

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

GABRIELE DARBO

## **Una estensione del secondo teorema della media**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 5, n° 3-4 (1951), p. 151-160*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1951\\_3\\_5\\_3-4\\_151\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1951_3_5_3-4_151_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# UNA ESTENSIONE DEL SECONDO TEOREMA DELLA MEDIA

di GABRIELE DARBO (Pisa)

Nel corso di alcune ricerche di Calcolo delle Variazioni mi si è presentata l'opportunità di estendere il secondo teorema della media e poichè ritengo che detta estensione possa aver qualche interesse di per sè, mi sono proposto di esporla nel presente lavoro. L'estensione in proposito è data dal seguente

**TEOREMA.** — « Se  $Q(x, y)$  è una funzione definita nel rettangolo  $R \equiv \{ a \leq x \leq b; c \leq y \leq d \}$ , monotona non decrescente rispetto ad  $x$  per quasi ogni  $y$  di  $c \leq y \leq d$ , sommabile rispetto ad  $y$  in  $c \leq y \leq d$  per ogni  $x$  di  $a \leq x \leq b$ ; se  $y(x)$  è una funzione assolutamente continua in  $a \leq x \leq b$  ed è  $c \leq y(x) \leq d$  per ogni  $x$  di  $a \leq x \leq b$ ; se infine risulta quasi continua sommabile in  $a \leq x \leq b$  la funzione  $Q[x, y(x)] y'(x)$ , esiste in  $a \leq x \leq b$  almeno un punto  $\xi$  per cui vale l'uguaglianza

$$(1) \quad \int_a^b Q[x, y(x)] y'(x) dx = \int_{y(a)}^{y(\xi)} Q(a, \eta) d\eta + \int_{y(\xi)}^{y(b)} Q(b, \eta) d\eta$$

In particolare, se la  $Q(x, y)$  non dipende dalla  $y$ , posto  $Q(x, y) = Q(x)$  nella (1), si ricade nel secondo teorema della media avendosi in tal caso

$$\int_a^b Q(x) y'(x) dx = Q(a) [y(\xi) - y(a)] + Q(b) [y(b) - y(\xi)]$$

§ 1. — Prima di passare alla dimostrazione del teorema enunciato premettiamo alcune considerazioni sulla funzione assolutamente continua  $y(x)$ .

DEFINIZIONE. — Per ogni  $\alpha \in a \mid b$  indichiamo con  $E_\alpha$  l'insieme dei punti  $x$  di  $a \mid b$  per cui si ha  $y(x') \leq y(x)$  qualunque sia  $x'$  compreso tra  $\alpha$  ed  $x$  (estremi inclusi).

Dimostriamo che:

I) L'insieme  $E_\alpha$  è chiuso. A tale scopo basta dimostrare che il complementare di  $E_\alpha$  è aperto (relativamente ad  $a \mid b$ ). Infatti se  $\bar{x}$  è un punto di  $a \mid b - E_\alpha$  (e quindi distinto da  $\alpha$ ), esiste tra  $\bar{x}$  e  $\alpha$  almeno un punto  $x'$  tale che  $y(x') > y(\bar{x})$  e per la continuità di  $y(x)$  esiste pure un intorno  $\sigma$  di  $\bar{x}$  escludente  $x'$ , tale che per ogni  $x \in \sigma \cdot a \mid b$  sia ancora  $y(x') > y(x)$ . Ogni punto di  $\sigma \cdot a \mid b$  appartiene quindi ad  $a \mid b - E_\alpha$  che risulta con ciò aperto.

II) Se  $x' \text{---} x''$  è un intervallo contiguo di  $E_\alpha$  i cui estremi appartengano ad  $E_\alpha$  si ha  $y(x') = y(x'')$ . Si osservi che  $\alpha \in E_\alpha$  e quindi  $x' \text{---} x''$  si troverà tutto alla destra o tutto alla sinistra di  $\alpha$ . Se è  $\alpha \leq x' < x'' \leq b$ , sarà  $y(x') \leq y(x'')$ . Non potrà essere  $y(x') < y(x'')$ , poichè in tal caso scelto  $Y$  tale che  $y(x') < Y < y(x'')$  esisterà in  $x' \text{---} x''$  una prima soluzione dell'equazione

$$y(x) = Y$$

che dovrebbe appartenere ad  $E_\alpha$  contro l'ipotesi che  $x' \text{---} x''$  sia intervallo contiguo di  $E_\alpha$ .

