

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

SANDRO FAEDO

## **Su un principio di esistenza nell'analisi lineare**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 11, n° 1-2 (1957), p. 1-8*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1957\\_3\\_11\\_1-2\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1957_3_11_1-2_1_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SU UN PRINCIPIO DI ESISTENZA NELL'ANALISI LINEARE

di SANDRO FAEDO (Pisa)

1. — Nel Convegno internazionale sulle equazioni alle derivate parziali di Trieste<sup>(1)</sup> G. FICHERA ha comunicato un principio generale di esistenza nell'Analisi lineare, mediante il quale egli ha potuto dare una trattazione unitaria a numerosi problemi esistenziali.<sup>(2)</sup>

Siano  $V$  un insieme astratto, lineare rispetto al corpo reale [complesso] e  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  due spazi di BANACH reali [complessi]. Siano definite in  $V$  due trasformazioni lineari  $M_1(v)$  e  $M_2(v)$ , aventi codominio rispettivamente in  $\mathcal{B}_1$  e in  $\mathcal{B}_2$ . Sia assegnato un funzionale lineare e continuo  $\Phi(w_1)$ , definito in  $\mathcal{B}_1$  e si consideri l'equazione

$$1) \quad \Phi[M_1(v)] = \Psi[M_2(v)],$$

nell'incognita  $\Psi(w_2)$ , essendo  $\Psi(w_2)$  un funzionale lineare e continuo definito in  $\mathcal{B}_2$ .

Il principio esistenziale di FICHERA si può così enunciare:

« Condizione necessaria e sufficiente affinché esista la soluzione dell'equazione 1), dato comunque  $\Phi$ , è che esista una costante  $K$ , tale che sia per ogni  $v \in V$

$$2) \quad \|M_1(v)\| \leq K \|M_2(v)\|.$$

---

<sup>(1)</sup> « Atti del Convegno internazionale sulle equazioni alle derivate parziali », Trieste, agosto 1954, Ediz. Cremonese, Roma, 1955, pagg. 174-227.

<sup>(2)</sup> Oltre al lavoro cit. in (1) si veda G. FICHERA, « *Sulle equazioni differenziali lineari ellittico-paraboliche del secondo ordine* », Memorie dell'Accad. Naz. Lincei, S. VIII, vol. V, fasc. L<sup>o</sup>, 1956; G. FICHERA, « *Sulle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine ellittico-paraboliche* », Rend. Seminario Mat. Univ. e Pol. di Torino, Vol. 15, 1956, pagg. 27-47.

Soddisfatta la 2), esiste una soluzione  $\Psi$  della 1) verificante la disuguaglianza  $\|\Psi\| \leq K \|\Phi\|$  e ogni altra soluzione si ottiene aggiungendo ad essa un funzionale ortogonale al codominio  $M_2(V)$  di  $M_2(v)$ ».

2. — Indichiamo con  $\omega_i$  l'origine dello spazio di BANACH  $\mathcal{B}_i$  e con  $V_i$  la varietà lineare delle autosoluzioni dell'equazione  $M_i(v) = \omega_i$  ( $i = 1, 2$ ). La varietà  $V_i$  può essere eventualmente vuota.

Se è soddisfatta la 2) è ovviamente  $V_2 \subset V_1$ .

Se non è  $V_2 \subset V_1$  esiste un'autosoluzione di  $M_2(v) = \omega_2$  che non verifica la 2), comunque grande si prenda  $K$ ; in tal caso esistono funzionali lineari continui  $\Phi(w_1)$ , definiti in  $\mathcal{B}_1$  per cui la 1) non possiede soluzione.

**TEOREMA I:** « Se non è  $V_2 \subset V_1$ , condizione necessaria perchè la 1) sia risolvibile è che l'assegnato funzionale  $\Phi(w_1)$  sia ortogonale a  $M_1(V_2)$ ; ogni soluzione  $\Psi(w_2)$  della 1) è allora ortogonale a  $M_2(V_1)$  ».

