ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GYULA SZ-NAGY

Über die Lemniskatenflächen

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 2, nº 1-4 (1950), p. 39-53
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_2_1-4_39_0>

ÜBER DIE LEMNISKATENFLÄCHEN

von GYULA SZ-NAGY (Szeged)

§ 1. Einleitung

Eine *Lemniskatenfläche* $L_n(\varrho)$ *n-ten Grades* ist der Ort der räumlichen Punkte P, deren Abstände von n festen Punkten $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ ein konstantes Produkt ϱ^n ergeben. Die festen Punkte Q_k sind *Mittelpunkte* (Pole oder Brennpunkte) der Lemniskatenfläche, ϱ ist ihr *Radius*. Kommt Q_k unter den Mittelpunkten p-mal vor, so ist er ein p-facher Mittelpunkt. Die verschiedenen Mittelpunkte werden *Kerne* der Lemniskatenfläche genannt. Eine Lemniskatenfläche mit einem Kern ist eine Kugelfläche vom Halbmesser ϱ. Jede Lemniskatenfläche zweiten Grades ist eine Drehfläche, deren Meridiankurve eine Cassinische Kurve vierter Ordnung ist.

Bezeichnet $r_k = |PQ_k|$ den Abstand der Punkte P und Q_k, so hat die Lemniskatenfläche $L_n(\varrho)$ die Gleichung

$$r_1 r_2 \ldots r_n = \varrho^n. \tag{1}$$

Sind $P = (x, y, z)$, $Q_k = (x_k, y_k, z_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, so hat die Lemniskatenfläche $L_n(\varrho)$ in rechtwinkligen Koordinaten die Gleichung

$$F(x, y, z) = \prod_{k=1}^{n} [(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2] = \varrho^{2n} \neq 0. \tag{2}$$

$L_n(\varrho)$ ist also eine algebraische Fläche $2n$-ter Ordnung, für welche der absolute Kreis eine n-fache Kurve ist. Die Fläche liegt ganz im Endlichen.

Die Lemniskatenflächen $L_n(\varrho)$ und $L_n(\varrho')$ sind *konzentrisch* (oder konfokal) wenn sie dieselben Mittelpunkte und in jedem Mittelpunkt für beide Flächen dieselbe Vielfachheit besitzen. Unter den konzentrischen Lemniskatenflächen $L_n(\varrho)$ gibt es genau eine Fläche, die durch einen Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ geht. Diese Fläche hat die Gleichung

$$F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0) = \varrho_0^{2n}.$$

Die Fläche $L_n(0)$ ist eine uneigentliche Fläche, die aus den Mittelpunkten der konzentrischen Lemniskatenflächen $L_n(\varrho)$ $(\varrho > 0)$ besteht

Hat die Lage der Mittelpunkte einer Fläche $L_n(\varrho)$ eine Symmetrie (bezüglich einer Ebene, oder einer Geraden, oder eines Punktes), so besitzt auch die Lemniskatenfläche diese Symmetrie (1).

§ 2. Singuläre Punkte der Lemniskatenflächen.

Der Punkt $P = (x, y, z)$ ist ein singulärer Punkt der eigentlichen Lemniskatenfläche (2), wenn

$$F(x, y, z) = \varrho^{2n} (\neq 0), \; F_x(x, y, z) = 0, \; F_y(x, y, z) = 0, \; F_z(x, y, z) = 0$$

sind. Die singulären Punkte der Fläche (2) genügen also den Gleichungen

$$\frac{F_x}{F} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{x - x_k}{d_k} = 0, \quad \frac{F_y}{F} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{y - y_k}{d_k} = 0, \quad \frac{F_z}{F} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{d_k} = 0, \tag{3}$$

wo $F = \varrho^{2n} \neq 0$ und $d_k(x, y, z) = (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2$ sind.

Bezeichnet $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ einen (reellen) singulären Punkt der Lemniskatenfläche (2), so bestehen also die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} m_k (x_0 - x_k) = 0, \; \sum_{k=1}^{n} m_k (y_0 - y_k) = 0, \; \sum_{k=1}^{n} m_k (z_0 - z_k) = 0, \tag{4}$$

$$m_k = \frac{1}{(x_0 - x_k)^2 + (y_0 - y_k)^2 + (z_0 - z_k)^2}$$

oder

$$Mx_0 = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k, \; My_0 = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k, \; Mz_0 = \sum_{k=1}^{n} m_k z_k, \tag{5}$$

$$M_k = \sum_{k=1}^{n} m_k, \; m_k = \frac{1}{(x_0 - x_k)^2 + (y_0 - y_k)^2 + (z_0 - z_k)^2}.$$

P_0 ist also der Schwerpunkt der Massenpunkte Q_k mit den Massen m_k.

Daraus folgt der Satz

I. *Die reellen singulären Punkte einer Lemniskatenfläche fallen in die konvexe Hülle* H *ihrer Mittelpunkte.*

---

(1) Die Literatur über Lemniskatenflächen ist mir unbekannt. Wegen der Literatur der ähnlich definierten ebenen Kurven Lemniskaten verweise ich auf meine Arbeit: *Über die allgemeinen Lemniskaten*, Acta Scientiarum Math. Szeged 11 (1948), 207-234 und auf die dort angeführten Arbeiten von G. Loria, G. Pólya, G. Szegö, J. L. Walsh und L. Hibbert.