Analoga è la dimostrazione nel caso che si abbia  $a \leq x' < x'' \leq \alpha$ .

DEFINIZIONE. — Per ogni  $\alpha \in a \mid b$  definiamo la funzione  $y_\alpha(x)$ , ponendo  $y_\alpha(x) = y(x)$  per tutti gli  $x$  di  $E_\alpha$  e costante in ciascun intervallo contiguo di  $E_\alpha$  in modo da risultare continua in  $a \mid b$ .

III) La funzione  $y_\alpha(x)$  è funzione assolutamente continua di  $x$  in  $a \mid b$ . Indichiamo con  $\omega(\delta)$  il modulo di assoluta continuità<sup>(1)</sup> della  $y(x)$  e sia  $x'_1 \text{---} x''_1, x'_2 \text{---} x''_2, \dots, x'_n \text{---} x''_n$  un sistema di intervalli disgiunti tali che  $\sum_{r=1}^n |x'_r - x''_r| \leq \delta$ . Chiamiamo  $\xi'_r \text{---} \xi''_r$  l'intervallo  $x'_r \text{---} x''_r$  medesimo se questo non contiene punti di  $E_\alpha$ , e, se ne contiene qualcuno, sia  $\xi'_r \text{---} \xi''_r$  il minimo subintervallo di  $x'_r \text{---} x''_r$  che contiene la parte di  $E_\alpha$  contenuta in  $x'_r \text{---} x''_r$ . In ogni caso si ha  $y_\alpha(x'_r) - y_\alpha(x''_r) = y_\alpha(\xi'_r) - y_\alpha(\xi''_r)$  per cui, se si tien conto che

$$\sum_{r=1}^n |\xi'_r - \xi''_r| \leq \sum_{r=1}^n |x'_r - x''_r| \leq \delta$$

(1) Modulo di assoluta continuità  $\omega(\delta)$  è l'estremo superiore delle somme  $\sum_r |y(x'_r) - y(x''_r)|$  relative a tutti i sistemi d'intervalli disgiunti  $x'_r \text{---} x''_r$  in numero finito contenuti in  $a \mid b$  e tali che  $\sum_r |x'_r - x''_r| \leq \delta$ .

si avrà

$$\sum_{r=1}^n |y_a(x'_r) - y_a(x''_r)| = \sum_{r=1}^n |y_a(\xi'_r) - y_a(\xi''_r)| = \sum_{r=1}^n |y(\xi'_r) - y(\xi''_r)| \leq \omega(\delta)$$

Ne segue pertanto l'assoluta continuità di  $y_a(x)$ .

IV) La funzione  $y_a(x)$  è monotona non crescente in  $a \mid \alpha$  e non decrescente in  $\alpha \mid b$ . Osserviamo che se è  $\alpha \leq x' < x'' \leq b$  e se  $x' \mid x''$  non contiene punti di  $E_a$ , segue  $y(x') = y(x'')$ ; se invece  $x' \mid x''$  contiene una parte non vuota  $\bar{E}$  di  $E_a$ , detto  $\xi' \mid \xi''$  il minimo subintervallo che contiene  $\bar{E}$ , essendo  $\xi'' \in E_a$  si ha  $y(x') = y(\xi') \leq y(\xi'') = y(x'')$ .

Procedendo analogamente se  $a \leq x' < x'' \leq \alpha$  si dimostra che  $y(x') \geq y(x'')$ .

Consideriamo ora una successione  $\{\alpha_n\}$  di punti appartenenti ad  $a \mid b$ , ovunque densa in  $a \mid b$ ; sia inoltre  $\alpha_1 = a$ ,  $\alpha_2 = b$ .

Definiamo corrispondentemente la successione d'insiemi chiusi  $\{\mathcal{E}_n\}$  ponendo

$$\mathcal{E}_n = \sum_{k=1}^n E_{\alpha_k} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Varranno le seguenti proposizioni:

V) La successione  $\{\mathcal{E}_n\}$  esaurisce tutti i punti di  $a \mid b$  in cui esiste la derivata di  $y(x)$  ed è diversa da zero. Infatti se  $\bar{x}$  è un punto di derivabilità ed è  $y'(\bar{x}) \neq 0$ , esisterà un semintorno  $\sigma$  destro o sinistro di  $\bar{x}$  in tutti i punti  $x$  del quale si abbia  $y(x) \leq y(\bar{x})$ . Se  $\alpha_n$  è un termine della successione  $\{\alpha_n\}$  che cade in  $\sigma$  (si tenga presente che la successione  $\{\alpha_n\}$  è ovunque densa in  $a \mid b$ ), sarà  $\bar{x} \in E_{\alpha_n}$  e quindi  $\bar{x} \in \mathcal{E}_n$ .

