ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

J. L. LIONS

Théorèmes de trace et d'interpolation

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 13, nº 4 (1959), p. 389-403

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1959_3_13_4_389_0>

THÉORÈMES DE TRACE ET D'INTERPOLATION (I).

J. L. LIONS (Nancy)

Introduction.

Soient D et E deux espaces de Banach, avec $D \subset E$ algébriquement et topologiquement, D étant dense dans E, et soient $\mathcal{A}(D)$ et $\mathcal{B}(E)$ deux espaces de « fonctions » ou de distributions d'une variable réelle $t > 0$ à valeurs dans D et E respectivement. On considère l'espace des $u \in \mathcal{A}(D)$ et dont la dérivée du/dt (prise au sens des distributions vectorielles) cf. L. Schwartz [1]) appartient à l'espace $\mathcal{B}(E)$. On peut alors, sous certaines conditions, définir la « trace » $u(0)$ de u à l'origine, et lorsque u varie — en étant assujetti aux conditions çi dessus —, $u(0)$ parcourt un « espace intermédiaire » entre D et E. On appelle « théorème de trace » tout résultat *caractérisant* directement l'espace des traces, soit T, *i. e.* l'espace engendré par les $u(0)$. Des problèmes de ce type interviennent constamment dans la théorie des problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles. Et en outre, selon une remarque dégagée dans toute sa généralité par N. Aronszajn, à tout théorème de trace correspond un théorème d'interpolation: si $D_1 \subset E_1$ est un deuxième couple d'espaces de Banach, et si l'on construit l'espace des traces — disons T_1 — correspondant aux fonctions $v \in \mathcal{A}(D_1)$ avec $dv/dt \in \mathcal{B}(E_1)$, alors, si π est une application linéaire continue de D dans D_1 et de E dans E_1, elle est aussi une application linéaire continue de T dans T_1. (Il faut que $1 \otimes \pi$ applique continûment $\mathcal{A}(D)$ dans $\mathcal{A}(D_1)$ et $\mathcal{B}(E)$ dans $\mathcal{B}(E_1)$).

On suppose essentiellement dans ce travail que le sous-espace D de E est le domaine d'un générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu et borné (cf. Hille Phillipe [1]), ou bien le domaine commun à une famille finie de générateurs infinitésimaux commutatifs.

Des résultats d'interpolation très généraux ont été obtenus tout récemment par E. Gagliardo [3], [4], à l'aide de sa construction d'espaces intermédiaires entre deux espaces de Banach. Les résultats de M. Gagliardo *ne supposent pas* que D est domaine d'un générateur infinitésimal de semi groupe (ni même que D est contenu dans E), et permettent de considérer des opérateurs non linéaires. Par contre les espaces construits ici sont, dans un certain nombre d'applications tout au moins, d'utilisation plus commode. Il serait donc intéressant de savoir si tous les espaces que nous construisons ici peuvent, ou non, entrer dans la théorie de M. Gagliardo.

D'autres problèmes sont signalés dans le texte. Ajoutons ici le suivant: D et E étant donnés comme çi dessus, quand D est il le domaine d'un générateur infinitésimal d'un semi groupe (fortement continu, ou appartenant à d'autres classes; cf. Hille Phillips [1])? Variante: quand D est-il le domaine d'un générateur infinitésimal d'une distribution semi groupe (cf. Lions [2])? (La réponse est toujours affirmative — et facile — si D et E sont deux espaces de Hilbert).

Voici le plan de cet article:

— nous donnons aux n^0 1 et 2 les théorèmes de trace;

— le n^0 3 donne les théorèmes d'interpolation correspondants;

— les n^0 4, 5 et 6 donnent quelques applications; d'autres sont données dans Lions [3] et des variantes seront données dans un article prochoin.

1. — Théorème de trace (I).

On considère un espace de Banach complexe E; si $e \in E$, $\| e \|$ désignera sa norme dans E. On désigne par $\mathcal{L}(E, E)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans E; si $\pi \in \mathcal{L}(E, E)$, $\| \pi \|$ désignera la norme de π.