Bezeichnet $Q'_k = (x'_k, y'_k, z'_k)$ das Bild des Punktes $Q_k = (x_k, y_k, z_k)$ bei Spiegelung an der Kugel vom Einheitsradius und vom Mittelpunkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, so sind

$$x'_k - x_0 = m_k (x_k - x_0), \quad y'_k - y_0 = m_k (y_k - y_0), \quad z'_k - z_0 = m_k (z_k - z_0).$$

Für die Punkte $Q'_k = (x'_k, y'_k, z'_k)$ bestehen also die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} (x'_k - x_0) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} (y'_k - y_0) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} (z'_k - z_0) = 0. \tag{6}$$

Daraus folgt der Satz

II. *Ist* P_0 *ein reeller singulärer Punkt einer Lemniskatenfläche* n-*ten Grades mit den Mittelpunkten* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ *und bezeichnet* Q'_k *das Spiegelbild von* Q_k *bezüglich der Einheitskugel vom Mittelpunkt* P_0, *so ist* P_0 *der Schwerpunkt der Punkte* Q'_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *mit gleichen Massen. Die Vektoren* $\overrightarrow{P_0 Q_k}$ *lassen sich in ein geschlossenes (im allgemeinen räumliches) Vieleck zusammensetzen, weil ihre Summe verschwindet.*

Aus diesem Satz lässt sich der folgende Satz ableiten:

III. *Hat eine Lemniskatenfläche* n-*ten Grades die Kerne* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$, *ist* p_k *die Vielfachheit des Mittelpunktes* Q_k $(p_k \geqq 1, p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n)$ *und bezeichnet* $K(\sigma)$ $(0 < \sigma \leqq 1)$ *den Durchschnitt der* m-1 *Kugeln*

$$|PQ_1| \leq \frac{\sigma p}{n - p_1} |PQ_k| \quad (k = 2, 3, \ldots, m),$$

so enthält der konvexe Körper $K(\sigma)$ *keinen singulären Punkt der Lemniskatenfläche im Innern.*

In einem inneren Punkt P von $K(\sigma)$ sind

$$\frac{|PQ'_k|}{|PQ'_1|} = \frac{|PQ_1|}{|PQ_k|} \leq \frac{\sigma p_1}{n - p_1} \quad (k = 2, 3, \ldots, m),$$

und mindestens eine dieser Ungleichungen besteht mit Ungleichheitszeichen, so dass

$$\sum_{k=2}^{m} p_k |PQ'_k| < \frac{\sigma p_1}{n - p_1} |PQ'_1| \sum_{k=2}^{m} p_k = \sigma p_1 |PQ'_1|$$

ist.

Sind nun $p_1 \cdot \overrightarrow{PQ'_1} = \overrightarrow{PQ}$ und $\sum\limits_{k=2}^{m} p_k \overrightarrow{PQ'_k} = \overrightarrow{QN}$, so ist

$$|QN| \leqq \sum_{k=2}^{m} p_k |PQ'_k| < \sigma p_1 |PQ'_1| .$$

Hieraus folgt, dass

$$\sum_{k=1}^{m} p_k \overrightarrow{PQ'_k} \equiv \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN} \equiv \overrightarrow{PN} \neq 0$$

ist, weil

$$|PN| \geqq |PQ| - |QN| > p_1 |PQ'_1| - \sigma p_1 |PQ'_1| = p_1(1-\sigma) |PQ'_1| \geqq 0$$

ist. Im Punkt P kann also die Vektorgleichung des Satzes II nicht bestehen, P ist also kein singulärer Punkt der Lemniskatenfläche.

Die Funktion $F(x, y, z)$ von (2) ist ein Abstandspolynom. Seine Nullstellen sind die Mittelpunkte der Lemniskatenfläche (2). Nach meinei Definition [2]) der Derivierten des Abstandspolynoms $F(x, y, z)$ von (2) stimmen ihre Nullstellen mit den singulären Punkten der Lemniskatenfläche (2) überein. Die Sätze über die Lage der Nullstellen des Abstandspolynoms $F(x, y, z)$ und seiner Derivierten gelten also ohne Weiteres für die Lage der Mittelpunkte der Lemniskatenfläche (2) und ihrer singulären Punkte.

§ 3. Normalen der Lemniskatenflächen.

Der Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ist ein gewöhnlicher Punkt der Lemniskatenfläche (2), wenn mindestens eine der Zahlen $F_x(x_0, y_0, z_0)$, $F_y(x_0, y_0, z_0)$ und $F_z(x_0, y_0, z_0)$ von Null abweicht. Dann hat die Berührungsebene der Fläche im Punkt P_0 die Gleichung

$$(x - x_0) F_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) F_y(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) F_z(x_0, y_0, z_0) = 0 .$$

Die Normale der Lemniskatenfläche im Punkt P_0 lässt sich auf folgende Weise konstruieren:

IV. *Bezeichnet* P_0 *einen gewöhnlichen Punkt einer Lemniskatenfläche* $\mathrm{L}_n(\varrho)$ *mit den Mittelpunkten* $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \ldots, \mathrm{Q}_n$, *bezeichnet ferner* Q'_k *das Bild von* Q_k *bei einer Spiegelung an einer Kugel mit dem Zentrum* P_0, *und ist* $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{N}} = \sum\limits_{k=1}^{n} \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{Q}'_k}$, *so ist die Gerade* $\mathrm{P}_0\mathrm{N}$ *Normale der Fläche im Punkt* P_0.

([2]) Gy. v. Sz. Nagy, *Über die Nullstellen eines Abstandspolynoms und seiner Derivierten*, Bullettin of the American Math. Soc. 55 (1949), 329-342.

P_0 und N fallen nicht zusammen, weil P_0 kein singulärer Punkt ist.

Zum Beweis dieses Satzes kann man annehmen, dass die Fläche im gewöhnlichen Punkt $P_0 = (0, 0, 0)$ von der xy-Ebene berührt wird, (weil diese Lage des Koordinatensystems durch eine Transformation erreicht werden kann). Bei diesen Annahmen erhält man aus (3)

$$(6) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} = 0\,, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} = 0\,, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} \neq 0\,,$$

weil die Normale der Fläche im Punkt $P_0 = (0, 0, 0)$ die z-Achse ist.