La successione d'insiemi  $\{\mathcal{E}_n\}$  è evidentemente monotona non decrescente, per cui esisterà il limite

$$\mathcal{E} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_n$$

e in tutti i punti di  $a \mid b - \mathcal{E}$  di derivabilità per  $y(x)$  (e quindi quasi dappertutto in  $a \mid b - \mathcal{E}$ ) sarà  $y'(x) = 0$ .

VI) Se  $x' \mid x''$  è un intervallo contiguo di  $\mathcal{E}_n$  i cui estremi appartengono ad  $\mathcal{E}_n$ , è  $y(x') = y(x'')$ .

Infatti supponiamo, se è possibile,  $y(x') < y(x'')$ ; essendo  $x' \in \mathcal{E}_n$ , dovrà esistere un indice  $r \leq n$  tale che  $x' \in E_{\alpha_r}$ . In questo caso dovrà essere  $\alpha_r \leq x' < x''$ , altrimenti, non potendo essere  $x' < \alpha_r < x''$ , dovrebbe aversi  $x' < x'' \leq \alpha_r$  e poichè è  $x' \in E_{\alpha_r}$  ne seguirebbe  $y(x') \geq y(x'')$  in contraddizione coll'ipotesi. Sia quindi  $\alpha_r \leq x' < x''$ ; se  $Y$  è un numero tale che  $y(x') < Y < y(x'')$  e se si considera la soluzione  $\bar{x}$  più a sinistra tra quelle

dell'equazione  $y(x) = Y$  che si trovano in  $x' \text{---} x''$  si avrebbe  $y(x) \leq y(\bar{x})$  per ogni  $x \in \alpha_r \text{---} \bar{x}$  e quindi  $\bar{x} \in E_{\alpha_r} \subset \mathcal{E}_n$  contrariamente all'ipotesi che  $x' \text{---} x''$  sia intervallo contiguo di  $\mathcal{E}_n$ .

Considerazioni analoghe portano ad escludere che sia  $y(x') > y(x'')$  per cui dovrà essere  $y(x') = y(x'')$ .

VII) L'insieme  $\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n$  è vuoto, se  $\alpha_{n+1} \in \mathcal{E}_n$ ; se  $\alpha_{n+1}$  cade in un intervallo contiguo di  $\mathcal{E}_n$ , chiamato questo  $x'_n \text{---} x''_n$ , si ha per ogni  $n \geq 2$

$$\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n = E_{\alpha_{n+1}} \cdot x'_n \text{---} x''_n.$$

Sia  $\alpha_{n+1} \in \mathcal{E}_n$ ; esisterà un  $s \leq n$  per il quale è  $\alpha_{n+1} \in E_{\alpha_s}$ . Se  $\bar{x}$  è un punto qualunque di  $E_{\alpha_{n+2}}$ , per ogni  $x$  compreso tra  $\alpha_{n+1}$  e  $\bar{x}$  e  $y(\bar{x}) \leq y(x)$  e per ogni  $x$  compreso tra  $\alpha_s$  e  $\alpha_{n+1}$  è  $y(x) \leq y(\alpha_{n+1}) \leq y(\bar{x})$ . Di conseguenza sarà  $y(x) \leq y(\bar{x})$  per ogni  $x$  tra  $\alpha_s$  e  $\bar{x}$ , e quindi  $\bar{x} \in E_{\alpha_s} \subset \mathcal{E}_n$ . Ogni punto di  $E_{\alpha_{n+1}}$  è già contenuto perciò in  $\mathcal{E}_n$ ; sarà dunque  $\mathcal{E}_{n+1} = \mathcal{E}_n$  ossia  $\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n = 0$ .

