Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

J. L. Lions

Théorèmes de trace et d'interpolation (II)

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 14, nº 4 (1960), p. 317-331

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1960_3_14_4_317_0>

THÉORÈMES DE TRACE ET D'INTERPOLATION (II). (*)

J. L. LIONS (Nancy)

Introduction.

Soit E un espace de Banach, et A le générateur infinitésimal dans E d'un groupe fortement continu et borné. On introduit (N^0 2) des espaces intermédiaires entre $D(A^2)$ (domaine de A^2) et E; on interprète ces espaces comme espaces de traces (N^0 3), par une technique du même genre que celle utilisée dans Lions [1]. On déduit de là des théorèmes d'interpolation (N^0 4). Des compléments sur les espaces intermédiaires introduits (ainsi que des problèmes non résolus) sont signalés au N^0 5.

On peut réitérer le procédé (remarque valable pour Lions [1]): on introduit des espaces intermédiaires entre $D(A^4)$ et $D(A^2)$, disons $S_0^1(p, \alpha)$, et ces espaces intermédiaires entre $D(A)$ et E, disons $S_0(p, \alpha)$; par un procédé analogue à celui du N^0 2 on introduit alors des espaces intermédiaires entre $S_0^1(p, \alpha)$ et $S_0(p, \alpha)$, espaces qui ont encore des propriétés d'interpolation (N^0 4) et ainsi de suite. Une étude systématique de cette situation sera faite ultérieurement.

1. Préliminaires.

Soit E un espace de Banach complexe, d'élément générique e, de norme $\| e \|$. Dans E on donne on opérateur non borné A, sur lequel on fera l'hypothèse suivante (cf. E. Hille-R. S. Phillips [1]):

$$(1.1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} A \text{ est générateur infinitésimal d'un groupe } G(t) \text{ fortement} \\ \text{continu dans } E \text{ et borné;} \end{array} \right.$$

(*) L'article (I) est paru dans ce Journal, t. XIlI (1959). p. 389-403.

autrement dit: pour tout $e \in E$, la fonction $t \to G(t)e$ est continue de R dans E fort, $G(0)e = e$, et $\| G(t) \| \leq M$, $\| G(t) \|$ désignant la norme de $G(t)$ dans l'espace $\mathcal{L}(E; E)$ des applications linéaires continues de E dans lui même (de façon générale, on désignera par $\mathcal{L}(X; Y)$ l'espace des applications linéaires continues de X dans Y).

On désigne par $D(A)$ le domaine de A, et par $D(A^2)$ l'espace des $e \in D(A)$ tels que $Ae \in D(A)$ (et $A(Ae) = A^2 e$); $D(A^2)$ est le domaine de l'opérateur A^2; si on munit cet espace de la norme $\|e\| + \|Ae\| + \|A^2 e\|$, on obtient un espace de Banach.

Mais comme $G(t)$ est borné, l'opérateur $(A - I)^{-1}$ est borné dans E; si $e \in D(A^2)$, on déduit donc de l'égalité

$$Ae = (A - I)^{-1}(A^2 - I)e - e$$

que

$$\| Ae \| \leq c_1 (\| e \| + \| A^2 e \|),$$

de sorte que la norme

$$\| e \| + \| A^2 e \|$$

est équivalente sur $D(A^2)$ à la première norme introduite. Nous utiliserons désormais cette dernière norme.

On posera

$$\check{G}(t) = G(-t);$$

G_+ désigne la fonction (à valeurs dans $\mathcal{L}(E; E)$) égale à 0 pour $t < 0$ et à $G(t)$ pour $t > 0$; $\check{G}_+$ est la fonction nulle pour $t < 0$ et égale à $\check{G}(t)$ pour $t > 0$; on pose enfin

$$H = G_+ + \check{G}_+. \tag{1.2}$$

Si l'on considère G_+ comme une distribution vectorielle (cf. Schwartz [1]), on constate que c'est une distribution en t à valeurs dans $\mathcal{L}(E; D(A))$ et que

$$-AG_+ + DG_+ = \delta \otimes I, \qquad D = d/dt, \tag{1.3}$$

où δ désigne la masse de Dirac à l'origine.