Hat die Kugel im Satz IV den Halbmesser r und sind $Q_k = (x_k, y_k, z_k)$ und $Q'_k = x'_k, y'_k, z'_k)$, so sind

$$x'_k = \frac{r^2 x_k}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}\,, \quad y'_k = \frac{r^2 y_k}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}\,, \quad z'_k = \frac{r^2 z_k}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}\,.$$

Die Relationen (6) lassen sich also in der Form

$$X = \sum_{k=1}^{n} x'_k = 0\,, \quad Y = \sum_{k=1}^{n} y'_k = 0, \quad Z = \sum_{k=1}^{n} z'_k \neq 0$$

schreiben. Damit ist der Satz IV bewiesen, weil der Punkt $N = (X, Y, Z)$ auf die z-Achse fällt und vom Punkt $P_0 = (0, 0, 0)$ abweicht.

V. *Jede Normale einer Lemniskatenfläche hat Punkte in der konvexen Hülle H der Mittelpunkte.*

Liegt der (notwendig gewöhnliche) Punkt $P_0 = (0, 0, 0)$ der Fläche ausserhalb von H und bezeichnet S der Schwerpunkt der Punkte Q_k mit den Massen $m_k = (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)^{-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, so liegt S in H und $\overrightarrow{P_0 N} = n\, \overrightarrow{P_0 S}$ ist.

Damit ist der Satz V bewiesen.

Aus dem Beweis des Satzes III ergibt sich der Satz:

VI. *Ist* P *ein beliebiger Punkt der Lemniskatenfläche im Körper* K(σ) *des Satzes III und ist $\sigma < 1$, so bildet die Normale der Fläche in Punkt* P *zur Geraden* PQ$_1$ *einen Spitzwinkel $\vartheta \leqq \arc \sin \sigma$.*

In diesem Punkt P sind nämlich

$$\overrightarrow{PQ} = p_1\, \overrightarrow{PQ'_1}\,, \; \overrightarrow{QN} = \sum_{k=2}^{m} p_k\, \overrightarrow{PQ'_k} \text{ und } |\,QN\,| \leqq \sum_{k=2}^{m} p_k\, |\,PQ'_k\,| \leqq \sigma\, p_1\, |\,PQ'_1\,| = \sigma\, |\,PQ\,|\,.$$

N ist also ein innerer Punkt der Kugel $K(Q)$ vom Zentrum Q und vom Halbmesser $|PQ|$. Die Normale PN bildet zur Geraden PQ einen nicht grösseren Winkel als zu einer von P ausgehenden Tangente der Kugel $K(Q)$. Dieser Winkel ϑ_0 genügt der Gleichung $\sin \vartheta_0 = \sigma$. Damit ist der Satz VI bewiesen. Dieser Satz enthält den folgenden in sich:

VII. *Sind* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ *die Kerne einer Lemniskatenfläche* n-*ten Grades, ist* $nr = \mathrm{Min}\,|Q_1 Q_k|$ $(k = 2, 3, \ldots, m)$ *und bezeichnet* K *die Kugel vom Zentrum* Q *und vom Halbmesser* $r\sigma$ $(\sigma \leq 1)$, *so bildet die Normale in einem innerhalb von* K *liegenden Punkt* P *der Fläche zur Geraden* PQ_1 *einen Spitzwinkel* $\vartheta < \arcsin \sigma$.

Die Kugel K liegt nämlich im Körper $K(\sigma)$.

§ 4. Sternartige Lemniskatenflächen.

Es gilt der Satz

VIII. *Enthält der eine von der Ebene* E *begrenzte (abgeschlossene) Halbraum* R *die konvexe Hülle* H *der Mittelpunkte einer Lemniskatenfläche, so wird die im anderen Halbraum* R' *liegende Punktmenge der Fläche von einer zu* E *senkrechten beliebigen Geraden in einem oder keinem Punkt getroffen.*

Liegen die Punkte P_1' und P_2' von R' auf einer zu E senkrechten Geraden g und liegt P_1' zu E näher als P_2', so liegt P_1' zu jedem Punkt P des Halbraumes R näher als P_2'. Dies ist klar, wenn auch P auf g liegt. Sind P, P_1' und P_2' die Ecken eines Dreieckes, so hat dieses Dreieck bei P_1' einen Stumpfwinkel oder Rechtwinkel. Deshalb ist $|P_1'P| < |P_2'P|$. Diese Ungleichung gilt also auch dann, wenn P irgendeinen Mittelpunkt der Lemniskatenfläche bedeutet. Die Fläche kann höchtens einen der Punkte P_1' und P_2' enthalten, weil

$$\prod_{k=1}^{n} |P_1'Q_k| < \prod_{k=1}^{n} |P_2'Q_k|$$

ist. Damit ist der Satz VIII bewiesen. Er gilt für jede Stützebene von H. Es gilt also der Satz:

IX. *Liegen die Mittelpunkte einer Lemniskatenfläche in der Ebene* E, *so ist die Fläche symmetrisch bezüglich von* E *und besitzt mit einer zu* E *senkrechten Geraden entweder zwei (verschiedene oder in* E *zusammenfallende) Treffpunkte, oder keine.*

Eine Punktmenge M wird bezüglich der Punktmenge M^* *sternartig* genannt, wenn jede von einem beliebigen Punkt P^* der Punktmenge M^* ausgehende Halbgerade mit M höchstens einen Treffpunkt besitzt.