Supponiamo ora che  $\alpha_{n+1}$  cada in un intervallo contiguo  $x'_n \text{---} x''_n$  di  $\mathcal{E}_n$ ; se  $\bar{x}$  è un punto di  $E_{\alpha_{n+1}}$  ed è  $\bar{x} \leq x' < x''$ , poichè  $n \geq 2$ , sarà  $x'_n \in \mathcal{E}_n$  e anche  $x'_n \in E_{\alpha_i}$  per un certo  $i \leq n$ . Avremo allora

$$y(x'_n) \leq y(\bar{x})$$

$$y(x) \leq y(\bar{x}) \text{ per ogni } x \text{ compreso tra } \bar{x} \text{ e } \alpha_{n+1}$$

$$y(x) \leq y(x'_n) \leq y(\bar{x}) \text{ per ogni } x \text{ compreso tra } \alpha_i \text{ e } x'_n$$

e quindi per tutti gli  $x$  compresi tra  $\alpha_i$  e  $\bar{x}$  sarà  $y(x) \leq y(\bar{x})$ , vale a dire  $\bar{x} \in E_{\alpha_i} \subset \mathcal{E}_n$ .

Analogamente, se  $\bar{x} \in E_{\alpha_{n+1}}$  ed è  $x'_n < x''_n \leq \bar{x}$ , dovendo essere  $x''_n \in E_{\alpha_j}$  per un certo  $j \leq n$ , con le medesime considerazioni si dimostra che deve essere  $\bar{x} \in E_{\alpha_j} \subset \mathcal{E}_n$ .

Dunque ogni  $\bar{x}$  di  $E_{\alpha_{n+1}}$  non appartenente a  $x'_n \text{---} x''_n$ , è già contenuto in  $\mathcal{E}_n$ ; ne segue che

$$\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n = E_{\alpha_{n+1}} \cdot x'_n \text{---} x''_n$$

VIII) Se  $n \geq 2$ , si ha:

$$y_{\alpha_{n+1}}(x'_n) = y_{\alpha_{n+1}}(x''_n).$$

Nell'intervallo  $x'_n \text{---} x''_n$  la  $y(x)$  è inferiore al valore assunto agli estremi. Infatti, in caso contrario la  $y(x)$  assumerebbe il suo massimo valore relativo all'intervallo  $x'_n \text{---} x''_n$  in punto  $x^*$  ad esso interno; scelto allora un  $r \leq n$  tale che  $x'_n \in E_{\alpha_r}$ , si avrebbe per ogni  $x$  tra  $\alpha_r$  e  $x'_n$ ,  $y(x) \leq y(x'_n) \leq y(x^*)$  e per ogni  $x$  compreso tra  $x'_n$  e  $x^*$ ,  $y(x) \leq y(x^*)$ ; ma allora essendo verificata quest'ultima per ogni  $x$  compreso tra  $\alpha_r$  e  $x^*$ , dovrebbe essere  $x^* \in E_{\alpha_r} \subset \mathcal{E}_n$  contrariamente al fatto che  $x'_n \text{---} x''_n$  è un intervallo contiguo di  $\mathcal{E}_n$ .

Varrà quindi la disuguaglianza  $y(x) \leq y(x'_n) \leq y(x''_n)$  per tutti gli  $x$  di  $x'_n \text{---} \alpha_{n+1}$  e di  $\alpha_{n+1} \text{---} x''_n$ ; ne segue che  $x'_n \in E_{\alpha_{n+1}}$  e  $x''_n \in E_{\alpha_{n+1}}$ . Di conseguenza sarà

$$y_{\alpha_{n+1}}(x'_n) = y(x'_n) = y(x''_n) = y_{\alpha_{n+1}}(x''_n).$$

§ 2. — Nelle ipotesi fatte sin dall'inizio di questa nota, sulle funzioni  $Q(x, y)$  e  $y(x)$  dimostriamo le seguenti limitazioni (2)

$$(2) \quad \int_{y(a)}^{y_{\max}} Q(a, \eta) d\eta + \int_{y_{\max}}^{y(b)} Q(b, \eta) d\eta \leq \int_a^b Q[x, y(x)] y'(x) dx \leq \int_{y(a)}^{y_{\min}} Q(a, \eta) d\eta + \int_{y_{\min}}^{y(b)} Q(b, \eta) d\eta.$$

Supponiamo dapprima che la  $Q(x, y)$  sia monotona non decrescente rispetto ad  $x$  in  $a \text{---} b$  per tutti gli  $y$  di  $c \text{---} d$  anzichè per quasi tutti. In seguito toglieremo questa restrizione.