On donne dans E opérateur A non borné, fermé, de domaine $D(A)$ dense dans E; on munit $D(A)$ de la norme

$$\| e \| + \| A e \|$$

qui en fait un espace de Banach.

On fera dans la suite l'hypothèse

$$(SG) \quad \begin{cases} \text{l'opérateur } A \text{ est générateur infinitésimal d'un semi groupe} \\ t \to G(t) \text{ fortement continu et borné,} \end{cases}$$

i. e.:

quel que soit $e \in E$, la fonction $t \to G(t)\, e$ est continue de $t \geq 0$ dans E (fort), avec $G(0)\, e = e$, et en outre: $\| G(t) \| \leq M < \infty$.

Lorsque (SG) a lieu on peut construire des espaces intermédiaires entre $D(A)$ et E de la façon suivante:

DÉFINITION 1.1. — On donne p avec $1 < p \leq \infty$, et α avec $-1/p < \alpha < 1 - 1/p$.

On désigne par $E(p, \alpha, A)$ l'espace des $e \in E$ tels que

$$t^{\alpha-1}(G(t)e - e) \in L^p(0, \infty, E) \text{ [1]}. \tag{1.1}$$

On munit cet espace de la norme

$$\| e \| + \left(\int_0^\infty t^{(\alpha-1)p} \| G(t)e - e \|^p \, dt \right)^{1/p}, \tag{1.2}$$

qui en fait un espace de Banach. (Modification évidente si $p = \infty$)

Vérifions que

$$D(A) \subset E(p, \alpha, A) \subset E, \tag{1.3}$$

les inclusions étant algébriques et topologiques.

Il y a seulement à vérifier la première inclusion. Soit donc $e \in D(A)$; alors $t \to G(t)e$ est continûment dérivable, de dérivée $G(t)Ae$, donc

$$G(t)e - e = \int_0^t G(\sigma) A e \, d\sigma,$$

et par conséquent

$$\| G(t)e - e \| \leq Mt \| Ae \|.$$

On en déduit, puisque $\alpha > -1/p$, que $t^{\alpha-1} \| G(t)e - e \| \in L^p(0, 1)$.

Comme on a également

$$t^{\alpha-1} \| G(t)e - e \| \leq (M + 1) \| e \| t^{\alpha-1},$$

et comme $\alpha < 1 - 1/p$,

$$t^{\alpha-1} \| G(t)e - e \| \in L^p(1, \infty),$$

ce qui démontre la première inclusion (1.3) algébriquement et topologiquement, la norme (1.2) étant majorée par $K(\| e \| + \| Ae \|)$.

Posons tout de suite de façon précise un problème auquel il est fait allusion dans l'introduction :

---

[1] $L^p(a, b, E)$ désigne l'espace des (classes de) fonctions de puissance p ème sommable sur (a, b) à valeurs dans E.

PROBLÈME 1.1. — L'espace $E(p, \alpha, \Lambda)$ est-il un espace d'interpolation entre $D(\Lambda)$ et E au sens de Gagliardo [3], [4], et pour quelle fonctionnelle (en cas de réponse affirmative)? C'est vrai si $\alpha = 0$; cf. Remarque 1.2 ci dessous.

Posons maintenant la

DÉFINITION 1.2. — On donne p avec $1 < p \leq \infty$ et α avec $-1/p < \alpha < 1 - 1/p$. On désigne par $W(p, \alpha, \Lambda)$ l'espace des fonctions $t \to u(t)$ telles que

$$t^\alpha u \in L^p(0, \infty, D(\Lambda)), \tag{1.4}$$

avec

$$t^\alpha du/dt \in L^p(0, \infty ; E)\ (^2). \tag{1.5}$$

On munit cet espace de la norme

$$\left(\int_0^\infty t^{\alpha p}(\| u(t)\|^p + \| du(t)/dt \|^p\, dt\right)^{1/p}$$

qui en fait un espace de Banach.

D'après (2), si $u \in W(p, \alpha, \Lambda)$, alors $u \in L^1(0, T; D(\Lambda))$ et $du/dt \in L^1(0, T; E)$, quel que soit T fini ; dans ces conditions $u(0)$ a un sens, et $\in E$. On peut donc considérer l'application $u \to u(0)$ de $W(p, \alpha, \Lambda)$ dans E.