Zu einem konvexen Körper H definieren wir *eine Punktmenge* $M(H)$ auf folgende Weise. Bezeichnet P_H bzw. P einen beliebigen Punkt innerhalb bzw. ausserhalb von H und bezeichnet $E(P; P_H)$ die durch P gehende Ebene mit der Normalen PP_H, so gehört P der Menge $M(H)$ dann, wenn H von keiner der Ebenen $E(P; P_H)$ getroffen wird. Ist H eine Kugel vom Halbmesser r, so kann man leicht einsehen, dass die Punktmenge $M(H)$ aus den ausserhalb der konzentrischen Kugel vom Habmesser $r_1 = r\sqrt{2}$ gelegenen Punkten besteht. Es gilt also der Satz:

X. *Ist* H *die konvexe Hülle der Mittelpunkte einer Lemniskatenfläche, so ist die zu* M(H) *gehörige Punktmenge der Fläche sternartig bezüglich von* H.

Enthält eine Kugel K *vom Halbmesserr die Mittelpunkte einer Lemniskatenfläche, so ist die ausserhalb der konzentrischen Kugel* K_1 *vom Halbmesser* $r_1 = r\sqrt{2}$ *liegende Punktmenge der Fläche sternartig bezüglich der Kugel* K.

§ 5. Wendetangenten und Wendepunkte einer Lemniskatenfläche.

Eine Tangente t einer Lemniskatenfläche ist eine *gewöhnliche* bzw. *Wendetangente,* je nachdem sie im Berührungspunkt P mit der Fläche zwei bzw. mehr als zwei Treffpunkte besitzt. Ist t eine Wendetangente der Fläche, so wird P als ein *Wendepunkt* (bezüglich der Wendetangente t) genannt werden- Nach dieser Definition ist jede Tangente bzw. jeder Punkt der Haupttan. gentenkurven (Asymtotenlinien) der Fläche ist eine Wendetangente bzw. ein Wendepunkt. Auch die Tangenten der Fläche in den singulären Punkten sind den Wendetangenten zu rechnen

Berührt die x-Achse die Fläche (2) im Anfangspunkt des Koordinatensystems, so ist $x = 0$ eine zweifache bzw. eine dreifache Nullstelle des Polynoms

$$g(x) \equiv f(x) - \varrho^{2n}, \; f(x) \equiv F(x, 0, 0) \equiv \prod_{k=1}^{n} [(x - x_k)^2 + y_k^2 + z_k^2],$$

je nachdem die x-Achse im Anfangspunkt eine gewöhnliche bzw. eine Wendetangente der Lemniskatenfläche ist. Im zweiten Fall sind also $g(0) = 0$, $g'(0) = f'(0) = 0$ und $g''(0) = f''(0) = 0$. Daraus folgen die Gleichungen

$$(7) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^2 + z_k^2 - x_k^2}{(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)^2} = 0,$$

weil

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]' + \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]^2, \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{x - x_k}{(x - x_k)^2 + y_k^2 + z_k^2},$$

$$\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]' = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^2 + z_k^2 - (x - x_k)^2}{[(x - x_k)^2 + y_k^2 + z_k^2]^2}$$

sind.

Die Gleichung

$$(8) \qquad y^2 + z^2 - x^2 = 0$$

stellt eine Drehkegelfläche K_0 her, deren Spitze bzw. Achse im Anfangspunkt bzw. in der x-Achse liegt und deren Achse zu ihren Erzeugenden den Winkel $\frac{\pi}{4}$ bildet. Ein Punkt $P = (x, y, z)$ liegt an der inneren bzw. äusseren Seite dieser Kegelfläche, je nachdem die linke Seite von (8) negativ bzw. positiv ist. Nach der zweiten Gleichung von (7) sind die Mittelpunkte der Lemniskatenfläche (2) von der Kegelfläche (8) getrennt, d. h.: die Fläche hat an beiden Seiten der Kegelfläche mindestens je einen Mittelpunkt, oder jeden Mittelpunkt auf der Kegelfläche. Damit ist der Satz bewiesen:

XI. *Ist* t *eine Wendetangente einer Lemniskatenfläche im Wendepunkt* P *und bezeichnet* K_P *die Drehkegelfläche mit der Achse* t *und mit der Spitze* P, *deren Erzeugenden zur Achse* t *den Winkel* $\frac{\pi}{4}$ *bilden, so trennt die Fläche* K_P *die Mittelpunkte der Lemniskatenfläche.*

Die Lemniskatenfläche (2) ist in ihrem Punkt P offenbar elliptisch gekrümmt, wenn P kein Wendepunkt ist. Es gilt der Satz:

XII. *Liegen die Mittelpunkte einer Lemniskatenfläche in einer Kugel* K *vom Halbmesser* r, *so ist die Fläche ausserhalb der konzentrischen Kugel* K_1 *vom Halbmesser* $r_1 = r \operatorname{cosec} \frac{\pi}{8} = r\, 2{,}613\ldots$ *elliptisch gekrümmt.*

Zum Beweis des Satzes XII nimmt man an, dass der Wendepunkt P der Lemniskatenfläche (2) auf seiner Wendetangente t ausserhalb der Kugel K_1 liegt. Dann bezeichnet man mit f die Normale der Lemniskatenfläche im Wendepunkt P, mit g_k die Gerade PQ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, mit α_k bzw. β_k den Winkel der Geraden t und g_k bzw. f und g_k $(0 \leqq \alpha_k < \pi,\ 0 \leqq \beta_k < \pi)$, mit K_P die Kegelfläche im Satz XI, mit K'_P die Tangentenkegelfläche der Kugel K von P aus. Die Erzeugenden der Kegelfläche K'_P bilden zu ihrer Achse Winkel $\gamma < \frac{\pi}{8}$, weil P ausserhalb von K liegt.

