ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

EMILIO BAIADA

Su una classe particolare di problemi di calcolo delle variazioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 6, nº 3-4 (1952), p. 173-186

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1952_3_6_3-4_173_0>

SU UNA CLASSE PARTICOLARE DI PROBLEMI DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI

di EMILIO BAIADA (Pisa)

1. — Il problema dell'esistenza del minimo assoluto di un integrale del Calcolo delle Variazioni su una classe di curve quando esso sia scritto in forma ordinaria, presenta, rispetto all'analogo problema in cui, però, l'integrale e le curve siano in forma parametrica, vari inconvenienti che rendono la trattazione di questo problema più elaborata e con risultati meno semplici.

Alcuni di questi inconvenienti sono dovuti al fatto che la classe delle curve ammissibili non è sufficientemente compatta, e più precisamente, che una curva d'accumulazione di curve continue in forma ordinaria può non essere più scrivibile in forma ordinaria.

Faremo vedere che questo caso non si può presentare, quanto ci si riferisce a curve d'accumulazione di successioni minimizzanti per una vasta classe di problemi e precisamente quelli in cui la funzione integranda non dipende da y.

Non solo, ma se, inoltre la funzione integranda non dipende da x, si può ottenere una curva minimante con la proprietà di essere formata da, al più, tre archi monotoni in senso lato; due, estremi, crescenti (o decrescenti), e uno, intermedio, decrescente (o crescente).

Questa proprietà della minimante può essere di grande aiuto in alcuni problemi concreti, come per esempio in un importante problema isoperimetrico degli scafi.

È da osservare come i due risultati sopra accennati si raggiungono mediante semplicissime costruzioni di carattere geometrico.

2. — Sia $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, una funzione definita e continua nell'intervallo chiuso (a, b). Indichiamo con m e M il minimo e il massimo di $f(x)$ in (a, b). Supponiamo $f(a) < f(b)$ e consideriamo gli intervalli $[m, f(a)]$, $[f(a), f(b)]$, $[f(b), M]$. Se $f(a) > f(b)$ considereremo gli intervalli $[m, f(b)]$, $[f(b), f(a)]$, $[f(a), M]$. Va sottinteso che è possibile che alcuni o tutti

questi intervalli possono ridursi a un punto solo, e di conseguenza sarà inutile la loro considerazione.

Consideriamo quelli fra questi intervalli che non si riducono a un punto e suddividiamoli in 2^n parti uguali (n intero e positivo) e consideriamo le strisce parallele all'asse delle x che corrispondono a queste suddivisioni, esse avranno equazioni:

$$m + \frac{r}{2^n}[f(a) - m] \leq y \leq m + \frac{r+1}{2^n}[f(a) - m];$$

$$f(a) + \frac{r}{2^n}[f(b) - f(a)] \leq y \leq f(a) + \frac{r+1}{2^n}[f(b) - f(a)],$$

$$f(b) + \frac{r}{2^n}[M - f(b)] \leq y \leq f(b) + \frac{r+1}{2^n}[M - f(b)],$$

nel primo caso, e analoghe nell'altro caso. Le rette di equazioni:

$$y = m + \frac{r}{2^n}[f(a) - m]; \qquad y = f(a) + \frac{r}{2^n}[f(b) - f(a)];$$

$$y = f(b) + \frac{r}{2^n}[M - f(b)],$$

o analoghe nell'altro caso, si chiameranno il *bordo inferiore* o *primo bordo* della r-esima striscia, rispettivamente della *prima, seconda* o *terza parte.* Le rette di equazioni:

$$y = m + \frac{r+1}{2^n}[f(a) - m]; \qquad y = f(a) + \frac{r+1}{2^n}[f(b) - f(a)];$$

$$y = f(b) + \frac{r+1}{2^n}[M - f(b)],$$

o analoghe nell'altro caso, si chiameranno il *bordo superiore* o *secondo bordo* della r-esima striscia, rispettivamente della *prima, seconda* e *terza parte.*

Si orienti la curva secondo le x crescenti.