Comme $-AG + DG = 0$, on en déduit $A\check{G} + D\check{G} = 0$, et par conséquent

$$A\check{G}_+ + D\check{G}_+ = \delta \otimes I. \tag{1.4}$$

De (1.3) et (1.4) on déduit

$$-\Lambda H + D(G_{+} - \check{G}_{+}) = 0, \tag{1.5}$$

$$-\Lambda(G_{+} - \check{G}_{+}) + DH = 2\delta \otimes I. \tag{1.6}$$

On déduit de (1.5) que ΛH est une distribution à valeurs dans $\mathcal{L}(E; D(\Lambda))$, donc que H est une distribution à valeurs dans $\mathcal{L}(E; D(\Lambda^2))$.

Appliquons alors Λ à (1.5); tenant compte de (1.6) il vient

$$-\Lambda^2 H + D^2 H = 2\delta' \otimes I, \tag{1.7}$$

δ' étant la dérivée de δ.

De façon générale désignons par Y_k la fonction de t définie par $Y_k(t) = 0$ si $t < 0$, $= t^{k-1}/(k-1)!$ si $t > 0$, k entier.

On déduit de (1.7):

$$-\Lambda^2\left(\frac{1}{2} Y_1 * H\right) + D^2\left(\frac{1}{2} Y_1 * H\right) = \delta \otimes I. \tag{1.8}$$

2. Espaces $S_0(p, \alpha)$, $S_1(p, \alpha)$.

De façon générale, on désigne par $L^p(a, b; E)$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables définies sur (a, b), à valeurs dans E, et telles que

$$\int_a^b \| f(t) \|^p \, dt < \infty.$$

DÉFINITION 2.1. Soit p avec $1 < p \leq \infty$, et α avec

$$1/p + \alpha = \vartheta \in \,]0,2[\, .$$

On désigne par $S_0(p, \alpha)$ l'espace des $e \in E$, tels que

$$t^{\alpha-2}(G(t)e + G(-t)e - 2e) \in L^p(0, \infty; E). \tag{2.1}$$

Muni de la norme

$$\| e \|_{S_0(p,\alpha)} = \left(\| e \|^p + \int_0^\infty t^{(\alpha-2)p} \| G(t)e + G(-t)e - 2e \|^p \, dt\right)^{1/p},$$

c'est un espace de Banach.

DÉFINITION 2.2. Soit p avec $1 < p \leq \infty$, et α avec

$$1/p + \alpha = \vartheta \in]0,1[.$$

On désigne par $S_1(p, \alpha)$ l'espace des $e \in E$ tels que

$$t^{\alpha-2} \int_0^t (G(\sigma) e + G(-\sigma) e - 2e) \, d\sigma \in L^p(0, \infty ; E). \tag{2.2}$$

Muni de la norme

$$\| e \|_{S_1(p,\alpha)} = \left(\| e \|^p + \int_0^\infty t^{(\alpha-2)p} \left\| \int_0^t (G(\sigma) e + G(-\sigma) e - 2e) \, d\sigma \right\|^p dt \right)^{1/p},$$

c'est un espace de Banach.

Vérifions le

LEMME 2.1. *On a les inclusions algébriques et topologiques :*

(i) si $0 < \vartheta < 2$, $D(A^2) \subset S_0(p, \alpha) \subset E$;

(ii) si $0 < \vartheta < 1$, $D(A) \subset S_1(p, \alpha) \subset E$.

(on verra un résultat plus précis que le (i) au N^0 5)

DÉMONSTRATION.

(i) Soit $e \in D(A^2)$. On a :

$$G(t) e + G(-t) e - 2e = H(t) e - 2e = \int_0^t (t - \sigma) H(\sigma) A^2 e \, d\sigma,$$

d'où

$$\| H(t) e - 2e \| \leq c_1 \| A^2 e \| t^2,$$

de sorte que

$$t^{\alpha-2} \| H(t) e - 2e \| \leq c_1 t^\alpha \| A^2 e \|,$$

et ceci est dans $L^p(0, 1)$, car $\alpha + 1/p > 0$.