Der abgeschlossene Innenraum der Kegelfläche K_P enthält die Kugel K, damit die Mittelpunkte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ und nach Satz V die Normale f. Daraus folgen die Ungleichungen $0 \leqq \beta_k \leqq 2\gamma < \frac{\pi}{4}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Die Geraden t, f und g_k bilden im Allgemeinen ein Trieder T mit den Seiten α_k, β_k und $\frac{\pi}{2}$. Bei einem Trieder ist die Summe bzw. Differenz zweier Seiten grösser bzw. kleiner, als die dritte. Es gelten also die Ungleichungen $\alpha_k \geqq \frac{\pi}{2}$ $\beta_k \geqq \frac{\pi}{2}$ $2\gamma > \frac{\pi}{4}$ und $\alpha_k \leqq \frac{\pi}{2} + \beta_k < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Diese Ungleichungen drücken aus, dass jeder Punkt Q_k an der äusseren Seite von K_P liegt. Die Mittelpunkte der Lemniskatenfläche müssten aber nach Satz XI von der Kegelfläche K_P getrennt werden. Aus diesem Widerspruch folgt der Satz XII.

Es gilt auch der Satz:

XIII. *Sind* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ *die Kerne einer Lemniskatenfläche* n-*ten Grades, ist* Q_1 *ein* p_1—*facher Mittelpunkt, so sind die im Durchschnitt der* m—1 *Kugeln*

$$|PQ_1| \leqq \frac{p_1}{2(n-p_1)} |PQ_k| \; (k = 2, 3, \ldots, m;\; p_2 + p_3 + \ldots + p_m = n - p_1),$$

liegenden Punkte der Lemniskatenfläche elliptisch gekrümmt.

In einem hyperbolisch oder parabolisch gekrümmten Punkt P_0 hat die Lemniskatenfläche eine Wendetangente t mit dem Wendepunkt P_0. Man kann annehmen, dass P_0 in den Anfagspunkt und t bzw. die Normale der Fläche im Punkt P_0 in die x-Achse bzw. z-Achse fallen.

Bezeichnen r_k, ϑ_k und φ_k die räumlichen Polarkoordinaten des (p_k — fachen) Mittelpunktes Q_k, so sind

$$z_k = r_k \cos\vartheta_k, \quad x_k = r_k \sin\vartheta_k \cos\varphi_k, \quad y_k = r_k \sin\vartheta_k \sin\varphi_k \text{ und}$$

$$y_k^2 + z_k^2 - x_k^2 = r_k^2(\cos^2\theta_k - \sin^2\vartheta_k \cos 2\varphi_k) \equiv r_k^2\, U_k \; (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Die zweite Gleichung von (7) hat jetzt die Form

$$(9) \qquad V \equiv \sum_{k=1}^{m} p_k \frac{U_k}{r_k^2} \equiv \frac{1}{r_1^2}\Big(p_1 U_1 + \sum_{k=2}^{m} \frac{p_k\, r_1^2\, U_k}{r_k^2}\Big) = 0\,.$$

Nach den Annahmen des Satzes XIII bzw. nach dem Satz VII sind

$$\frac{r_1^2}{r_k^2} \leqq \frac{p_1^2}{4(n-p_1)^2} \quad (k=2,3,\ldots,m) \text{ bzw. } \sin\vartheta_1 \leqq \sigma = \frac{1}{2}.$$

Es gelten also die Ungleichungen

$$U_1 = \cos^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_1\cos 2\varphi_1 = 1 - \sin^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_1\cos 2\varphi_1 \geqq 1 - \sigma^2 - \sigma^2 =$$

$$= 1 - 2\sigma^2 = \frac{1}{2}.$$

und $U_k = \cos^2\vartheta_k - \sin^2\vartheta_k \cos 2\varphi_k \geqq 1$ $(k = 2, 3, \ldots, m)$.

Daraus folgt die Ungleichung

$$V \geq \frac{1}{r_1^2}\left[\frac{p_1}{2} - \frac{p_1^2}{4(n-p_1)}\sum_{k=2}^{m} p_k\right] = \frac{p_1}{2r_1^2}\left[1 - \frac{p_1}{2(n-p_1)}\right] > 0 .$$

Die Gleichung (9) kann also nicht bestehen. Die Annahme, dass der hyperbolisch oder parabolisch gekrümmte Punkt P_0 der Lemniskatenfläche im Durchschnitt der $m-1$ Kugeln des Satzes XIII liegt, führt zur Ungleichung $V \neq 0$. P_0 ist also kein Wendepunkt. Aus diesem Widerspruch folgt die Richtigkeit des Satzes XIII.

§ 6. Die Lage einer Lemniskate $L_n(\varrho)$ bezüglich der konzentrischen Kugeln vom Halbmesser ϱ.

Es gilt der Satz:

XIV. *Eine Lemniskatenfläche* $L_n(\varrho)$ *mit den Kernen* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ ***besitzt keinen Punkt ausserhalb sämtlicher Kugeln*** K_h

(10) $$|PQ_h| \leqq \varrho \quad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

und keinen innerhalb jeder dieser m ***Kugeln.***

Die Gesamtheit dieser m ***Kugeln enthält jeden Punkt der Lemniskatenfläche. Der gemeinsame Körper der*** m ***Kugeln enthält keinen Punkt der Lemniskatenfläche im Innern.***

Ist Q_h ein p_h — facher Mittelpunkt von $L_n(\varrho)$ $(p_h \geqq 1, p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n)$, so genügen die Punkte von $L_n(\varrho)$ der Gleichung

(11) $$G(P) = \prod_{h=1}^{m} |PQ_h|^{p_h} = \varrho^n .$$

Liegt ein Punkt P' ausserhalb bzw. innerhalb jeder Kugel K_h von (10), so bestehen die Ungleichungen

$$| P'Q_h | > \varrho \quad \text{bzw.} \quad | P'Q_h | < \varrho \; (h = 1, 2, \ldots, m),$$

woraus

$$G(P') > \varrho^n \quad \text{bzw.} \quad G(P') < \varrho^n$$

folgt. P' ist also kein Punkt der Lemniskatenfläche (11). Damit ist der erste Absatz von XIV bewiesen, der zweite Absatz folgt aus dem ersten.