3. DEFINIZIONE. — *Diciamo che l'arco della curva* $y = f(x)$, $x_1 \leq x \leq x_2$, *va dal valore* $f(x_1)$ *al valore* $f(x_2)$, *se per nessun valore* $x_1 < x < x_2$ *sia:*

$$f(x_1) = f(x), \quad o \quad f(x_2) = f(x).$$

Consideriamo quegli archi della curva $y = f(x)$ che appartengono alla generica r-esima striscia di una qualunque parte, essi si distribuiscono nelle seguenti quattro categorie:

1^0. *archi che vanno dal bordo inferiore al bordo superiore.*

2^0. *archi che vanno dal bordo superiore al bordo inferiore.*

3^0. *archi che hanno il primo estremo e il secondo estremo sul bordo superiore e non contengono archi delle categorie* 1 *e* 2.

4^0. *archi che hanno il primo e il secondo estremo sul bordo inferiore e non contengono archi delle categorie* 1 *e* 2.

La classificazione precedente è giustificata dai due teoremi seguenti.

TEOREMA 1. — *Se un arco ha il primo estremo su un bordo e il secondo estremo sull'altro bordo di una stessa striscia, esso contiene almeno un arco delle categorie* 1 *o* 2.

Supponiamo per fissare le idee che il primo estremo P dell'arco PQ sia sul bordo inferiore d'una striscia e il secondo estremo Q sia sul suo secondo bordo. Indichiamo con x_p l'ascissa di P e con x_q quella di Q, e supponiamo $x_p < x_q$.

Indichiamo con x_m il minore dei valori di x per cui $f(x)$ assume un valore uguale all'ordinata del bordo superiore, la sua esistenza è ovvia in virtù della continuità di $f(x)$ e dal fatto che il secondo estremo sia sul bordo superiore. È allora

$$f(x) < f(x_m) \quad \text{per ogni} \quad x < x_m .$$

Indichiamo con x_M il maggiore dei valori di x tali che:

$$x \leq x_M$$

e $f(x)$ uguale all'ordinata del bordo inferiore. È chiaro che $x_M < x_m$. È allora se $x_M < x < x_m$:

$$f(x) > f(x_M) .$$

L'arco $[x_M, f(x_M)]$, $[x_m, f(x_m)]$ è allora di prima categoria. Analogamente negli altri casi.

TEOREMA. 2. — *Gli archi di prima e di seconda categoria sono in numero finito.*

Infatti se gli archi delle categorie 1 e 2 fossero infiniti le ascisse del primo e del secondo punto terminale di questi archi dovrebbero accumularsi attorno a un punto x_0 di (a, b). Di conseguenza questo punto non potrebbe essere punto di continuità per la funzione $f(x)$, in quanto che l'oscillazione della funzione in questo punto sarebbe non minore di una quantità uguale all'ampiezza della striscia in considerazione. Le striscie stesse essendo in numero finito il teorema segue.

L'operazione indicata nella dimostrazione del teorema 1, si può per tanto eseguire soltanto un numero finito di volte, dopo le quali non potranno più esistere archi che hanno il primo estremo su un bordo e secondo estremo sull'altro bordo d'una stessa striscia, gli archi rimanenti dovranno allora necessariamente appartenere alle categorie 3 e 4.

4. — Sarà utile pure il seguente

TEOREMA 3. — *Se vi sono infiniti archi della categoria* 3 (oppure 4), *appartenenti ad una stessa striscia, le cui ascisse si accumulano attorno a un valore* x_0, *è :*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \quad \text{(oppure } \beta)$$

dove α (oppure β) *è l'ordinata del bordo inferiore* (oppure superiore).

La proposizione risulta ovvia se si ricorda la continuità della $f(x)$ e se si riflette che vi sono infiniti valori della x accumulantesi attorno a x_0, in cui la funzione ha un valore uguale a α (o a β).

Onde alleggerire l'esposizione introduciamo le seguenti definizioni.

DEFINIZIONE I. — *Gli archi della* 1ª *e della* 2ª *categoria saranno chiamati tratti.*

DEFINIZIONE II. — *L'ascissa del primo punto terminale d'un arco delle categorie* 1, 2, 3, 4 *sarà chiamata la prima ascissa.*

DEFINIZIONE III. — *L'ascissa del secondo punto terminale d'un arco delle categorie* 1, 2, 3, 4 *sarà chiamata la seconda ascissa.*

DEFINIZIONE IV. — *Tra i tratti d'una stessa striscia quello che ha minore prima ascissa sarà chiamato il primo tratto, quello che ha maggiore seconda ascissa sarà chiamato l'ultimo tratto.*

Questa definizione ha senso in quanto i tratti sono in numero finito.