Infatti se per un certo  $\Phi(w_1)$  la 1) ha la soluzione  $\Psi(w_2)$  risulta

$$M_2(V_2) = \omega_2, \quad \Psi[M_2(V_2)] = 0$$

e, per la 1),

$$\Phi[M_1(V_2)] = 0.$$

Analogamente è  $M_1(V_1) = \omega_1$ ,  $\Phi[M_1(V_1)] = 0$  e quindi

$$\Psi[M_2(V_1)] = 0.$$

3. — Studiamo ora l'equazione 1) quando non sia  $V_2 \subset V_1$ .

**TEOREMA II:** « Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista la soluzione  $\Psi$  dell'equazione 1), per ogni  $\Phi$  ortogonale a  $M_1(V_2)$ , è che esista una costante  $K$ , tale che sia per ogni  $v \subset V$

$$3) \quad \text{estr. inf.}_{v \subset V} \|M_1(v + v_2)\| \leq K \|M_2(v)\|.$$

Soddisfatta questa condizione, esiste una soluzione  $\Psi$  della 1), ortogonale a  $M_2(V_1)$  e verificante la disuguaglianza  $\|\Psi\| \leq K \|\Phi\|$  e ogni altra soluzione si ottiene aggiungendo ad essa un funzionale ortogonale a  $M_2(V)$ ».

La condizione è sufficiente.

Per ogni  $w_2 \subset M_2(V)$  si consideri un  $v \subset V$  tale che sia  $M_2(v) = w_2$  e il numero  $\Phi[M_1(v)]$ . Dimostriamo che  $\Phi[M_1(v)]$  è univocamente determinato da  $w_2$ ; infatti se  $M_2(v') = w_2$  risulta  $v - v' \subset V_2$  ed è

$$4) \quad \Phi[M_1(v)] - \Phi[M_1(v')] = \Phi[M_1(v - v')] = 0,$$

essendo  $\Phi$  ortogonale a  $M_1(V_2)$ . Si è così definito in  $M_2(V)$  il funzionale, ovviamente lineare,

$$\psi(w_2) = \Phi[M_1(v + r_2)],$$

dove è  $w_2 = M_2(v)$  e  $v_2 \subset V_2$ .

Tale funzionale è anche continuo in  $M_2(V)$ . Infatti per ogni  $v_2 \subset V_2$  si ha

$$|\psi(w_2)| = |\Phi[M_1(v + r_2)]| \leq \|\Phi\| \cdot \|M_1(v + v_2)\|$$

e, poichè il primo membro non dipende da  $v_2$ ,

$$|\psi(w_2)| \leq \|\Phi\| \cdot \text{estr. inf.}_{v_2 \subset V_2} \|M_1(v + v_2)\|;$$

dalla 3) segue

$$|\psi(w_2)| \leq K \|\Phi\| \|w_2\|$$

e quindi

$$\|\psi\| \leq K \|\Phi\|.$$

Per il teorema di Hahn-Banach si può prolungare  $\psi(w_2)$  in tutto  $\mathcal{B}_2$  in modo da ottenere un funzionale lineare e continuo  $\Psi(w_2)$  per cui sia ancora

$$\|\Psi\| \leq K \|\Phi\|.$$

Per il teorema I  $\Psi$  è ortogonale a  $M_2(V_1)$ . È inoltre ovvio che se  $\Psi_0(w_2)$  è ortogonale a  $M_2(V)$  anche  $\Psi + \Psi_0$  soddisfa alla 1) e che viceversa la differenza fra due diverse soluzioni della 1) è ortogonale a  $M_2(V)$ .

La condizione è necessaria.