Aus den Sätzen XIV und XII lässt sich der Satz ableiten:

XV. *Enthält eine Kugel* K *vom Halbmesser* r *jeden Kern einer Lemniskatenfläche* $\mathrm{L_n}(\varrho)$, *so liegt die Fläche ganz in der konzentrischen Kugel* K' *vom Halbmesser* r' $= \varrho + \mathrm{r}$. *Ist* $\varrho > \mathrm{r}$, *so hat* $\mathrm{L_n}(\varrho)$ *keinen Punkt innerhalb der konzentrischen Kugel* K'' *vom Habmesser* $\mathrm{r''} = \varrho - \mathrm{r}$.

Ist $\varrho > \mathrm{r}\,(1 + \operatorname{cosec}\frac{\pi}{8}) = \mathrm{r}\; 3{,}613\ldots$, *so ist* $\mathrm{L_n}(\varrho)$ *eine konvexe Fläche.*

Die Lemniskatenflächen $L_n(\varrho)$ sind kugelförmig, falls ihr Radius ϱ genügend genügend gross ist.

Die Kugel K' enthält nämlich jede Kugel K_h und damit jeden Punkt von $L_n(\varrho)$. Die Kugel K'' liegt in jeder Kugel, in ihrem Inneren liegt also kein Punkt von $L_n(\varrho)$. Ist $\varrho > r$, so liegt $L_n(\varrho)$ in dem von den Kugelflächen K' und K'' begrenzten Kugelring von den Halbmessern

$$r' = \varrho\left(1 + \frac{r}{\varrho}\right) \text{ und } r'' = \varrho\left(1 - \frac{r}{\varrho}\right).$$

Damit ist der erste und der dritte Absatz von XV bewiesen.

Ist $\varrho > r\left(1 + \operatorname{cosec}\frac{\pi}{8}\right)$, so ist $r'' = r \operatorname{cosec}\frac{\pi}{8}$. Dann hat die Fläche $L_n(\varrho)$ nach Satz XII überall positive Gauss sche Krümmung. Sie ist nach einem Satz [3] von Hadamard eine konvexe Fläche.

§ 7. Konzentrische Kugelsystem einer Lemniskatenfläche.

Die Kugeln K_h

(12) $$| PQ_h | \leqq \varrho_h \quad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

bilden ein konzentrisches Kugelsystem der Lemniskatenfläche (11) wenn die positive Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ der Gleichung

(13) $$\varrho_1^{p_1} \varrho_2^{p_2} \ldots \varrho_m^{p_m} = \varrho^n \; (p_h \geqq 1 \, . \, p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n)$$

([3]) Bei T. Bonnesen — W. Fenchel, *Konvexe Körper*, Berlin 1934, S. 145-146.

Es gilt die folgende Verallgemeinerung des Satzes XIV:

XVI. *Jedes konzentrische Kugelsystem* S *einer Lemniskatenfläche* $L_n(\varrho)$ *enthält die Fläche. Haben die Kugeln von* S *einen Körper* T *gemeinsam, so liegt kein Punkt der Fläche innerhalb von* T. *Der Durchschnitt verschiedener konzentrischen Kugelsysteme* $S_1, S_2, \ldots$ *enthält die Fläche.*

Hat die Kugel K_1 *des konzentrischen Kugelsystems* S *mit keiner der übrigen Kugeln von* S *einen Punkt gemeinsam, so besitzt die Lemniskatenfläche im Innern von* K_1 *eine geschlossene Teilfläche, eine Schale, von der der Kern* Q_1 *eingeschlossen wird.*

Der erste Absatz von XVI wird ebenso bewiesen, wie der Satz XIV.

Im zweiten Absatz ist ein Punkt P_0 der Kugelfläche K_1 kein Punkt von $L_n(\varrho)$, weil $|P_0Q_1| = \varrho_1$, $|P_0Q_h| > \varrho_h$ $(h = 2, 3, \ldots, m)$ und deshalb $G(P_0) > \varrho_1^{p_1}\varrho_2^{p_2}\ldots\varrho_m^{p_m} = \varrho^n$ sind.

Während ein Punkt P von P_0 ausgehend den Halbmesser P_0Q_1 von K_1 beschreibt, verändert sich die Funktion $G(P)$ von $G(P_0)$ ausgehend bis $G(Q_1) = 0$ stetig. Es gibt also auf dem Halbmesser P_0Q_1 mindestens einen Punkt P, wo $G(P) = \varrho^n$ ist. Jeder Halbmesser von K_1 hat also mit $L_n(\varrho)$ mindestens einen Punkt gemeinsam. Diese gemeinsamen Punkte bilden eine geschlossene Teilfläche, von der Q_1 eingeschlossen wird.

Sind

$$(14)\qquad |Q_1Q_h| = d_h,\ d = \operatorname{Min} d_h,\ \varrho_h = d - \varrho_1,\ \varrho_h' = d + \varrho_1\ (h = 2, 3, \ldots, m)$$

und

$$(15)\qquad \varrho_1^{p_1}\varrho_2^{p_2}\ldots\varrho_m^{p_m} = \varrho_1'^{p_1}\varrho_2'^{p_2}\ldots\varrho_m'^{p_m} = \varrho^n,\quad 2\varrho \leqq d,$$

so liegt die Kugel K_1 bzw. K_1' ausserhalb bz. innerhalb der übrigen $m-1$ Kugeln des konzentrischen Kugelsystems S bzw. S' von $L_n(\varrho)$. Die Fläche $L_n(\varrho)$ besitzt also im Kugelring vom Zentrum Q_1 mit den Halbmessern ϱ_1 und ϱ_1' eine Schale.