Le premier théorème de trace est le

THÉORÈME 1.1. — *On suppose que l'hypothèse* (SG) *a lieu. On donne* p *avec* $1 < p \leq \infty$, *et* α *avec* $-1/p < \alpha < 1 - 1/p$. *Alors l'application linéaire* $u \to u(0)$ *est continue de* $W(p, \alpha, \Lambda)$ *SUR* $E(p, \alpha, \Lambda)$ (3).

DÉMONSTRATION.

1) L'application est continue *dans* $E(p, \alpha, \Lambda)$.

Posons, pour u donnée dans $W(p, \alpha, \Lambda)$:

$$du/dt - \Lambda u = f ;$$

d'après (1.4) et (1.5), on a :

$$t^\alpha f \in L^p(0, \infty, E). \tag{1.6}$$

---

(2) Si (1.4) a lieu u est localement sommable sur $]0, \infty[$ à valeurs dans $D(\Lambda)$ donc dans E, donc définit une distribution sur l'ouvert $]0, \infty[$ à valeurs dans E, on peut alors (cf. L. Schwartz [1]) définir du/dt comme distribution sur $]0, \infty[$ à valeurs dans E. En fait de (1.4), de l'hypothèse $-1/p < \alpha < 1 - 1/p$ et de l'inégalité de Holder, résulte que $u \in L^1(0, T; D(\Lambda))$ pour tout T fini.

(3) Le cas $p = 1$, $\alpha = 0$, est résolu par Gagliardo [2].

Alors

$$u(t) = G(t)\, u(0) + \int_0^t G(t-\sigma) f(\sigma)\, d\sigma\,;$$

si donc l'on pose $u(0) = e$, il vient

$$G(t)\, e - e = \int_0^t u'(\sigma)\, d\sigma - \int_0^t G(t-\sigma) f(\sigma)\, d\sigma \qquad (u' = du/dt).$$

Par conséquent

$$t^{\alpha-1} \| G(t)\, e - e \| \leq F_1(t) + F_2(t)\,,$$

où

$$F_1(t) = t^{\alpha-1} \int_0^t \| u'(\sigma) \|\, d\sigma\,,$$

$$F_2(t) = t^{\alpha-1} \int_0^t \| G(t-\sigma) \|\, \| f(\sigma) \|\, d\sigma\,.$$

Mais si l'on pose :

$$t^\alpha u' = v\,,\ t^\alpha f = g\,,$$

v et g sont dans $L^p(0, \infty; E)$ et

$$F_1(t) = t^{\alpha-1} \int_0^r \sigma^{-\alpha} \| v(\sigma) \|\, d\sigma\,,$$

$$F_2(t) \leq M t^{\alpha-1} \int_0^t \sigma^{-\alpha} \| g(\sigma) \|\, d\sigma\,.$$

Alors, d'après une variante d'une inégalité de Hardy (cf. Hardy-Littlewood-Polya [1], inégalité (9.9.8), p. 245) :

$$\int_0^\infty F_1(t)^p\, dt = \int_0^\infty t^{(\alpha-1)p} \left(\int_0^t \sigma^{-\alpha} \| v(\sigma) \|\, d\sigma \right)^p dt <$$

$$< p^p (p - \alpha p - 1)^{-p} \int_0^\infty \| v(t) \|^p\, dt\,;$$

(noter qu'il faut ici que $\alpha < 1 - 1/p$). On a une inégalité analogue pour F_2 ce qui démontre la première partie du Théorème.

2) L'application est *sur*.

On donne maintenant e dans $E(p, \alpha, A)$ et on va construire u dans $W(p, \alpha, A)$ tel que

$$u(0) = e. \tag{1.7}$$

On introduit [4]

$$v(t) = t^{-1} \int_0^t G(\sigma)\, e\, d\sigma; \tag{1.8}$$

on définit ainsi une fonction continue de $t \geq 0$ dans E, avec

$$v(0) = e. \tag{1.9}$$

Admettons un instant le

LEMME 1.1. — *Pour* $t > 0$ *quelconque,* $\int_0^t G(\sigma)\, d\sigma \in \mathcal{L}(E; D(A))$ *et* $A \int_0^t G(\sigma)\, d\sigma = G(t) - I$, $I =$ identité.

