}. \tag{5}$$

Se $\bar{x} \in (a, a_0+\varrho)$ le stesse considerazioni ora fatte danno subito: $u(\bar{x}) - u_0(\bar{x}) > a - a_0 - \varepsilon_1$; se $\bar{x} \in (b_0-\varrho, b)$, considerazioni analoghe ci permettono di riportare il problema al caso: $\bar{x} \in (a_0+\varrho, b_0-\varrho)$; perciò ci limiteremo a quest' ultimo. Sia allora $(x^*, \bar{x})$ l'intorno sinistro di $\bar{x}$ più ampio, contenuto in $(a_0+\varrho, \bar{x})$, nei punti interni del quale è ancora $u(x) < u_0(x)$. Se è $x^* > a_0+\varrho$, è $u(x^*) = u_0(x^*)$, se è $x^* = a_0+\varrho$, per la (5), è $u(x^*) - u_0(x^*) > -\varrho - \frac{\varepsilon_1}{2}$; in ogni caso sarà dunque:

$$u(\bar{x}) - u_0(\bar{x}) = u(\bar{x}) - u(x^*) - u_0(\bar{x}) + u_0(x^*) + u(x^*) - u_0(x^*) > -\varrho - \varepsilon_1 +$$
$$+ \int_{x^*}^{\bar{x}} \bar{f}(x, y, y', u)dx - \int_{x^*}^{\bar{x}} \bar{f}(x, y_0, y_0', u_0)dx.$$

Poichè, in virtù delle (1) e (2), la funzione $\bar{f}(x, y(x), y'(x), u_0(x))$ è maggiorata e minorata da funzioni integrabili in $(x^*, \bar{x})$, esiste l'integrale

$$\int_{x^*}^{\bar{x}} \bar{f}(x, y, y', u_0)dx,$$

e si può scrivere:

$$u(\bar{x})-u_0(\bar{x})>-\varrho-\varepsilon_1+\int_{x^*}^{\bar{x}}[\bar{f}(x,y,y',u)-\bar{f}(x,y,y',u_0)]+$$
$$+\int_{x^*}^{\bar{x}}[\bar{f}(x,y,y',u_0)-\bar{f}(x,y_0,y_0',u_0)]\,dx.$$

Il secondo integrale del secondo membro, in cui compare solo la $u_0(x)$ può essere reso $>-\varepsilon_1$, con un ragionamento analogo a quello svolto dal TONELLI nella nota citata in (3), n. 3, pp. 407-410, se ϱ è sufficientemente piccolo; in virtù anche della (1), si avrà quindi:

$$u(\bar{x})-u_0(\bar{x})>-\varrho-2\,\varepsilon_1+\int_{x^*}^{\bar{x}}[\bar{f}(x,y,y',u)-\bar{f}(x,y,y',u_0)]\,dx\geqslant-\varrho-2\,\varepsilon_1+$$
$$+R\int_{x^*}^{\bar{x}}[1+|y'|+|f(x,y,y',u)|]\,(u(x)-u_0(x))\,dx,$$

da cui, posto $\delta=\max\limits_{x^*\leqslant x\leqslant\bar{x}}[u_0(x)-u(x)]$:

$$u(\bar{x})-u_0(\bar{x})>-\varrho-2\,\varepsilon_1-\delta R(\bar{x}-x^*)-\delta R\int_{x^*}^{\bar{x}}|y'|\,dx-\delta R\int_{x^*}^{\bar{x}}|f(x,y,y',u)|\,dx.$$

Ma si ha:

$$\int_{x^*}^{\bar{x}}|f(x,y,y',u)|\,dx\leqslant\int_{x^*}^{\bar{x}}\bar{f}(x,y,y',u)\,dx+\int_{x^*}^{\bar{x}}[|p|+|q||y'|]\,dx. \tag{6}$$

E d'altra parte, avendo supposto $u(\bar{x})<u_0(\bar{x})$ è:

$$u(x^*)+\int_{x^*}^{\bar{x}}f(x,y,y',u)\,dx<u_0(x^*)+\int_{x^*}^{\bar{x}}f(x,y_0,y_0',u_0)\,dx, \tag{7}$$

cioè:

$$\int_{x^*}^{\bar{x}}\bar{f}(x,y,y',u)\,dx+\int_{x^*}^{\bar{x}}(p+qy')dx<\varrho+\varepsilon_1+\left|\int_{x^*}^{\bar{x}}f(x,y_0,y_0',u_0)\,dx\right|\leqslant\varrho+\varepsilon_1+\bar{U}_0-\bar{u}_0,$$

e perciò la (6) diventa:

$$\int_{x^*}^{\bar{x}}|f(x,y,y',u)|\,dx<\varrho+\varepsilon_1+\bar{U}_0-\bar{u}_0+2\int_{*}^{\bar{x}}[|p|+|q||y'|]\,dx.$$

Ne segue

$$(8) \qquad u(\bar{x}) - u_0(\bar{x}) > -\varrho - 2\,\varepsilon_1 - \delta R(\bar{x} - x^*) - \delta R \int_{x^*}^{\bar{x}} |\, y' \,|\, dx -$$

$$- \delta R \left[\varrho + \varepsilon_1 + \overline{U}_0 - \overline{u}_0 + 2 \int_{x^*}^{\bar{x}} [\,|\, p \,| + |\, q \,|\,|\, y' \,|\,]\, dx\right].$$

Dalla (7) e dalla (3) ricaviamo:

$$\int_{x^*}^{\bar{x}} \nu \,|\, y' \,|\, dx + \int_{x^*}^{\bar{x}} (\varrho + q y')\, dx < \int_{x^*}^{\bar{x}} f(x, y, y', u)\, dx < \varrho + \varepsilon_1 + \int_{x^*}^{\bar{x}} f(x, y_0, y_0', u_0)\, dx,$$

da cui

$$\int_{x^*}^{\bar{x}} |\, y' \,|\, dx < \frac{\varrho}{\nu} + \frac{\varepsilon_1}{\nu} + \frac{\overline{U} - \overline{u}_0}{\nu} + \frac{|\, p \,|(b_0 - a_0)}{\nu} + \frac{|\, q \,|}{\nu}\,[\,\overline{Y}_0 - \overline{y}_0 + 2\varrho\,]\,.$$

Sicchè sostituendo in (8) si ottiene, se $\varrho \leqslant \varepsilon_1$, tenendo presente il valore di ε_1 e l'ipotesi II):

$$u(\bar{x}) - u_0(\bar{x}) > -3\,\varepsilon_1 - \delta\,\frac{13}{20}\,.$$

Ragionando in modo analogo a quanto si è fatto per δ_1 nella dimostrazione del Teorema II, si ottiene una maggiorazione di δ $\left(\delta < \frac{60}{7}\,\varepsilon_1\right)$ e in definitiva quindi:

$$(9) \qquad u(\bar{x}) - u_0(\bar{x}) > -\,\varepsilon\,.$$

È poi immediato verificare, in modo analogo a quanto si è fatto nella dimostrazione del Teorema II, che l'ipotesi, espressa dalla (4), è effettivamente soddisfatta. La (9) è dunque verificata qualunque sia $\bar{x}$, purchè ϱ sia sufficientemente piccolo.