Aus der Gleichung (15) folgt die Ungleichung

$$(16)\qquad 1 > \frac{\varrho_1'}{\varrho_1} = \prod_{h=2}^{m}\left(\frac{\varrho_h}{\varrho_h'}\right)^{-\frac{p_h}{p_1}} =$$

$$= \left(\frac{1 - \frac{\varrho_1}{d}}{1 + \frac{\varrho_1'}{d}}\right)^{\frac{n-p_1}{p_1}} \geqq \left(\frac{1 - \frac{\varrho_1}{d}}{1 + \frac{\varrho_1'}{d}}\right)^{n-1} > \left(1 - \frac{2\varrho}{d}\right)^{n-1} > 1 - \frac{2(n-1)\varrho}{d}.$$

Ist also $\dfrac{2(n-1)\varrho}{d} = \varepsilon < 1$, so ist $1 - \varepsilon < \dfrac{\varrho_1'}{\varrho_1} < 1$. Daraus folgt:

XVII. *Ist der Radius* ϱ *einer Lemniskatenfläche* $L_n(\varrho)$ *mit* m *Kernen genügend klein, so besitzt die Fläche* m *kugelförmige Schalen. Jeder Kern wird von einer Schale eingeschlossen.*

§ 8. Topologische Eigenschaften der Schalen einer Lemniskatenfläche.

Ein Punkt $P = (x, y, z)$ liegt innerhalb bzw. ausserhalb der Lemniskatenfläche (2), je nachdem $F(x, y, z) < \varrho^{2n}$ bzw. $F(x, y, z) > \varrho^{2n}$ ist. Der Innenraum I der Lemniskatenfläche ist die Menge der innerhalb der Fläche liegenden Punkte. I besteht im allgemeinen aus mehr in sich zusammenhängenden Teilräumen $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$, unter denen keine zwei einen inneren Punkt gemeinsam haben. Die Randfläche M_h von I_h $(h = 1, 2, \ldots, \mu)$ ist eine Schale oder ein Mantel der Lemniskatenfläche. Die Punkte von I_h liegen innerhalb der Schale M_h.

Die Lemniskatenfläche $L_n(\varrho')$ liegt innerhalb der konzentrischen Lemniskatenfläche $L_n(\varrho)$, wenn $\varrho' < \varrho$ ist. Jeder Kern von $L_n(\varrho)$ $(\varrho' = 0)$ liegt also innerhalb der Fläche und deshald innerhalb einer ihrer Schalen.

Innerhalb einer Schale M_h hat die Lemniskatenfläche mindestens einen Kern. Die nichtnegative Funktion $F(x, y, z)$ ist im Raum I_h und auf seiner Randfläche M_h stetig und erreicht dort ihren Minimalwert $\varrho'^{2n} \geq 0$ in mindestens einem Punkt $P' = (x', y', z')$. Wäre $\varrho' \neq 0$, so hätte die Lemniskatenfläche $L_n(\varrho')$ in I_h mindestens eine Schale M', weil sie auf M_h keinen Punkt haben kann. Dann wäre jeder innerhalb von M' gelegene Punkt $P'_0 = (x'_0, y'_0, z'_0)$ auch innerhalb von M_h gelegen und deshalb wäre $F(x'_0, y'_0, z'_0) < F(x', y', z') = \varrho^{2n}$. Aus diesem Widerspruch folgt, dass $\varrho' = 0$ ist. P' ist also ein Kern von $L_n(\varrho)$.

Innerhalb jeder Schale von $L_n(\varrho)$ besitzt die konzentrische Lemniskatenfläche $L_n(\varrho')$ $(0 < \varrho' < \varrho)$ mindestens eine Schale. Liegt nämlich der Kern Q_h innerhalb von M_h und ist P ein beliebiger Punkt von M_h, so hat $L_n(\varrho')$ auf der Strecke $Q_h P$ mindestens einen Punkt, weil der Wert der stetigen Funktion $F(x, y, z)$ in Q_h bzw. P gleich 0 bzw. ϱ^{2n} $(> \varrho'^{2n})$ ist.

Zwei Räume I_h und I_k $(h \neq k)$ haben höchstens Randpunkte gemeinsam. Die Schalen M_h und M_k schneiden also einander nicht und ein Kern kann nicht innerhalb beider Schalen liegen. Es gilt also der Satz:

XVIII. *Die Anzahl der Schalen der konzentrischen Lemniskaten* $L_n(\varrho)$ *wird durch die Vergrösserung von* ϱ *niemals vergrössert. Eine Lemniskatenfläche besitzt innerhalb einer ihrer Schalen mindestens einen Kern. Eine Lemniskatenfläche* n*—ten Grades bzw. mit* m *Kernen besteht aus höchstens* n *bzw.* m *Schalen. Eine Schale schneidet weder sich, noch eine Schale und schliesst keine andere Schale der Fläche ein.*

Aus den Sätzen XVI, XIII und XV folgt der Satz:

XVIII. *Bezeichnet* d *bzw.* D *den Minimal- bzw. Maximalabstand zwischen je zwei Kernen der Lemniskatenfläche* $L_n(\varrho)$ *und ist* $\varrho \leqq \frac{d}{2}$ *bzw.* $\varrho \geqq D$, *so besteht die Fläche aus* m *Schalen bzw. aus einer einzigen Schale. Ist* $\varrho \leqq \frac{d}{2n}$ *oder* $\varrho \leqq D + D \operatorname{cosec} \frac{\pi}{8}$ *so sind die Schalen konvexe Flachen.*