Alors, $v(t) \in D(A)$ pour $t > 0$, et

$$A\, v(t) = t^{-1}(G(t)\, e - e);$$

par conséquent

$$t^\alpha A\, v(t) = t^{\alpha-1}(G(t)\, e - e)$$

appartient à $L^p(0, \infty; E)$, puisque $e \in E(p, \alpha, A)$.

Etudions maintenant $v' = dv/dt$; on déduit de (1.8) que

$$tv' + v = G(t)\, e, \text{ d'où}$$

$$v' = t^{-1}(G(t)\, e - e) + t^{-1} e - t^{-2} \int_0^t G(\sigma)\, e\, d\sigma,$$

et finalement

$$v' = A\, v - w, \tag{1.10}$$

[4] Ceci est une adaptation d'une construction de Gagliardo [1].

où

$$w(t) = t^{-2} \int_0^t (G(\sigma)\, e - e)\, d\sigma \,.$$

On va vérifier que

$$t^{\alpha}\, v' \in L^p(0\,,\infty\,;E). \tag{1.11}$$

On a déjà vérifié la propriété analogue pour $t^{\alpha}\, A\, v$; donc par (1.10) il suffit de considérer $t^{\alpha} w$. On a:

$$t^{\alpha} \| w(t) \| \leq t^{-1} \int_0^t t^{\alpha-1} \| G(\sigma)\, e - e \|\, d\sigma \leq$$

$$\leq t^{-1} \int_0^t \sigma^{\alpha-1} \| G(\sigma)\, e - e \|\, d\sigma \,,$$

et par conséquent, d'après l'inégalité de Hardy,

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha p} \| w(t) \|^p\, dt < p^p\,(p-1)^{-p} \int_0^{\infty} t^{(\alpha-1)p} \| G(t)\, e - e \|^p\, dt \,,$$

ce qui démontre que $t^{\alpha}\, w \in L^p(0\,,\infty\,;E)$ et par conséquent démontre (1.11).

Si maintenant nous considérons la fonction

$$u(t) = q(t)\, v(t)\,,$$

où $q(t)$ est une fois continûment différentiable dans $t \geq 0$, nulle pour t assez grand, et vérifie $q(0) = 1$, la fonction u appartient à l'espace $W(p\,,\alpha\,,A)$ et vérifie (1.7), ce qui achève la démonstration du théorème, sous réserve de vérifier le lemme 1.1. Ceci est immédiat: si $e \in D(A)$,

$$A \int_0^t G(\sigma)\, e\, d\sigma = \int_0^t A\; G(\sigma)\, e\, d\sigma = \int_0^t \frac{d}{d\sigma}(G(\sigma)\, e)\, d\sigma = G(t)\, e - e,$$

et l'opérateur A étant fermé, ceci est vrai quel que soit $e \in E$, d'où le Lemme.

Remarque 1.1. — On a en outre montré au point 2) de la démonstration qui précède que l'on peut choisir une application $e \to Pe\,(= u)$ linéaire continue de $E(p\,,\alpha\,,A)$ dans $W(p\,,\alpha\,,A)$ telle que $Pe(0) = e$.

REMARQUE 1.2. — Si $\alpha = 0$, il résulte de Gagliardo [2] et du théorème précédent que $E(p, 0, A) = (D(A))^{1-1/p} E^{1/p}$, $1 < p < \infty$, avec les notations de M. Gagliardo.

REMARQUE 1.3. — Les restrictions $-1/p < \alpha < 1 - 1/p$ sont nécessaires. En effet, supposons d'abord que $\alpha = 1 - 1/p$. Considérons la fonction $u(t) = q(t) |\log t|^{\beta} e$, où $e \in D(A)$, q est une fois continûment différentiable, nulle pour $t \geq 1/2$, $q(0) = 1$, et $0 < \beta < 1 - 1/p$. Alors $u(0)$ n'a pas de sens et néammoins $u \in W(p, \alpha, A)$. Contre exemple encore plus facile si $\alpha > 1 - 1/p$. Supposons maintenant que $\alpha = -1/p$. On choisit γ avec $0 < \gamma < 1/p$ et on note que

$$|\log(1/2)|^{\gamma} u(1/2) - |\log t|^{\gamma} u(t) = \int_t^{1/2} \frac{d}{d\sigma}(|\log \sigma|^{\gamma} u(\sigma))\, d\sigma ;$$

on vérifie que la fonction de droite est bornée dans E lorsque $t \to 0$, de sorte qu'il en est de même de $|\log t|^{\gamma} u(t)$, de sorte que $u(0) = 0$.