Dimostriamo adesso un certo numero di lemmi utili nel seguito.

LEMMA 1. — *Se in una striscia il primo tratto è di prima categoria e l'ultimo è di seconda categoria, i tratti sono in numero pari e si presentano sulla curva alternativamente di prima e di seconda categoria.*

Seguendo il punto P sulla curva mentre la x cresce, subito dopo il tratto di prima categoria, è solo possibile, supponendo di non ammettere l'eventualità di incontrare un tratto di seconda categoria, di avere nella striscia, un certo numero, o anche un infinità numerabile di archi della categoria 3 solamente. Ora è chiaro che il punto P, seguendo questi archi di categoria 3, se questi sono in numero finito, si ritrova sul bordo superiore, e se sono infiniti, esso tende a un valore limite uguale al bordo superiore, in virtù del teorema 3. In entrambi i casi la situazione proibisce di incontrare un tratto di prima categoria, la sola quindi che rimane è quella di incontrare un tratto di seconda categoria.

Se questo tratto non è l'ultimo si può ripetere il ragionamento e dimostrare che deve necessariamente seguire un tratto di prima categoria e così via.

LEMMA 2. — *Se in una striscia il primo tratto è di seconda categoria e l'ultimo tratto è di prima categoria, i tratti sono in numero pari ed alternativamente di prima e di seconda categoria mentre la x cresce.*

LEMMA 3. — *Se in una striscia il primo tratto è di prima categoria e l'ultimo è pure di prima categoria, i tratti sono in numero dispari, ed alternativamente di prima e seconda categoria mentre la x cresce.*

LEMMA 4. — *Se in una striscia il primo tratto è di seconda categoria e l'ultimo tratto è di seconda categoria pure, i tratti sono in numero dispari ed alternativamente di seconda e di prima categoria mentre la x cresce.*

I lemmi 2, 3, 4 hanno una dimostrazione perfettamente analoga a quella data per il lemma 1.

5. — Mentre i lemmi 1, 2, 3, 4 sono lemmi di classificazione delle varie striscie, quelli che adesso seguono metteranno in relazione strisce contigue: essi escluderanno accoppiamenti impossibili.

LEMMA A. — *Se in una striscia il primo tratto è di categoria* 1, *nella striscia immediatamente superiore, se esistono dei tratti, il primo è pure di categoria* 1.

Infatti, se x_1 è la prima ascissa del tratto di categoria 1, e x_2 è la seconda ascissa, per la definizione di primo tratto

$$\text{se } x < x_2 \quad \text{è} \quad f(x) < f(x_2),$$

perchè se esistesse un $\bar{x} < x_2$, tale che $f(\bar{x}) = f(x_2)$, dovrebbe essere $\bar{x} < x_1$, a causa della definizione di tratto. Esisterebbe così un arco precedente il tratto che ha un estremo su un bordo e l'altro estremo sull'altro bordo, per il teorema 1, esisterebbe così un tratto, che non potrebbe che essere di seconda categoria e che precede quello ammesso nell'ipotesi essere il primo. Se vi sono tratti nella striscia immediatamente superiore, vorrà dire che esiste un arco della curva che ha un estremo sul bordo inferiore di questa striscia (e possiamo prendere per esso il secondo punto terminale del primo tratto della striscia inferiore) e un altro estremo sul bordo superiore. In virtù della relazione dimostrata, il primo tratto di prima categoria che è contenuto in quest'arco, è necessariamente il primo.

LEMMA B. — *Se in una striscia l'ultimo tratto è di categoria* 2, *nella striscia immediatamente superiore, se esistono tratti, l'ultimo è pure di categoria* 2.

LEMMA C. — *Se in una striscia il primo tratto è di categoria* 2, *nella striscia immediatamente inferiore, se esistono tratti, il primo è pure di categoria* 2.

LEMMA D. — *Se in una striscia l'ultimo tratto è di categoria* 1, *nella striscia immediatamente inferiore, se esistono tratti, l'ultimo è pure di categoria* 1.