Invece di considerare gli spazi di BANACH  $\mathcal{B}_i$  ci si può limitare alle loro varietà lineari  $M_i(V)$  e ai funzionali lineari in esse definiti. Indichiamo con  $\mathcal{N}_i$  lo spazio duale<sup>(3)</sup> di  $M_i(V)$  e con  $\mathcal{N}_i'$  la varietà lineare, contenuta in  $\mathcal{N}_i$ , degli elementi di  $\mathcal{N}_i$  che sono ortogonali a  $\mathcal{N}_i(V_j)$  ( $i, j=1, 2$ ;  $i \neq j$ ).

Se la 1) è risolubile per ogni  $\Phi$  di  $\mathcal{N}_1'$ , essa fa corrispondere a ogni  $\Phi$  di  $\mathcal{N}_1'$  un solo elemento  $\Psi$  di  $\mathcal{N}_2'$ ; si ha così una trasformazione lineare  $\Psi = T(\Phi)$  definita in  $\mathcal{N}_1'$  e con codominio in  $\mathcal{N}_2'$ .

Fissato  $w_2$  in  $M_2(V)$ , al variare di  $\Phi$  in  $\mathcal{N}_1'$  consideriamo  $\Psi = T(\Phi)$  e il numero  $\Psi(w_2)$ ; si viene così ad associare all'elemento  $w_2$  un funzionale lineare, definito in  $\mathcal{N}_1'$  e che indicheremo con  $W_1(\Phi)$ ; la trasformazione

$$W_1(\Phi) = T^*(w_2)$$

(3) V. ad es, G. FICHERA, « *Lezioni sulle trasformazioni lineari* », Vol. I, Ist. Mat. Univ. Trieste, 1954, p. 143.

è lineare, definita in  $M_2(V)$  e con codominio nel duale di  $\mathcal{N}'_1$ . La  $T^*(w_2)$  è continua, cioè esiste una costante  $K$  tale che sia

$$5) \quad \|W_1\| \leq K \|w_2\|;$$

ciò si dimostra con lo stesso ragionamento di FICHERA<sup>(4)</sup>.

Si noti che  $\|W_1\|$  è definito da

$$\|W_1\| = \text{estr. sup.}_{\Phi \in \mathcal{N}'_1} \frac{|W_1(\Phi)|}{\|\Phi\|}.$$

Sia  $w_1 \in M_1(V)$ . Ad ogni  $\Phi$  di  $\mathcal{N}'_1$  si faccia corrispondere il numero  $\Phi(w_1)$ . Si viene così a definire un funzionale lineare  $W_{w_1}(\Phi)$ . Dimostriamo che  $W_{w_1}(\Phi)$  è continuo e che è

$$6) \quad \|W_{w_1}\| = \text{estr. sup.}_{\Phi \in \mathcal{N}'_1} \frac{|W_{w_1}(\Phi)|}{\|\Phi\|} = d_{w_1},$$

dove  $d_{w_1}$  è la distanza fra  $w_1$  e  $M_1(V_2)$ .

Sia  $\Phi \in \mathcal{N}'_1$ ,  $w_1 \in M_1(V - V_2)$  e poniamo  $\Phi(w_1) = a$ .

Sulla varietà lineare  $V_{w_1}$  proiettante  $M_1(V_2)$  da  $w_1$ , di equazione

$$w = t w_1 + \bar{w},$$

dove  $\bar{w} \in M_1(V_2)$  e  $t$  è un numero, risulta

$$\Phi(w) = t a.$$

Perciò è, per  $t \neq 0$ ,

$$7) \quad \frac{|\Phi(W)|}{\|W\|} = \frac{|a|}{\left\|w_1 + \frac{w}{t}\right\|}$$

e il modulo di  $\Phi(w)$ , considerato soltanto su  $V_{w_1}$ , è  $\frac{|a|}{d_{w_1}}$ .

Poichè  $\Phi$  è continuo, se è  $d_{w_1} = 0$  deve essere anche  $a = 0$ ; perciò in tal caso il modulo di  $\Phi$  su  $V_{w_1}$  è nullo.