Pour $t > 1$, on utilise la majoration :

$$t^{\alpha-2} \| H(t) e - 2e \| \leq c_2 t^{\alpha-2}$$

(puisque $\| G(t) \|$ est borné), et la fonction $t^{\alpha-2}$ est dans $L^p(1, \infty)$ car $\vartheta < 2$.

(ii) Pour $e \in D(\Lambda)$ on a :

$$\| H(t)\, e - 2e \| \leq c_3 \| \Lambda e \| \, t,$$

et on raisonne comme au (i).

3. Théorème de traces.

On introduit un espace fonctionnel $V(p, \alpha)$ qui va nous permettre d'interpréter les espaces $S_i(p, \alpha)$ comme des espaces de traces.

DÉFINITION 3.1. Soit p avec $1 < p \leq \infty$, et $1/p + \alpha = \vartheta \in]0,1[$. On désigne par $V(p, \alpha)$ l'espace des (classes de) fonctions u telles que

$$t^\alpha u \in L^p(0, \infty; D(\Lambda^2)), \tag{3.1}$$

$$t^\alpha u'' \in L^p(0, \infty; E), \tag{3.2}$$

où $u'' = d^2u/dt^2$ est pris au sens des distributions en t sur l'ouvert $t > 0$, à valeurs dans E (en effet, par (3.1), la fonction u est localement sommable pour $t > 0$ à valeurs dans E, donc définit une distribution sur $]0, \infty[$ à valeurs dans E). On munit cet espace de la norme

$$\| u \|_{V(p,\alpha)} = \left(\int_0^\infty t^{\alpha p} (\| u(t) \|^p_{D(\Lambda^2)} + \| u''(t) \|^p)\, dt \right)^{1/p}$$

qui en fait un espace de Banach.

Il résulte de (3.1) et (3.2) que, pour tout T fini, u est dans $L^1(0, T; D(\Lambda^2))$, et $u'' \in L^1(0, T; E)$; il en résulte que $u(0)$ et $u'(0)$ sont définis de façon unique, l'application $u \to \{u(0), u'(0)\}$ étant continue de $V(p, \alpha)$ dans $E \times E$. De façon précise :

THÉORÈME 3.1. *On suppose que* (1.1) *a lieu. On donne p avec $1 < p \leq \infty$, et α avec $1/p + \alpha = \vartheta \in]0,1[$. Alors, pour u dans $V(p, \alpha)$, on a*

$$u(0) \in S_0(p, \alpha), \tag{3.3}$$

$$u'(0) \in S_1(p, \alpha), \tag{3.4}$$

l'application $u \to \{u(0), u'(0)\}$ étant continue de $V(p, \alpha)$ dans $S_0(p, \alpha) \times S_1(p, \alpha)$. Si $\{e_0, e_1\}$ est donné dans $S_0(p, \alpha) \times S_1(p, \alpha)$ il existe $u(e_0, e_1) = u$ dans $V(p, \alpha)$, vérifiant $u(0) = e_0$, $u'(0) = e_1$, l'application $\{e_0, e_1\} \to u$ étant continue de $S_0(p, \alpha) \times S_1(p, \alpha)$ dans $V(p, \alpha)$.

DÉMONSTRATION.

1) Soit u donnée dans $V(p, \alpha)$; alors u^* définie par $u^*(t) = 2u(t/2) - u(t)$ est également dans $V(p, \alpha)$, et $u^*(0) = u(0)$, $Du^*(0) = 0$. Donc pour définir $u(0) = e_0$ on peut toujours supposer que $u'(0) = 0$.

Posons $-\Lambda^2 u + D^2 u = f$; $t^\alpha f \in L^p(0, \infty ; E)$.