I lemmi B, C, D hanno dimostrazione perfettamente analoga a quella del lemma A.

Da questi lemmi discendono i seguenti corollari.

COROLLARIO 1. — *Se in una striscia sono verificate le ipotesi del lemma* 1, *nella striscia immediatamente superiore valgono pure le stesse ipotesi, oppure non esistono tratti di nessun tipo.*

Che il primo tratto nella striscia immediatamente superiore sia di categoria 1, ammessa l'esistenza di almeno un tratto, è conseguenza del lemma A. Di conseguenza esiste tutto un arco della curva che ha primo estremo sul bordo superiore di questa striscia (basta prendere il secondo estremo del tratto di prima categoria di cui si è vista l'esistenza) e secondo estremo sul bordo inferiore (basta prender il primo estremo del tratto di seconda categoria di cui è ammessa l'esistenza nella striscia inferiore), per il teorema 1, esiste per tanto un tratto di categoria 2 in questa striscia e così per il lemma B discende il corollario.

COROLLARIO 2. — *Se in una striscia sono verificate le ipotesi del lemma* 2, *nella striscia immediatamente inferiore, o valgono ancora le stesse ipotesi, oppure non esistono tratti di nessun tipo.*

Questo corollario, analogo al precedente, è una consequenza dei lemmi D e C, e si deduce da essi come abbiamo dedotto il corollario 1 dai lemmi A e B.

COROLLARIO 3. — *Se in una striscia valgono le ipotesi del lemma* 3, *nella striscia immediatamente superiore si possono avere soltanto i casi seguenti:*

1. *valgono ancora le ipotesi del lemma* 3,
2. *valgono le ipotesi del lemma* 1,
3. *non vi sono tratti.*

Questo corollario è una immediata consequenza del lemma A.

COROLLARIO 4. — *Se in una striscia valgono le ipotesi del lemma* 4, *nella striscia immediatamente inferiore si possono avere soltanto i casi seguenti:*

1. *valgono ancora le ipotesi del lemma* 4,
2. *valgono le ipotesi del lemma* 2,
3. *non vi sono tratti.*

Questo corollario è una consequenza del lemma C.

6. — In virtù dei corollari 1 e 2, le strisce che dividono l'intervallo (m, M) si ripartiscono in, al più, tre tipi adiacenti, le strisce di medesimo tipo formano delle *zone*, che qui sotto elenchiamo, progredendo dal basso verso l'alto:

1ª Zona — le strisce sono tutte del tipo per cui valgono le ipotesi del lemma 2.

2ª Zona — le strisce sono dei tipi per cui valgono le ipotesi dei lemmi 3 o 4.

3ª Zona — le strisce sono tutte del tipo per cui valgono le ipotesi del lemma 1.

Rimane sempre inteso che una (o anche due) di queste zone possa eventualmente mancare, è facile costruire degli esempi in cui questi casi effettivamente si presentano.

Osserviamo che tanto nella prima che nella terza zona le strisce hanno un numero pari di tratti e nella seconda zona le strisce hanno tutte un numero dispari di tratti. Inoltre questa seconda zona deve essere di una struttura uniforme, in altre parole in essa tutte le strisce devono essere tali che per esse valgono le ipotesi del lemma 3 oppure quelle del lemma 4, l'un caso escludendo l'altro. Infatti, se per esempio in una striscia appartenente alla seconda zona sia il primo che l'ultimo tratto sono di prima categoria, in virtù del lemma A, il primo tratto della striscia immediatamente superiore è di prima categoria, mentre che in virtù del lemma B nella striscia immediatamente inferiore l'ultimo tratto deve essere di prima categoria; in entrambi i casi viene esclusa la possibilità che le strisce attigue siano tali che per esse valgano le ipotesi del lemma 4. Analogo risultato vale nell'altro caso.

7. L'OPERAZIONE A. — *Si dirà che compieremo l'operazione A sull'arco* (x_1, x_2) *della curva* $y = f(x)$ *se imprimiamo una opportuna traslazione rigida dell'arco stesso parallelamente all'asse* x.