Même conclusion si $\alpha < -1/p$.

2. — Théorème de trace (II).

On va donner dans ce n° une variante du Théorème 1.1.

On donne ν opérateurs $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ non bornés dans E, chaque A_i vérifiant (SG) (n° 1) i. e. étant le générateur infinitésimal d'un semi groupe borné $G_i(t)$. On suppose que quels que soient i et j et s et $t \geq 0$, on a :

$$G_i(s)\, G_j(t) = G_j(t)\, G_i(s) . \tag{2.1}$$

Il en résulte que $G_j(t)$ applique $D(A_i)$ dans lui même, et que

$$A_i\, G_j(t)\, e = G_j(t)\, A_i\, e , \text{ pour } e \in D(A_i) . \tag{2.2}$$

DÉFINITION 2.1 — On désigne par $W(p, \alpha, A_1, \dots, A_\nu)$ l'espace des fonctions u vérifiant

$$t^{\alpha} u \in L^p(0, \infty; D(A_i)) , \quad i = 1, \dots, \nu , \tag{2.3}$$

et

$$t^{\alpha} u' \in L^p(0, \infty; E) . \tag{2.4}$$

Comme précédemment, $1 < p \leq \infty$, $-1/p < \alpha < 1 - 1/p$.

On munit $W(p, \alpha, A_1, \dots, A_\nu)$ de la norme

$$\left(\int_0^\infty t^{\alpha p}\left\{\| u(t) \|^p + \sum_{i=1}^{i=\nu} \| A_i u(t) \|^p + \| u'(t) \|^p\right\} dt\right)^{1/p}.$$

DÉFINITION 2.2. — On désigne par $E(p, \alpha, A_1, \dots, A_\nu)$ l'espace des $e \in E$ tels que

$$t^{\alpha-1}(G_i(t)e - e) \in L^p(0, \infty; E), \quad i = 1, \dots, \nu. \tag{2.5}$$

On munit cet espace de la norme

$$\| e \| + \sum_{i=1}^{i=\nu} \left(\int_0^\infty t^{(\alpha-1)p} \| G_i(t) e - e \|^p \, dt\right)^{1/p},$$

qui en fait un espace de Banach.

Si l'on désigne par $D(A_1, \dots, A_\nu)$ l'espace des $e \in D(A_i)$ pour $i = 1, \dots, \nu$ muni de la norme

$$\| e \| + \sum_{i=1}^{\nu} \| A_i e \|$$

qui en fait un espace de Banach, on a

$$D(A_1, \dots, A_\nu) \subset E(p, \alpha, A_1, \dots, A_\nu) \subset E.$$

On va maintenant démontrer le

THÉORÈME 2.1. — *On suppose que chaque A_i vérifie* (SG) n° 1 *et que* (2.1) *a lieu. L'application linéaire $u \to u(0)$ est continue de $W(p, \alpha, A_1, \dots, A_\nu)$* SUR $E(p, \alpha, A_1, \dots, A_\nu)$.

DÉMONSTRATION.