---

(<sup>4</sup>) Loc. cit. in (1), pagg. 176-177.

Indicato con  $\|\Phi\|$  il modulo di  $\Phi(w)$  in  $M_1(V)$ , si ha quindi

$$8) \quad \|\Phi\| \geq \frac{|a|}{d_{w_1}}.$$

Inoltre, per il teorema di HAHN-BANACH esistono certamente in  $\mathcal{N}'_1$  dei  $\Phi$  per cui nella 8) vale il segno di uguaglianza.

Dalla 8), per  $\Phi \in \mathcal{N}'_1$ , risulta

$$\frac{|W_{w_1}(\Phi)|}{\|\Phi\|} = \frac{|\Phi(w_1)|}{\|\Phi\|} = \frac{|a|}{\|\Phi\|} \leq d_{w_1}$$

ed esistono in  $\mathcal{N}'_1$  elementi per cui vale l'uguaglianza. È così dimostrata la 6).

Se  $v \subset V$  ed è  $w_1 = M_1(v)$ ,  $w_2 = M_2(v)$ , posto  $\Psi = T(\Phi)$  si ha per ogni  $\Phi$  di  $\mathcal{N}'_1$

$$\Phi(w_1) = \Psi(w_2)$$

ossia

$$W_{w_1}(\Phi) = W_1(\Phi)$$

da cui

$$9) \quad \|W_{w_1}\| = \|W_1\|.$$

Se  $v_2 \subset V_2$ , consideriamo la varietà degli elementi  $M_1(v + v_2)$  di  $M_1(V)$ . Si ha

$$\text{estr. inf.}_{v_2 \subset V_2} \|M_1(v + v_2)\| = d_{w_1},$$

dove  $d_{w_1}$  indica la distanza di  $w_1$  da  $M_1(V_2)$ .

Ne segue per le 6) e 9)

$$\text{estr. inf.}_{v_2 \subset V_2} \|M_1(v + v_2)\| = \|W_{w_1}\| = \|W_1\|$$

e quindi per la 5)

$$\text{estr. inf.}_{v_2 \subset V_2} \|M_1(v + v_2)\| \leq K \|w_2\| = K \|M_2(v)\|;$$

è così dimostrato che sussiste la 3).

OSSERVAZIONE: Se  $V_2 \subset V_1$  è  $M_1(V_2) = \omega_1$  ed ogni  $\Phi$  è ortogonale a  $M_1(V_2)$ ; inoltre è  $M_1(v + v_2) = M_1(v)$  per ogni  $v_2 \subset V_2$ . In tal caso la 3) si riduce alla 2) e si riottiene il teorema di FICHERA.

4. — Come prima applicazione consideriamo il problema dell'integrazione di una equazione alle derivate parziali ellittico-parabolica del secondo ordine. In un insieme aperto  $A$  dello spazio cartesiano  $S_r$  è data l'equazione differenziale

$$10) \quad \mathcal{E}(u) = \sum_{h,k}^{1\dots r} a_{hk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^r b_h(x) \frac{\partial u}{\partial x_h} + c(x)u = f \quad (a_{hk} = a_{kh}),$$

con  $\sum a_{hk} \lambda_h \lambda_k$  definita o semidefinita positiva in ogni punto  $x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_r)$  di  $A$ . Si supponga inoltre che  $c$  sia continua e  $b_h [a_{hk}]$  siano rispettivamente di classe uno e due in  $A + \Sigma$ , dove  $\Sigma$  denota la frontiera di  $A$ . Indichiamo con  $\mathcal{E}^*(u)$  l'operatore aggiunto ad  $\mathcal{E}(u)$  e cioè

$$\mathcal{E}^*(u) = \sum_{hk}^{1\dots r} \frac{\partial^2 (a_{hk} u)}{\partial x_h \partial x_k} - \sum_{k=1}^r \frac{\partial (b_k u)}{\partial x_k} + c u.$$