LEMMA 5. — *Mediante un infinità al più numerabile di operazioni A gli archi di categoria* 3, (4), *appartenenti ad una stessa striscia possono venire a formare un solo arco continuo, ancora della categoria* 3, (4), *sempre appartenente alla stessa striscia.*

Ricordiamo che gli archi sono al più un infinità numerabile. Consideriamo quegli archi di categoria 3 di una data striscia che si proiettano sull'asse delle x su un intervallo di ampiezza compreso tra $(b-a)$ e $\frac{1}{2}(b-a)$. Essi sono al più due, e nel caso che siano due essi formano già un arco che risponde al lemma. Consideriamo gli archi di categoria 3 che si proiettano sull'asse delle x su intervalli di ampiezza compresi tra $\frac{1}{2}(b-a)$ e $\frac{b-a}{2^2}$ essi sono al più quattro, si possono allora numerare e si portano adoperando l'operazione A, consecutivamente, in modo che il primo estremo di ogni arco coincida con il secondo estremo dell'arco precedente, ed inoltre in modo tale che con l'arco dalla proiezione sull'asse delle x compreso tra $\frac{1}{2}(b-a)$ e $\frac{1}{2}(b-a)$, risulti formare un arco continuo. Operiamo in tal guisa indefinitamente, se ne è il caso, considerando quegli archi che si proiettano sull'asse delle x su intervalli di ampiezza compresa tra $\frac{b-a}{2^n}$ e $\frac{b-a}{2^{(n-1)}}$, $(n = 1, 2, \ldots)$. Sia $y = g(x)$, $a_1 \leq x < a_2$, l'arco così ottenuto. È chiaro che quest'arco risulta continuo per tutti gli x. Dimostriamo che esso risulta continuo anche per $x = a_2$.

È chiaro che $g(a_1)$ è uguale al valore dell'ordinata del bordo superiore della striscia in considerazione. Per dimostrare quanto affermato proveremo che:

$$\lim_{x \to a_2} g(x) = g(a_1).$$

Essendo a_2 valore di accumulazione (nel caso vi fosse soltanto un numero finito di archi di categoria 3 la proposizione è ovvia) delle ascisse agli estremi degli archi di categoria 3, vorrà dire che, comunque fissato un η positivo, si può trovare un $\bar{n}$ intero, tale che se b_r, b_{r-1}, sono le ascisse del primo e secondo estremo degli archi di categoria 3 dopo che sia stata effettuata l'operazione A, sia

$$\sum_{r=n}^{\infty} | b_{r-1} - b_r | \leq \eta \qquad \text{se } n \geq \bar{n}.$$

Ora, per la continuità uniforme di $y = f(x)$ su (a, b), comunque preso $\varepsilon > 0$, si può determinare $\eta > 0$ tale che se

$$| x_1 - x_2 | < \eta ,$$

sia

$$| f(x_1) - f(x_2) | < \varepsilon .$$

È quindi pure:

$$| g(b_{r+1}) - g(x) | < \varepsilon$$

se,

$$b_r \leq x \leq b_{r+1} \qquad \text{con} \qquad r > \bar{n} .$$

Ricordiamo a questo proposito che:

$$f(b_r) = f(b_{r+1}) = g(b_r) = g(b_{r+1})$$

è il valore dell'ordinata del bordo superiore. Pertanto, se x_1 e x_2 sono due valori dell'intervallo (a_1, a_2), avremo:

$$f(x_1) - f(x_2) = f(x_1) - f(b_r) + f(b_r) - f(b_{r+1}) + \ldots + f(b_s) - f(x_2)$$

dove $b_r, b_{r+1}, \ldots, b_s$ sono le ascisse degli estremi degli archi compresi tra x_1 e x_2, avremo allora:

$$| g(x_1) - g(x_2) | \leq | g(x_1) - g(b_r) | + | g(b_s) - g(x_2) | \leq 2\varepsilon .$$

Esiste allora, per un teorema di Cauchy il limite che ci interessa ed il valore del limite è quello dell'ordinata del bordo superiore.

Quanto è stato detto per gli archi di categoria 3 può essere ripetuto per quelli di categoria 4.

Immagineremo d'ora inanzi di avere operato come è stato indicato sopra su ognuna delle strisce di (m, M), e riferiremo all'arco così ottenuto come all'arco di categoria 3 (oppure 4) relativo alla striscia considerata.