Sind nämlich $\varrho_1 = \varrho_2 = \ldots = \varrho_{2n} = \varrho \leqq \frac{d}{2}$, so enthält jede Kugel K_h im Satz XVI eine Schale der Lemniskatenfläche $L_n(\varrho)$. Sind $\varrho_1 = \varrho_2 = \ldots = \varrho_n = \varrho \geqq D$, so enthalten die Kugeln K_h und auch ihr Durchschnitt T die Kerne von $L_n(\varrho)$. T enthält keinen Punkt von $L_n(\varrho)$ im Innern. Dies führt zu einem Widerspruch, wenn die Fläche (mindestens) zwei Schalen M_h und M_k besitzt, weil es innerhalb von M_h und M_k mindestens einen Kern Q_h bzw. Q_k gibt und weil beide Schalen von der Strecke $Q_h Q_k$ geschnitten werden. Diese Strecke liegt im konvexen Körper T.

Im Falle $\varrho_1 = \varrho_2 = \ldots = \varrho_m = \varrho \leqq \frac{d}{2n}$ ist die Kugel K_1 (oder K_h) ein Teil der Körper $K\left(\frac{1}{2}\right)$ des Satzes XIII.

§ 9. Potenz und Potenzfläche bei Lemniskatenflächen.

Die Begriffe der Potenz und Potenzlinie bei Kreisen lassen sich ebenso, wie bei den Lemniskaten [4] auch auf die Lemniskatenflächen verallgemeinern.

XIX. *Wird ein Strahlenbündel durch ein Punkt* P *von einer Lemniskatenfläche* $L_n(\varrho)$ *geschnitten, so ist das Produkt der Strecken, die auf einem Strahle von* P_0 *bis an die Lemniskatenfläche reichen, von beständiger Grösse. Dieses beständige Produkt ist die Potenz des Punktes* P_0 *in bezug auf* $L_n(\varrho)$.

Die Gleichung der Lemniskatenfläche (2) hat die Form

$$G(x,y,z) \equiv F(x,y,z) - \varrho^{2n} \equiv \prod_{k=1}^{n} [(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 + (z-z_k)^2] - \varrho^{2n} = 0. \tag{17}$$

Die Potenz des Punktes $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ in bezug auf die Lemniskatenfläche bedeutet den Wert $G(x_0, y_0, z_0)$. Diese Potenz ist also Null, positiv bzw. negativ, je nachdem P_0 auf der Fläche, ausserhalb bzw. innerhalb der Fläche liegt.

---

[4] GY. SZ.-NAGY, *Merkwürdige Punktgruppen bei allgemeinen Lemniskaten*, Acta Scientiarum Math. Szeged 13 (1949), 1–13.

Ein Punkt $P = (x, y, z)$ einer Geraden g, die durch P_0 geht und die Richtungswinkel α, β, γ besitzt, hat die Koordinaten.

$$x = x_0 + r \cos\alpha\,,\ y = y_0 + r \cos\beta\,,\ z = z_0 + r \cos\gamma\,, \tag{18}$$

wo r den Abstand der Punkte P und P_0 bezeichnet.

Die Schnittpunkte der Fläche $L_n(\varrho)$ mit g genügen der Gleichung

$$G(x_0 + r \cos\alpha\,.\, y_0 + r \cos\beta\,, z_0 + r \cos\gamma) = r^{2n} + A_1 r^{n-1} + \ldots +$$
$$+ A_{n-1} r + G(x_0, y_0, z_0) = 0\,.$$

Für die Wurzeln $r_1, r_2, \ldots, r_{2n}$ dieser Gleichung besteht also die Relation

$$r_1 r_2 \ldots r_{2n} = G(x_0, y_0, z_0)\,.$$

Damit ist der Satz XIX bewiesen.

Die Punkte, die in bezug auf die Lemniskatenfläche (17) die Potenz $G(x_0, y_0, z_0)$ ($\geqq -\varrho^n$) haben, liegen auf der konzentrischen Lemniskatenfläche, deren Radius ϱ_0 der Gleichung

$$\varrho_0{}^n = \varrho^n + G(x_0, y_0, z_0)$$

genügt.

Die Punkte, die in bezug auf zwei Lemniskatenflächen $L_n(\varrho)$ und $L'_n(\varrho')$ mit der Gleichung (17) bzw.

$$G'(x, y, z) = \prod_{k=1}^{n} [(x - x'_k)^2 + (y - y'_k)^2 + (z - z'_k)^2] - \varrho'^{2n} = 0$$

gleiche Potenzen haben, liegen auf der *Potenzfläche* der zwei Lemniskatenflächen. Diese Fläche geht durch die gemeinsamen Punkte von $L_n(\varrho)$ und $L'_n(\varrho')$. Ihre Gleichung hat die Form

$$G(x, y, z) - G'(x, y, z) = 2\,x\,(y^2 + z^2)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} (x'_k - x_k) + 2\,y\,(x^2 +$$
$$+ z^2)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} (y'_k - y_k) + 2\,z\,(x^2 + y^2)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} (z'_k - z_k) + \ldots +$$
$$+ G(o, o, o) - G'(o, o, o) = 0.$$

Die Potenzfläche hat also im allgemeinen die Ordnung $2n - 1$. Sie zerfällt in eine Fläche $(2n - 2)$ — ter Ordnung und in die unendlichferne Ebene, wenn die Mittelpunkte der Flächen L_n (ϱ) und L'_n (ϱ') denselben Schwerpunkt haben.

[*Pervenuto alla Redazione il 28 aprile 1949*]