La frontiera  $\Sigma$  di  $A$  è costituita da porzioni di ipersuperficie regolari  $\Sigma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Detto  $\Sigma'_i$  l'insieme dei punti di  $\Sigma_i$  in cui l'iperpiano tangente a  $\Sigma_i$  ha giacitura caratteristica rispetto all'equazione, consideriamo la funzione

$$b(x) = \sum_{h=1}^r \left[ (b_h - \sum_k^{1\dots r} \frac{\partial a_{hk}}{\partial x_k} \cos(x_{h,n})) \right]$$

dove  $\cos(x_{h,n})$  è il coseno direttore rispetto all'asse  $x_h$  della normale  $n$  a  $\Sigma_i$  volta verso l'interno di  $A$ . La funzione  $b(x)$  può essere estesa per continuità su tutta  $\Sigma_i$ . Diciamo  $\Sigma_i^{(1)}$  l'insieme dei punti di  $\Sigma'_i$  nei quali è  $b \geq 0$  e poniamo

$$\Sigma^{(1)} = \Sigma_1^{(1)} + \Sigma_2^{(1)} + \dots + \Sigma_n^{(1)},$$

$$\Sigma^{(2)} = (\Sigma_1' + \Sigma_2' + \dots + \Sigma_n') - \Sigma^{(1)},$$

$$\Sigma^{(3)} = \Sigma - (\Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)}).$$

Indichiamo con  $\mathcal{C}(\mathcal{E})$  la classe delle funzioni  $u(x)$  che soddisfano alle condizioni:

a) ogni  $u$  di  $\mathcal{C}(\mathcal{E})$  è continua in  $A + \Sigma$ ;

b) è possibile decomporre  $A + \Sigma$  in un numero finito di domini regolari, due a due privi di punti interni in comune  $T_1, T_2, \dots, T_s$  tali che se  $b_k [a_{hk}]$  non è identicamente nullo in  $A + \Sigma$  la derivata parziale  $\frac{\partial u}{\partial x_k} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} \right]$  esiste in ogni punto interno di  $T_i$  e coincide con una fun-

zione continua in  $T_i (i = 1, 2, \dots, s)$ . Se  $u \in C(\mathcal{E})$  e  $v$  è di classe due in  $A + \Sigma$  si ha per la formula di GREEN-GAUSS (5)

$$11) \quad \int_A \{u \mathcal{E}^*(v) - v \mathcal{E}(u)\} dx = \int_{\Sigma} b u v d\sigma + \\ + \int_{\Sigma^{(3)}} a \left[ v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right] d\sigma,$$

dove  $dx = dx_1 \cdot dx_2 \dots dx_r$  e  $d\sigma$  è la misura dell'elemento superficiale su  $\Sigma$ ; inoltre  $\nu$  indica l'asse conormale a  $\Sigma$  e cioè tale che sia

$$a \cos(x_h, \nu) = \sum_h a_{hk}(x) \cos(x_k, n) \quad (h = 1, 2, \dots, r)$$

ed il fattore positivo  $a$  è definito da

$$a \cos(n, \nu) = \sum_{h,k} a_{h,h}(x) \cos(x_h, n) \cos(x_k, n).$$

G. FICHERA (6) ha dimostrato che è ben posto per l'equazione (10) il problema di cercare la soluzione verificante le seguenti condizioni al contorno

$$12) \quad \begin{cases} u(x) = 0 \text{ per } x \in \Sigma^{(2)} + \Sigma^{(3)'}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ per } x \in \Sigma^{(3)''} \end{cases}$$

dove  $\Sigma^{(3)'}$  e  $\Sigma^{(3)''}$  sono due insiemi privi di punti a comune e tali che  $\Sigma^{(3)'} + \Sigma^{(3)''} = \Sigma^{(3)}$ .