8. — Faremo adesso la distinzione di due casi possibili, il primo essendo quello in cui la seconda zona sia tale che in essa sia verificato il lemma 4.

Consideriamo le strisce della prima zona, per essa valgono le ipotesi del lemma 2. Consideriamo la prima di queste strisce, cominciando dal basso. Sia $2m$ il numero dei suoi tratti; trasportiamo, mediante l'operazione A, i primi $2m - 1$ tratti, contando da sinistra a destra, in modo da renderli consecutivi e l'arco ottenuto sia posto consecutivamente all'eventuale arco di categoria 3 relativo a questa striscia, mentre l'eventuale arco di categoria 4 sia posto consecutivamente ad esso. Il rimanente tratto di categoria 1 sia trasportato a sufficiente distanza, per esempio $2(b - a)$ dalla posizione in cui si trova, sempre a destra. Si ottiene in definitiva, a sinistra una poligonale curvilinea continua e a destra un solo tratto.

Si prosegua nella striscia superiore operando in maniera analoga ma con l'accorgimento di fare sì che il secondo punto terminale della poligonale curvilinea ottenuta a sinistra, per questa striscia, coincida con il primo punto terminale di quella precedentemente ottenuta. Si porti invece l'ultimo tratto in modo da risultare consecutivo a quello della striscia inferiore.

Si esaurisca operando in tale maniera la prima zona.

Nelle strisce della seconda zona valgono le ipotesi del lemma 4, mediante l'operazione A e rifacendo quanto è stato fatto per la poligonale di sinistra per le strisce della zona L, si ottiene una poligonale che si può portare tutta a sinistra e in modo tale da avere il secondo punto terminale coincidente con il primo punto terminale della poligonale ottenuta a sinistra per la zona I. Si continui ad operare in tale modo sin ad esaurire le strisce della zona 2.

Se vi è una zona 3, per le strisce di essa valgono le ipotesi del lemma 1. Consideriamo la prima delle sue strisce, a partire dal basso; in essa vi siano $2n$ tratti. Portiamo gli ultimi $2n - 1$ tratti consecutivamente, il tutto sia preceduto dall'eventuale arco di categoria 3 relativo a questa striscia, e poniamo consecutivamente l'eventuale arco di categoria 4 relativo a questa striscia. Il primo tratto, che è di categoria 1, sia invece portato a sinistra e sufficientemente lontano, per esempio a distanza $2(b - a)$ dalla posizione in cui si trova.

Si prosegua per le striscie superiori in modo analogo e coerente a quanto è stato fatto sin qui.

Al termine dell'operazione abbiamo tre poligonali curvilinee, delle quali, quella più a sinistra e quella più a destra sono formate da soli tratti e le quali, inoltre, mediante l'operazione A, si possono spostare in modo da formare una sola curva continua che ha sempre lo stesso massimo M, lo stesso minimo m e che si proietta sull'asse delle x sull'intervallo (a, b).

Un risultato analogo vale pure nell'altro caso, che è, come ricordiamo, quello per cui nella seconda zona le strisce sono tali che per esse valgono le ipotesi del lemma 3. Però, in questo caso, per rimanere aderente al metodo su esposto conviene, nella zona I, portare, per ogni striscia, il primo tratto a sinistra e i rimanenti a destra, e nella zona III, portare invece l'ultimo tratto a destra e i rimanenti a sinistra. Per il rimanente il procedimento è perfettamente analogo, e così è pure il risultato.

9. — Introduciamo adesso la seguente nuova ipotesi:

La curva $y = f(x)$, *oltre che essere continua, sia rettificabile :* indicheremo con l la sua lunghezza.

Dopo avere operato come indicato nei numeri precedenti e relativamente alla suddivisione in 2^n parti eguali degli intervalli $[m, f(x)]$, $[f(a), f(b)]$, $[f(b)\, M]$, otteniamo una curva, come abbiamo visto, continua che indicheremo con $y = f_n(x)$. Essa sarà ovviamente rettificabile e di lunghezza $l_n \leq l$, ancora definita sull'intervallo (a, b) e m e M rappresentano ancora il minimo e il massimo. Essa inoltre consta di tre archi, quello a sinistra che si proietta sull'asse delle x, nell'intervallo (a, a_n), quello a destra che si proietta sull'asse delle x nell'intervallo (b_n, b) sono formati esclusivamente di tratti di categoria 1, mentre quello centrale si proietta sull'intervallo (a_n, b_n). Ognuno di questi archi è rettificabile e di lunghezza inferiore a l.