Désignons par $\tilde{u}, \tilde{f}, \ldots$, la fonction prolongée de $u, f, \ldots$ par 0 pour $t < 0$. Alors, effectuant les dérivations au sens des distributions à valeurs dans E, on obtient

$$-\Lambda^2 \tilde{u} + D^2 \tilde{u} = \tilde{f} + \delta \otimes e_0 .$$

Utilisant (1.8) on en déduit

$$\tilde{u} = \frac{1}{2} Y_1 * H * \tilde{f} + \frac{1}{2} H(t)\, e_0$$

d'où

$$H(t)\, e_0 - e_0 = 2(u(t) - u(0)) - Y_1 * H * \tilde{f}(t), \quad t > 0,$$

et par conséquent

$$H(t)\, e_0 - 2e_0 = 2\psi_1(t) - \psi_2(t), \tag{3.5}$$

avec

$$\psi_1(t) = \int_0^t (t - \sigma)\, u''(\sigma)\, d\sigma, \quad \psi_2(t) = Y_1 * H * \tilde{f}(t). \tag{3.6}$$

On va vérifier que

$$\left\{ \begin{array}{l} t^{\alpha-2}\, \psi_i(t) \in L^p(0, \infty ; E),\ i = 1, 2, \text{ et dépend continûment de } u \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{dans } L^p(0, \infty ; E), \end{array} \right. \tag{3.7}$$

ce qui démontrera (3.3).

Pour cela on note que $t^\alpha u'' = v$ est dans $L^p(0, \infty ; E)$, de sorte que

$$t^{\alpha-2} \| \psi_1(t) \| \leq t^{\alpha-2} \int_0^t (t - \sigma)\, \sigma^{-\alpha} \| v(\sigma) \|\, d\sigma \leq t^{\alpha-1} \int_0^t \sigma^{-\alpha} \| v(\sigma) \|\, d\sigma$$

et d'après une variante d'une inégalité de Hardy (cf. Hardy Littlewood et

Polya [1], p. 245, (9.9.8)) on a:

$$\int_0^\infty t^{(\alpha-2)p} \| \psi_1(t) \|^p \, dt \leq c_1 \int_0^\infty \| v(t) \|^p \, dt ;$$

ensuite, $\| Y_1 * H(t) \| \leq c_2 t$ (norme dans $\mathcal{L}(E; E)$), donc

$$\| \psi_2(t) \| \leq c_2 \int_0^t (t-\sigma) \| f(\sigma) \| \, d\sigma,$$

et on conclut comme pour ψ_1.

2) Soit encore u donnée dans $V(p, \alpha)$ et montrons (3.4). On introduit $u^{**}(t) = 2(u(t) - u(t/2))$; u^{**} est dans $V(p, \alpha)$, $u^{**}(0) = 0$ et $Du^{**}(0) = u'(0)$; donc pour définir $u'(0) = e_1$, on peut toujours supposer que $u(0) = 0$. Alors

$$-\Lambda^2 \tilde{u} + D^2 \tilde{u} = \tilde{f} + \delta \otimes e_1,$$

d'où

$$\tilde{u} = \frac{1}{2} Y_1 * H * \tilde{f} + \frac{1}{2} Y_1 * H . e_1 ;$$

on en déduit

$$Y_1 * H(t) . e_1 - 2t\, e_1 = 2\psi_1(t) - \psi_2(t),$$

d'où le résultat (3.4) d'après (3.7).

3) Soit maintenant e_0 donné dans $S_0(p, \alpha)$. On va construire u, élément de $V(p, \alpha)$ avec $u(0) = e_0$, $u'(0) = 0$, et dépendant linéairement et continûment de e_0. On pose:

$$K(t) = t^{-2}(Y_2 * H(t)), \tag{3.8}$$

$$v(t) = K(t) . e_0 . \tag{3.9}$$

Si $e \in D(\Lambda^2)$, on a

$\Lambda^2 K(t) \cdot e = t^{-2}(Y_2 * \Lambda^2 H \cdot e)$, ce qui utilisant (1.7), donne

$\Lambda^2 K(t) \cdot e = t^{-2}(Y_2 * (D^2 H - 2\delta' \otimes I) e) = t^{-2}(H(t) e - 2e)$;

par prolongement par continuité cette relation est valable pour e quelconque dans E. Si maintenant $e = e_0 \in S_0(p, \alpha)$, il résulte de cette formule que $t^\alpha \Lambda^2 v(t) \in L^p(0, \infty; E)$. Comme $t \to K(t) \cdot e_0$ est continue de $t \geq 0$ dans E, on a donc

$$t^{\alpha} v \in L^p(0, T; D(A^2)) \tag{3.10}$$

pour tout T fini.