Indichiamo con  $V$  la classe di tutte le funzioni verificanti le condizioni seguenti:

1<sup>o</sup>)  $v$  appartiene a  $C(\mathcal{E})$ ;

2<sup>o</sup>) comunque si assegni una  $u$  verificante le 12) di classe uno in  $A + \Sigma$  e tale che  $\mathcal{E}(u)$  sia continua in  $A$  e limitata in  $A + \Sigma$  risulti  $(\bar{\Sigma}^{(3)'})$  e  $(\bar{\Sigma}^{(3)''})$  essendo l'involucro di  $\Sigma^{(3)'}$  e  $\Sigma^{(3)''}$

$$\int_{\Sigma^{(2)} + \bar{\Sigma}^{(3)'}} b u v d\sigma + \int_{\bar{\Sigma}^{(3)'}} a v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma - \int_{\bar{\Sigma}^{(3)'}} a u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma = 0.$$

(5) Cfr. M. PICONE «*Appunti di Analisi superiore*», Napoli, Ed. Rondinella, 1940, pag. 735.

(6) G. FICHERA, loc cit. in (2). È inoltre da osservare che l'omogeneità delle 12) e 13) non è una condizione essenzialmente restrittiva.



Se la soluzione  $u$  del problema 10), 12) verifica per ogni  $v \in V$  la condizione 2<sup>o</sup>) si ha per ogni  $v$  di  $V$

$$13) \quad \int_A (u \mathcal{E}^*(v) - v f) dx = 0.$$

Si indichi con  $\mathcal{L}^{(p)}(A)$  lo spazio di BANACH delle funzioni di modulo di potenza  $p^{ma}$  ( $p \geq 1$ ) sommabile in  $A$  e sia  $f \in \mathcal{L}^{(p)}(A)$ . Una funzione  $u \in \mathcal{L}^{(q)}(A)$  ( $q \geq 1$ ) che per ogni  $v \in V$  verifica le 13) si dice una *soluzione debole*  $[\mathcal{L}^{(q)}, \mathcal{L}^{(p)}]$  del problema considerato.

Ad ogni elemento  $v \in V$  facciamo corrispondere l'elemento  $v$  dello spazio di BANACH  $\mathcal{B}_1$  con

$$\|v\| = \left( \int_A |v|^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

e l'elemento  $\mathcal{E}^*(v)$  dello spazio di BANACH  $\mathcal{B}_2$  con

$$\|\mathcal{E}^*(v)\| = \left( \int_A |\mathcal{E}^*(v)|^{\frac{q}{q-1}} dx \right)^{\frac{q-1}{q}}.$$

Dal teorema II segue immediatamente per il teorema di rappresentazione dei funzionali lineari e continui definiti in  $\mathcal{L}^{(p)}$  (7)

**TEOREMA III:** « Siano  $p$  e  $q$  due numeri maggiori di uno e sia  $V_0$  l'insieme delle autosoluzioni di  $\mathcal{E}^*(v)$ . Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una soluzione debole  $[\mathcal{L}^{(q)}, \mathcal{L}^{(p)}]$  del problema considerato, comunque si assegni  $f$  verificante le condizioni

$$\int_A v_0 f dx = 0 \quad (v_0 \in V_0),$$

è che esista una costante  $K$  tale che per ogni  $v \in V$  si abbia

$$\text{estr. inf.}_{v_0 \in V_0} \left( \int_A |v + v_0|^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq K \left( \int_A |\mathcal{E}^*(v)|^{\frac{q}{q-1}} dx \right)^{\frac{q-1}{q}}.$$

Per  $p = \infty$  si ottiene lo spazio  $\mathcal{L}^{(\infty)}(A)$  delle funzioni pseudo-limitate in  $A$  e nella relazione precedente va sostituito a  $\frac{1}{p-1}$  e  $\frac{p-1}{p}$  il valore 1; analogamente per  $q = \infty$ .

(7) V. loc. cit. in (3), pag. 473.