Indichiamo con a^0 il primo punto d'accumulazione dei punti sull'asse delle x di ascissa a_n. Sia $\{n_i\}$ una successione di indici tali che:

$$a_{n_i} \to a^0.$$

Sia b^0 l'ultimo punto d'accumulazione dei punti sull'asse delle x di ascissa b_{n_i}. Indichiamo con $\{n_i'\}$ una successione estratta dalla $\{n_i\}$, tale che

$$b_{n_i'} \to b^0.$$

Per un teorema noto (1), esistono,. una rappresentazione analitica simultanea:

$$x = x_{\bar{n}_i}(t), \qquad y = f_{\bar{n}_i}[x_{\bar{n}_i}(t)], \qquad 0 \leq t \leq 1,$$

$$x = x_0(t), \qquad y = y_0(t), \qquad 0 \leq t \leq 1,$$

degli archi di sinistra; una rappresentazione analitica simultanea:

$$x = x_{\bar{n}_i}(t), \qquad y = f_{\bar{n}_i}[x_{\bar{n}_i}(t)], \qquad 1 \leq t \leq 2$$

$$x = x_0(t), \qquad y = y_0(t), \qquad 1 \leq t \leq 2,$$

dell'arco centrale, e una rappresentazione analitica simultanea:

$$x = x_{\bar{n}_i}(t), \qquad y = f_{\bar{n}_i}[x_{\bar{n}_i}(t)], \qquad 2 \leq t \leq 3,$$

$$x = x_0(t), \qquad y = y_0(t), \qquad 2 \leq t \leq 3,$$

---

(1) Vedere L. TONELLI: *Fondamen di Calcolo delle Variazioni*. Vol. I, Pg. 91.

dell'arco di destra, dove la successione $\{\bar{n}_i\}$ è estratta dalla $\{n'_i\}$ e i punti corrispondenti allo stesso valore del parametro convergono uniformemente a quello della curva $x = x_0(t), y = y_0(t)$ di accumulazione che indicheremo con C_0.

Dimostriamo ora che la curva C_0 è formata da 3 archi, di cui il primo e l'ultimo sono crescenti (almeno non decrescenti, restando chiaro cosa bisogna intendere con ciò, se C_0 non è in forma ordinaria, per avere tratti paralleli all'asse y) e l'intermedio decrescente (almeno non crescente).

Osserviamo che se t_1 e t_2 sono tali che:

$$x_0(t_1) < x_0(t_2) \leq a^0,$$

esisterà, a causa della convergenza uniforme sopra ricordata, un $\bar{i}$, tale che:

$$x_{\bar{n}_i}(t_1) < x_{\bar{n}_i}(t_2), \qquad \text{qualunque sia } \bar{i} < i$$

allora, in virtù del fatto che questo arco è formato da tratti di prima categoria è:

$$f_{\bar{n}_i}[x_{\bar{n}_i}(t_1)] - f_{\bar{n}_i}[x_{\bar{n}_i}(t_2)] \geq -\frac{1}{\bar{n}_i}.$$

Dalla relazione

$$y_0(t_1) - y_0(t_2) = y_0(t_1) - f_{\bar{n}_i}[x_{\bar{n}_i}(t_1)] + f_{\bar{n}_i}[x_{\bar{n}_i}(t_1)] +$$

$$+ f_{\bar{n}_i}[x_{\bar{n}_i}(t_2)] - f_{\bar{n}_i}[x_{\bar{n}_i}(t_2)] - y_0(t_2),$$

e dal fatto che:

$$\lim f_{\bar{n}_i}[x_{\bar{n}_i}(t)] = y_0(t),$$

avremo, passando al limite per i tendente all'infinito:

$$y_0(t_1) - y_0(t_2) \geq 0.$$

Analogamente varrà la stessa proprietà anche per l'arco a destra, nonchè la proprietà opposta per l'arco centrale.