On vérifie ensuite la formule :

$$D^2 K(t) = t^{-2}(H - 2I) - 4t^{-3} Y_1 * (H - 2I) + 6t^{-4} Y_2 * (H - 2I).$$

Pour e_0 donné dans $S_0(p, \alpha)$ on va vérifier que

$$\left\{ \begin{aligned} \chi_1 &= t^{\alpha-3}(Y_1 * (H - 2I)\, e_0) \in L^p(0, \infty; E), \\ \chi_2 &= t^{\alpha-4}(Y_2 * (H - 2I)\, e_0) \in L^p(0, \infty; E). \end{aligned} \right. \tag{3.11}$$

Ceci entrainera

$$t^{\alpha} D^2 v \in L^p(0, \infty; E). \tag{3.12}$$

Or, à des constantes multiplicatives près, les fonctions $\chi_i(t)$ sont majorées en norme dans E par

$$t^{\alpha-3} \int_0^t \| H(\sigma) e_0 - 2e_0 \| \, d\sigma.$$

Or, par hypothèse,

$$\| H(t) e_0 - 2e_0 \| = t^{2-\alpha} m(t), \quad m \in L^p(0, \infty),$$

donc

$$\| \chi_i(t) \| \leq c_3\, t^{\alpha-3} \int_0^t \sigma^{2-\alpha} m(\sigma)\, d\sigma \leq c_3\, t^{-1} \int_0^t m(\sigma)\, d\sigma,$$

et (3.11) suit d'après l'inégalité de Hardy.

De (3.10) et (3.12) on déduit que la fonction

$$u(t) = q(t)\, v(t),$$

$q(t)$ deux fois continûment différentiable dans $t \geq 0$, à support compact et avec $q(0) = 1$, $q'(0) = 0$, vérifie : $u \in V(p, \alpha)$, et dépend continûment de e_0.

On vérifie que $u(0) = e_0$ et $u'(0) = 0$ (si cette dernière propriété n'avait pas lieu, il suffirait d'ailleurs de remplacer u par u^*, u^* étant défini comme au 1)). On a donc construit la fonction u avec les propriétés voulues.

4) On donne maintenant e_1 dans $S_1(p, \alpha)$, et on va construire u dans $V(p, \alpha)$, dépendant continûment de e_1, avec $u(0) = 0$, $u'(0) = e_1$, ce qui achèvera la démonstration du Théorème.

On introduit cette fois

$$L(t) = t^{-2}(Y_3 * H), \tag{3.13}$$

et

$$w(t) = L(t)\, e_1 . \tag{3.14}$$

Si $e \in D(\Lambda^2)$, on a :

$$L(t) \cdot e = t^{-2}(Y_3 * \Lambda^2 H) \cdot e = t^{-3}(Y_3 * (D^2 H - 2\delta' \otimes I)) \cdot e =$$

$$= t^{-3}(Y_1 * (H(t)\, e - 2e)),$$

et par prolongement par continuité ceci vaut pour tout e dans E ; par conséquent $t^\alpha \Lambda^2 w \in L^p(0, \infty ; E)$, d'où l'on déduit que

$$t^\alpha w \in L^p(0, T ; D(\Lambda^2)) \tag{3.15}$$

pour tout T fini.

On note ensuite ceci :

$$D^2 L(t)\, e_1 = t^{-2}(Y_1 * (H - 2I))\, e_1 - 4t^{-3}(Y_2 * (H - 2I))\, e_1 +$$

$$+ 6\, t^{-4}(Y_3 * (H - 2I))\, e_1 .$$

On en déduit, comme au point 3) de la démonstration, que

$$t^\alpha D^2 w \in L^p(0, \infty ; E). \tag{3.16}$$

Introduisant $q(t)$ comme çi dessus, on voit que la fonction

$$U(t) = q(t)\, w(t)$$

est dans $V(p, \alpha)$.

On vérifie ensuite que $w(0) = 0$, $w'(0) = (1/3)\, e_1$ (pour cela, noter que

$$w'(t) = -2t^{-3}\, Y_3 * (He_1 - 2e_1) + t^{-2}\, Y_2 * (He_1 - 2e_1) + \frac{1}{3}\, e_1 .$$

Par conséquent la fonction $u(t) = 3U(t)$ répond à la question, et le Théorème 3.1 est démontré.