Compte tenu du Théorème 1.1, il y a seulement à montrer que l'application est *sur*. Soit donc e dans $E(p, \alpha, A_1, \dots, A_\nu)$. On va construire u dans l'espace $W(p, \alpha, A_1, \dots, A_\nu)$, vérifiant $u(0) = e$. On va poser

$$H_i(t) = t^{-1}\int_0^t G_i(\sigma)\, d\sigma,$$

et [4]

$$v(t) = H_1(t) H_2(t) \dots H_\nu(t) e.$$

On va se borner à $\nu = 2$, ce qui suffira. Notons que tous les $H_i(t)$ commutent aux $G_j(t)$; d'après le lemme 1.1,

$$A_i H_i(t) = t^{-1}(G_i(t) - I),$$

et enfin, comme $\| G_i(t) \| \leq M_i$, on a $\| H_i(t) \| \leq M_i$.
Ceci posé,

$$A_1 v(t) = H_2(t)\, t^{-1}(G_1(t)\, e - e)$$

donc

$$\| A_1 v(t) \| \leq M_2\, t^{-1} \| G_1(t)\, e - e \|,$$

ce qui montre déjà que

(2.6) $$t^\alpha A_1 v \in L^p(0, \infty; E), \quad i = 1, \dots, \nu.$$

Considérons maintenant $v'(t)$:

$$v'(t) = w_1(t) + w_2(t), \text{ où } w_1(t) = H_1'(t)\, H_2(t)\, e, \ w_2(t), = H_1(t)\, H_2'(t)\, e.$$

On va montrer que

(2.7) $$t^\alpha v' \in L^p(0, \infty; E).$$

Il suffit de montrer que

(2.8) $$t^\alpha w_1 \in L^p(0, \infty; E).$$

D'après le point 2) de la démonstration du Théorème 1.1, on a

$$H_i'(t) = A_i H_i(t) - t^{-2} \int_0^t (G_i(\sigma) - I)\, d\sigma,$$

donc

$$w_1 = w_1^1 + w_1^2, \quad \text{où}$$

$$w_1^1(t) = A_1 H_1(t)\, H_2(t)\, e, \ w_1^2(t) = t^{-2} \int_0^t (G_1(\sigma) - I)\, H_2(t)\, e\, d\sigma.$$

D'après (2.6), $t^\alpha w_1^1 \in L^p(0, \infty; E)$; il reste seulement à évaluer w_1^2; comme $\| H_2(t) \| \leq M_2$, on a :

$$\| w_1^2(t) \| \leq M_2\, t^{-2} \int_0^t \| G_1(\sigma) e - e \|\, d\sigma \leq M_2\, t^{-1-\alpha} \int_0^t \sigma^{-1+\alpha} \| G_1(\sigma)\, e - e \|\, d\sigma$$

de sorte que l'inégalité de Hardy montre que $t^\alpha w_1^2 \in L^p(0, \infty; E)$. Ceci démontre (2.7). On termine comme au Théorème 1.1 en considérant $u(t) = q(t)\, v(t)$.

On a des remarques analogues aux remarques 1.1, 1.2 et 1.3.

3. — Théorème d'interpolation.

On considère un deuxième espace de Banach E^1; dans cet espace, on donne une famille d'opérateurs $A_1^1, A_2^1, \dots, A_\nu^1$, ayant des propriétés analogues aux A_i, n° 2.

Téorème 3.1. — *On suppose que les A_i et A_i^1 sont générateurs infinitésimaux de semi groupes commutatifs. On donne $\pi \in \mathcal{L}(E; E_1)$ et $\in \mathcal{L}(D(A_i); D(A_i^1))$, pour $i = 1, \dots, \nu$. Dans ces conditions, quels que soient p et α, avec $1 < p < \infty$ et $-1/p < \alpha < 1 - 1/p$, on a :*

$$\pi \in \mathcal{L}(E(p, \alpha, A_1, \dots, A_\nu); E^1(p, \alpha, A_1^1, \dots, A_\nu^1)).$$

Démonstration (5).

Soit e donné dans $E(p, \alpha, A_1, \dots, A_\nu)$; soit $Pe \in W(p, \alpha, A_1, \dots, A_\nu)$ tel que l'application $e \to Pe$ soit continue et que $Pe(0) = e$ (cf. Remarque 1.1). Vu les propriétés de π, la fonction $\pi\, Pe$ est dans $W(p, \alpha, A_1^1, \dots, A_\nu^1)$ et d'après la partie directe du Théorème 2.1, $(\pi\, Pe)(0)$ appartient à l'espace $E^1(p, \alpha, A_1^1, \dots, A_\nu^1)$, l'application $e \to (\pi\, Pe)(0)$ étant continue. Mais $(\pi\, Pe)(0) = \pi\, e$, d'où le Théorème.