Per proprietà note della successione d'insiemi  $\{\mathcal{E}_n\}$  potremo scrivere

$$\int_a^b Q[x, y(x)] y'(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{E}_n} Q[x, y(x)] y'(x) dx$$

ossia

$$(3) \quad \int_a^b Q[x, y(x)] y'(x) dx = \int_{\mathcal{E}_2} Q[x, y(x)] y'(x) dx + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n} Q[x, y(x)] y'(x) dx.$$

(2) Qui e nel seguito useremo le notazioni  $y_{\max} = \max_{a \leq x \leq b} y(x)$  e  $y_{\min} = \min_{a \leq x \leq b} y(x)$ .

Consideriamo la serie a secondo membro della (3) e dimostriamo che ogni suo termine è positivo o nullo. È evidentemente nullo ogni termine il cui indice  $n$  è tale che  $\alpha_{n+1} \in \mathcal{E}_n$  poichè in tal caso è  $\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n = 0$  [§ 1, VII]. Se  $\alpha_{n+1}$  cade in un intervallo contiguo  $x'_n - x''_n$  di  $\mathcal{E}_n$  abbiamo [§ 1, VII],  $\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n = E_{\alpha_{n+1}} x'_n - x''_n$  e quindi

$$(4) \quad \int_{\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n} Q[x, y(x)] y'(x) dx = \int_{x'_n}^{x''_n} Q[x, y_{\alpha_{n+1}}(x)] y'_{\alpha_{n+1}}(x) dx$$

ciò perchè è  $y(x) = y_{\alpha_{n+1}}(x)$  in tutto  $E_{\alpha_{n+1}}$ ;  $y'(x) = y'_{\alpha_{n+1}}(x)$ , in quasi tutto  $E_{\alpha_{n+1}}$  e  $y'_{\alpha_{n+1}}(x) = 0$  in tutto il complementare di  $E_{\alpha_{n+1}}$ .

Ricordando le ipotesi fatte sulla  $Q(x, y)$ , si ha

$$(5) \quad \begin{aligned} Q[x, y_{\alpha_{n+1}}(x)] &\leq Q[\alpha_{n+1}, y_{\alpha_{n+1}}(x)] \quad \text{per } x'_n \leq x \leq \alpha_{n+1} \\ Q[x, y_{\alpha_{n+1}}(x)] &\geq Q[\alpha_{n+1}, y_{\alpha_{n+1}}(x)] \quad \text{per } \alpha_{n+1} \leq x \leq x''_n \end{aligned}$$

inoltre essendo  $y'_{\alpha_{n+1}}(x) \leq 0$  quasi ovunque a sinistra di  $\alpha_{n+1}$  e  $y'_{\alpha_{n+1}}(x) \geq 0$  quasi ovunque a destra di  $\alpha_{n+1}$ , assieme alla (5) si ha:

$$(6) \quad Q[x, y_{\alpha_{n+1}}(x)] y'_{\alpha_{n+1}}(x) \geq Q[\alpha_{n+1}, y_{\alpha_{n+1}}(x)] y'_{\alpha_{n+1}}(x)$$

quasi ovunque in  $x'_n - x''_n$ .

Dalle ipotesi segue ancora che  $Q(\alpha_{n+1}, y)$  è integrabile rispetto ad  $y$  in  $y_1 - y_2$  ed essendo la  $y_{\alpha_{n+1}}(x)$  monotona in ciascuno dei due intervalli  $x'_n - \alpha_{n+1}$  e  $\alpha_{n+1} - x''_n$  ed assolutamente continua, in virtù di un teorema noto<sup>(3)</sup> è integrabile in  $x'_n - x''_n$  pure la  $Q(\alpha_{n+1}, y_{\alpha_{n+1}}(x)) y'_{\alpha_{n+1}}(x)$  ed è per la (4) e per la (6)

$$(7) \quad \begin{aligned} \int_{\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n} Q[x, y(x)] y'(x) dx &\geq \int_{x'_n}^{x''_n} Q[\alpha_{n+1}, y_{\alpha_{n+1}}(x)] y'_{\alpha_{n+1}}(x) dx = \\ &= \int_{y_{\alpha_{n+1}}(x'_n)}^{y_{\alpha_{n+1}}(x''_n)} Q(\alpha_{n+1}, \eta) d\eta. \end{aligned}$$

<sup>(3)</sup> Cfr. H. LEBESGUE: *Sur les integrales singulières*, Ann. de Toulouse (3) I (1909), (pp. 25-117) pag. 44.