In altre parole, mentre la curva C_0 è incontrata in un punto al più da ogni parallela all'asse delle x, oppure avrà tutto un tratto a comune con questa, essa consterà al più di tre archi di cui il primo crescente, il secondo decrescente, il terzo di nuovo crescente.

10. — Supponiamo adesso sia possibile operare con l'operazione B, descritta qui appresso:

OPERAZIONE B: *si possa spostare un arco qualunque della curva $y = f(x)$ parallelamente all'asse delle y.*

Mediante questa operazione B, dalla curva C_0, si potranno eliminare gli eventuali archi di questa che siano paralleli all'asse y (ricordiamo che essi sono al più un infinita numerabile) ed ottenere così facendo una curva $\overline{C}_0$, continua rettificabile, la quale ammetterà una rappresentazione analitica ordinaria $y = \overline{y}_0(x)$, e godrà di tutte le proprietà di monotonia della C_0.

Supponiamo adesso che si abbia un integrale del Calcolo dellè Variazioni

$$I_C = \int_a^b f(x, y, y')\, dx,$$

in forma ordinaria, che scriviamo in forma parametrica nella maniera seguente:

$$J_C = \int_C F(x, y, x', y')\, dt,$$

definito su una classe K completa di curve continue e rettificabili, tutte contenute in una parte limitata e chiusa del piano (x, y), contenente tutte le curve continue che si possano dedurre da esse mediante un infinità numerabile al più di operazioni A sui propri archi, esistano in K delle curve le quali ammettano una rappresentazione ordinaria, nonchè qualunque curva continua che si ottenga da esse mediante un infinità numerabile al più di operazioni A eseguite sui propri archi. Tutte queste curve siano definite per esempio sullo stesso intervallo (a, b). Supponiamo ancora che questo integrale scritto in forma parametrica sia semicontinuo inferiormente su K e che operando con *le operazioni A e B sulle curve della classe K il valore dell'integrale non aumenti.*

Ai fini della ricerca del minimo di J_C sulle curve in forma ordinaria in K ci si può allora limitare a considerare curve di K che siano del tipo sopra visto, e precisamente che abbiano un primo arco crescente, un ultimo arco pure crescente e un arco intermedio decrescente, oppure un primo e ultimo arco decrescente e l'arco intermedio crescente.

Di conseguenza anche l'eventuale curva minimante, ottenuta con il metodo delle successioni minimizzanti sarà ancora una curva ordinaria e di uno dei due tipi suddetti.

L'esistenza di questa minimante può essere assicurata, per esempio, quando le lunghezze delle curve della successione minimizzante saranno superiormente limitate. Il problema di minimo di I_C ammette allora almeno una minimante.

Si ottiene così il seguente teorema:

Sia K una classe di curve continue e rettificabili

1. *tutte contenute in una parte R limitata e chiusa del piano (x, y)*
2. *contenga delle curve che ammettono una rappresentazione ordinaria*
3. *contenga tutte le curve continue che stanno in R e che si possano ottenere da una curva qualsiasi non ordinaria di K operando al più un infinità numerabile di volte, su archi qualunque di essa, mediante l'operazione B.*
4. *contenga tutte le curve continue che stanno in R e che si possano ottenere da una curva qualsiasi in forma ordinaria di K, operando al più un infinità numerabile di volte su archi qualunque di essa mediante l'operazione A.*
5. *sia completa.*

Sia I_C un integrale in forma ordinaria del Calcolo delle Variazioni, definito sulle curve di K e sia J_C lo stesso integrale espresso in forma parametrica.

Supponiamo J_C semi-continuo inferiormente su K e la funzione integranda non negativa e non dipendente da x e da y.

Allora, se le lunghezze delle curve d'una successione minimizzante formata solo con curve, in forma ordinaria, di K sono superiormente limitate, l'integral J_C ammette una minimante fra le curve di K in forma ordinaria ed essa è formata da un primo e un ultimo arco non decrescente (non crescente) e di quello intermedio non crescente (non decrescente), uno o due di questi archi potendo anche mancare.

Se questa curva minimante è tale da rendere integrabile l'integrando di I_C, essa da pure una minimante di I_C sulla stessa classe di curve.