Cette démonstration conduit naturellement au problème suivant, que nous n'avons pas pu résoudre :

Problème 3.1. — Donner une démonstration *directe* du Théorème 3.1, i. e. sans passer par les théorèmes de trace. Il est très probable qu'une telle démonstration donnerait des résultats d'interpolation dans des espaces construits à l'aide des $G_i(t)$ mais n'ayant pas nécessairement d'interprétation comme espaces de traces.

4. — Applications (I).

Nous considérons l'espace $E = L^q(R^n)$; si $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, on considère

$$A_i = \partial / \partial x_i,$$

(5) Cette démonstration, donnée pour la commodité du Lecteur, est analogue à la démonstration du Théorème 4.1 de Lions [1]. Comme on a déjà signalé, l'idée de la démonstration a été dégagée en toute généralité par M. Aronszajn (communication personnelle).

générateur infinitésimal du groupe $G_i(t)$ défini par

$$G_i(t) f(x) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

On est visiblement dans les hypothèses du Théorème 2.1. L'espace $D(A_1, A_2, \dots, A_n)$ coincide avec l'espace de Sobolev [1], $H^{1,q}(R^n)$, des fonctions $f \in L^q(R^n)$ ainsi que leurs dérivées faibles $\partial f / \partial x_i$.

Interprétons l'espace $W(p, 0, A_1, \dots, A_n)$.

On considère dans $R^n_x \times R_t$ l'ouvert Ω:

$$\Omega = \{x, t \mid t > 0\}.$$

Dans ces conditions « $u \in W(p, 0, A_1, \dots, A_n)$ » équivaut à:

$$u, \frac{\partial}{\partial x_1} u \in L^p_t L^q_x(\Omega) \text{ (6)}, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u \in L^p_t L^q_x(\Omega). \tag{4.2}$$

Le Théorème 2.1, avec $\alpha = 0$, montre donc que *l'application* $u \to u(x, 0)$ *est continue de l'espace des* u *vérifiant* (4.1), (4.2) SUR *l'espace des fonction* f *telles que*

$$f \in L^q(R^n_x), \tag{4.3}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^\infty t^{-p} \left(\int_{R^n_x} |f(x_1, \dots, x_1 + t, \dots, x_n) - f(x)|^q \, dx \right)^{p/q} dt < \infty, \\ & \qquad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \right. \tag{4.4}$$

Pour $p = q$, c'est le Théorème de Gagliardo [1] (où en outre est résolu le cas $p = 1$).

REMARQUE 4.1.

Un résultat plus général (contenant Slobodetskii [1]) est annoncé dans Lions [3].

---

(6) $f \in L^p_t L^q_x(\Omega)$ équivaut à $\displaystyle\int_0^\infty \left(\int_{R^n_x} |f(x, t)|^q \, dx \right)^{p/q} dt < \infty.$

5. — Applications (II).

On donne E et les A_i comme au n^0 précédent. On va appliquer le Théorème 2.1 avec $\alpha \neq 0$, $-1/p < \alpha < 1 - 1/p$.

L'hypothèse « $u \in W(p, \alpha, A_1, \dots, A_n)$ » équivant à

$$t^\alpha u, \ t^\alpha \, \partial u / \partial x_i \in L_t^p L_x^q(\Omega), \tag{5.1}$$

et

$$t^\alpha \frac{\partial u}{\partial t} \in L_t^p L_x^q(\Omega). \tag{5.2}$$

Per conséquent *l'application* $u \to u(x, 0)$ *est continue de l'espace des* u *vérifiant* (5.1) *et* (5.2) SUR *l'espace des fonctions* f *telles que*

$$f \in L^q(R^n), \tag{5.3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^\infty t^{(\alpha-1)p} \left(\int_{R_x^n} | f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) - f(x) |^q \, dx \right)^{p/q} dt < \infty, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad i = 1, \dots, n. \end{array} \right. \tag{5.4}$$

Dans le cas particulier $p = q = 2$, $0 < \alpha < 1/2$, c'est un résultat de Vacharin [1].