Tenendo presente che per  $n \geq 2$  è  $y_{a_{n+1}}(x'_n) = y_{a_{n+1}}(x''_n)$ , l'integrale all'ultimo membro della (7) è nullo, ne risulta

$$(8) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \int_{\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n} Q[x, y(x)] y'(x) dx \geq 0.$$

In conseguenza della (3) e della (8) si ha la disuguaglianza

$$(9) \quad \int_a^b Q[x, y(x)] y'(x) dx \geq \int_{\varepsilon_2}^b Q(x, y(x)) y'(x) dx.$$

Osserviamo ora che  $\varepsilon_2 = E_a + E_b$ ; inoltre per ogni  $x \in E_a E_b$  è  $y(x) = y_{max}$  e quindi quasi ovunque in  $E_a \cdot E_b$  è  $y'(x) = 0$  per cui si potrà scrivere

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon_2} Q[x, y(x)] y'(x) dx &= \int_{E_a} Q(x, y(x)) y'(x) dx + \int_{E_b} Q(x, y(x)) y'(x) dx = \\ &= \int_a^b Q[x, y_a(x)] y'_a(x) dx + \int_a^b Q[x, y_b(x)] y'_b(x) dx. \end{aligned}$$

Essendo  $Q(x, y)$  non decrescente rispetto ad  $x$ ,  $y_a(x)$  non decrescente e  $y_b(x)$  non crescente, si vede facilmente che è

$$(10) \quad \begin{aligned} \int_{\varepsilon_2} Q[x, y(x)] y'(x) dx &\geq \int_a^b Q[a, y_a(x)] y'_a(x) dx + \int_a^b Q[b, y_b(x)] y'_b(x) dx = \\ &= \int_{y_a(a)}^{y_a(b)} Q(a, \eta) d\eta + \int_{y_b(a)}^{y_b(b)} Q(b, \eta) d\eta. \end{aligned}$$

Dalle (9) e (10) ricaviamo infine, essendo

$$y_a(a) = y(a); \quad y_b(b) = y(b), \quad y_a(b) = y_b(a) = y_{max}$$

$$(11) \quad \int_a^b Q[x, y(x)] y'(x) dx \geq \int_{y(a)}^{y_{max}} Q(a, \eta) d\eta + \int_{y_{max}}^{y(b)} Q(b, \eta) d\eta$$



che è la prima delle disuguaglianze (2), che si volevano dimostrare. Per ottenere la seconda, possiamo ricondurci alla (11) applicando questa alla funzione  $\bar{Q}(x, y) = Q(x, -y)$  definita nel rettangolo  $\bar{R} \equiv \{a \leq x \leq b; -y_2 \leq y \leq -y_1\}$  ed ivi monotona non decrescente rispetto alla  $x$  per ogni  $y \in -y_2 \leq y \leq -y_1$  e considerando al posto della  $y(x)$  la funzione  $\bar{y}(x) = -y(x)$ . Ricordando che  $\bar{y}_{max} = -y_{min}$ , con semplici passaggi formali otteniamo

$$(12) \quad \int_a^b Q[x, y(x)] y'(x) dx \leq \int_{y(\alpha)}^{y_{min}} Q(a, \eta) d\eta + \int_{y_{min}}^{y(b)} Q(b, \eta) d\eta.$$

Rimane con ciò dimostrata la (2).

Vogliamo ora far vedere che le disuguaglianze (2) valgono ancora qualora si sostituisca la condizione

i) «  $Q(x, y)$  sia monotona non decrescente rispetto ad  $x$  in  $a \leq x \leq b$  per ogni  $y \in y_1 \leq y \leq y_2$  », con la seguente meno restrittiva:

ii) «  $Q(x, y)$  sia monotona non decrescente rispetto ad  $x$  in  $a \leq x \leq b$  per quasi ogni  $y \in y_1 \leq y \leq y_2$  ».

A tale scopo osserviamo che vale il seguente lemma:

« Se  $y(x)$  è una funzione assolutamente continua in  $a \leq x \leq b$  ed è ivi  $y_1 \leq y(x) \leq y_2$ , e se  $H$  è un insieme di misura nulla contenuto in  $y_1 \leq y \leq y_2$ , l'insieme  $H^*$  dei punti  $x \in a \leq x \leq b$  per cui è  $y(x) \in H$  è tale che in esso, quasi ovunque è  $y'(x) = 0$  (4) ».

Da ciò segue che l'integrale

$$I = \int_a^b Q[x, y(x)] y'(x) dx$$

(4) Cfr. E. J. SHANE: Integration, Princeton, (1947) pag. 213.

Per comodità del lettore riportiamo la breve dimostrazione:

Sia  $F_H(y)$  la funzione caratteristica dell'insieme  $H$ . Poichè  $\text{mis } H = 0$ , per ogni  $x \in a \leq x \leq b$  si avrà identicamente

$$0 = \int_{y(\alpha)}^{y(x)} F_H(y) dy = \int_a^x F_H[y(x)] y'(x) dx;$$

ne segue che  $F_H[y(x)] y'(x) = 0$ , per quasi ogni  $x \in a \leq x \leq b$ . In particolare, per quasi ogni  $x \in H$  si dovrà avere  $1 \cdot y'(x) = 0$ , il che dimostra l'asserto.

non varia se si altera il valore di  $Q(x, y)$  in un insieme di punti di  $R$  la cui proiezione  $H$  sull'asse delle  $y$  è di misura nulla. Infatti è quasi ovunque in  $H^*$  per il lemma precedente  $y'(x) = 0$  e quindi la  $Q(x, y(x))y'(x)$  rimane inalterata quasi ovunque in  $a \text{---} b$ .

Ne segue che se la  $Q(x, y)$  soddisfa la condizione i), potremo, senza alterare il valore di  $I$ , renderla tale da soddisfare la i), modificandola (ponendo ad es.  $Q(x, y) = 0$ ) in un insieme di punti del tipo  $\{y \in H; a \leq x \leq b\}$  con  $\text{mis } H = 0$ . Notando infine che con tale modificazione della  $Q(x, y)$  rimangono inalterati pure i secondi membri delle disuguaglianze (11) e (12), queste seguiranno a valere nelle attuali ipotesi.

b) Possiamo dedurre ora dalle (11) e (12) l'identità (1) per un opportuno  $\xi$  appartenente ad  $a \text{---} b$ .

Poniamo

$$(13) \quad \Phi(y) = \int_{y(a)}^y Q(a, \eta) d\eta + \int_y^{y(b)} Q(b, \eta) d\eta; \quad y_1 \leq y \leq y_2.$$

La funzione  $\Phi[y(x)]$ , è evidentemente continua per  $a \leq x \leq b$  ed assume in due punti di  $a \text{---} b$  i valori  $\Phi(y_{max})$  e  $\Phi(y_{min})$ . Essendo per le (11) e (12)

$$\Phi(y_{max}) \leq \int_a^b Q[x, y(x)] y'(x) dx \leq \Phi(y_{min})$$

dovrà esistere in  $a \text{---} b$  almeno un punto  $\xi$  tale che

$$\Phi[y(\xi)] = \int_a^b Q[x, y(x)] y'(x) dx$$

ossia, tenuto conto della (13)

$$\int_a^b Q[x, y(x)] y'(x) dx = \int_{y(a)}^{y(\xi)} Q(a, \eta) d\eta + \int_{y(\xi)}^{y(b)} Q(b, \eta) d\eta$$

e con ciò il teorema è dimostrato.

Notiamo ancora che quest'ultima uguaglianza, data l'indeterminatezza della  $\xi$  in  $a \text{---} b$ , è equivalente alle disuguaglianze (11) e (12) poichè è

quasi ovunque in  $y_1 \text{---} y_2$

$$\Phi'(y) = Q(a, y) - Q(b, y) \leq 0$$

e quindi  $\Phi(y)$  è non crescente in  $y_1 \text{---} y_2$ . Il massimo e il minimo valore di  $\Phi[y(x)]$  in  $a \text{---} b$ , valgono appunto  $\Phi(y_{min})$  e  $\Phi(y_{max})$  rispettivamente. Ne segue che

$$\Phi(y_{max}) \leq \Phi[y(\xi)] \leq \Phi(y_{min})$$

ovvero le (11) e (12).

[*Pervenuta in Redazione il 1 Giugno 1951*]