REMARQUE 5.1

Les espaces de fonctions f vérifiant (5.3) et (5.4) ont été introduits par J. Peetre [1], Appendice; M. Peetre étudie le cas $p = 2$, $q \neq 2$, en vue de la résolution d'un problème d'hypo-ellipticité non linéaire.

6. — Applications (III).

Considèrons sur un ouvert Ω de R^n l'espace $E = L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$. On considère sur Ω une fonction $x \to M(x)$ continue positive, et le semi-groupe $G(t)$ défini par

$$G(t) f(x) = \exp(-tM(x)) f(x). \tag{6.1}$$

Le générateur infinitésimal est donné par:

$$A f(x) = -M(x) f(x), \tag{6.2}$$

pour les fonctions $f \in L^q(\Omega)$ telles que $Mf \in L^q(\Omega)$.

L'espace $E(p, \alpha, \Lambda)$ est alors l'espace des $f \in L^q(\Omega)$ telles que

$$\int_0^\infty t^{(\alpha-1)p} \left(\int_\Omega | G(t) f(x) - f(x) |^q \, dx \right)^{p/q} dt < \infty . \tag{6.3}$$

La condition (6.3) se simplifie si l'on choisit $p = q$. On obtient ceci : *la condition nécessaire et suffisante pour que* $f \in E(q, \alpha, \Lambda)$, $-1/q < \alpha < 1 - 1/q$ *est que* $f \in L^q(\Omega)$ *et que*

$$\int_\Omega M(x)^{(1-\alpha)q-1} \, | f(x) |^q \, dx < \infty . \tag{6.4}$$

On obtient ainsi les espaces intermédiaires entre les L^q pour des mesures différentes ; cf. E. Gagliardo [4]. Appliqué au cas çi dessus, le Théorème 3.1 donne une partie des résultats de E. M. Stein- G. Weiss [1] ; cf. également Gagliardo [4].

BIBLIOGRAPHIE

N. Aronszajn et K. T. Smith [1] *Theory of Bessel Potentials*, I et II, à paraître.

E. Gagliardo [1] *Caraterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili.* Rend. Sem. Mat. Padova 27 (1957), p. 284-305.

[2] *Interpolation d'espaces de Banach et applications.* (I). C. R. Acad. SC. Paris, t. 248 (1959), p. 1912-1914.

[3] *Interpolation d'espace de Banach et applications.* (II), (III), C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248 (1959), p.

[4] *Interpolazione di spazi di Banach e applicazioni.* « Edizioni Scientifiche », Genova, (1959), p. 1-57. (Le contenu de ce travail sera aussi inclu dans un article, avec le même tite, à paraitre prochainement aux « Ricerche di Natematica », Napoli).

G. Hardy-J. E. Littlewood-G. Polya [1] *Inequalities.* Cambridge University Press 1934.

E. Hille-R. S. Phillips [1] *Functional Analysis and Semi groups.* Amer. Math. Soc. Coll. Pub. XXXI (1957).

J. L. Lions [1] *Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications.* Bull. Math. R. P. R. Bucarest. t. 2 (50), N^0 4 — (1959)

[2] *Distributions semi groupes.* A paraître.

[3] *Un théorème de traee; applications* — C. R. Acad. Sc. Paris. t. 249 (1959), p. 2259-2261.

J. Peetre [1] *Théorèmes de régularité pour quelques classes d'opérateurs différentiels.* Lund (1959), p. 1-122.

L. Schwartz [1] *Théorie des distribntions à valeurs vectorielles.* Annales Inst. Fourier (I), t. VII, p. 1-141 (1957); (II), t. VIII, p. 1-209 (1958).

L. N. Slobodetskii [1] *Evaluations dans L^p des solutions de systèmes ellipliques.* Doklady. t. 123 (1958), p. 616-619.

S. L. Sobolev [1] *Applications de l'analyse fonctionnelle à la Physique Mathématique.* Léningrad. 1950.

E. M. Stein et G. Weiss [1] *Interpolation of operators with change of measures.* Trans. Amer. Math. Soc. 87 (1958) p. 159-172.

A. A. Vacharin [1] *Propriétés aux limites de certaines classes de fonctions....* Isvestia Akad. Nauk, t. 23 (1959), p. 421-454.