On va maintenant généraliser la situation précédente en considérant une famille $A_1, \dots, A_\nu$ d'opérateurs non bornés, avec

$$(3.17) \quad \begin{cases} \text{chaque } A_i \text{ est générateur infinitésimal d'un groupe } G_i(t) \\ \text{fortement continu et borné, et } G_i(s)\, G_j(t) = G_j(t)\, G_i(s), \\ \text{pour tout } i, j, s \text{ et } t. \end{cases}$$

On désigne alors par $S_0(p, \alpha) = S_0(p, \alpha\,;\, A_1, \dots, A_\nu)$ l'espace des $e \in E$ tels que

$$t^{\alpha-2}(G_i(t)\, e + G_i(-t)\, e - 2e) \in L^p(0, \infty\,;\, E), \ i = 1, \dots, \nu.$$

On le munit de la norme

$$\| e \| + \Sigma_{i=1}^{i=\nu} \left(\int_0^\infty t^{(\alpha-2)p} \| G_i(t)\, e + G_i(-t)\, e - 2e \|^p \, dt \right)^{1/p}$$

qui en fait un espace de Banach.

On désigne de même par $S_1(p, \alpha) = S_1(p, \alpha\,;\, A_1, \dots, A_\nu)$ l'espace des $e \in E$ tels que

$$t^{\alpha-2} \int_0^t (G_i(\sigma) + G_i(-\sigma) - 2I)\, e\, d\sigma \in L^p(0, \infty\,;\, E), \ i = 1, \dots, \nu,$$

muni de la norme analogue au cas $\nu = 1$, qui en fait un espace de Banach.

On désigne ensuite par $D(A^2)$ l'espace des $e \in D(A_i^2)$ pour tout i, muni de la norme $\| e \| + \Sigma_i \| A_i^2 e \|$. On désigne alors par $V(p, \alpha)$ l'espace des u telles que $t^\alpha u \in L^p(0, \infty\,;\, D(A^2))$ et

$$t^\alpha u'' \in L^p(0, \infty\,;\, E), \ 1 < p \leq \infty, \ 1/p + \alpha = \theta \in]\, 0,1\, [\, .$$

Ceci posé

THÉORÈME 3.2. *On suppose* (3.17) *et les conditions du Théorème* 3.1 *sont vérifiées. On a alors un énoncé analogue à celui du Théorème* 3.1.

La démonstration se fait, à partir de la démonstration du Théorème 3.1, comme pour le Théorème 2.1 de Lions [1].

4. Théorème d'interpolation.

THÉORÈME 4.1. *Soit E^1 un deuxième espace de Banach et $A_1^1, \dots, A_\nu^1$, une deuxième famille d'opérateurs non bornés dans E^1. On suppose que les A_i*

vérifient (3.17), *et que les* A_i^1 *vérifient l'hypothèse analogue dans* E^1. *On donne un opérateur* π, *linéaire continu de* E *dans* E^1 *et de* $D(A^2)$ *dans* $D((A^1)^2)$. *Dans ces conditions, pour* p *et* α *donnés avec* $1 < p \leq \infty$, $1/p + \alpha = \theta \in]0,1[$,
(*i*) π *est un opérateur linéaire continu de* $S_0(p, \alpha; A_i)$ *dans* $S_0(p, \alpha; A_i^1)$;
(*ii*) π *est un opérateur linéaire continu de* $S_1(p, \alpha; A_i)$ *dans* $S_1(p, \alpha; A_i^1)$.

La démonstration est exactement analogue à celle du Théorème 3.1 de Lions [1]; on utilise cette fois le Théorème 3.2. Par exemple, si e est donné dans $S_0(p, \alpha; A_i)$, on considère u, élément de $V(p, \alpha; A_i)$, dépendant linéairement et continûment de e, avec $u(0) = e$; alors $\pi(u(t))$ est, grâce aux hypothèses faites sur π, un élément de $V(p, \alpha; A_i^1)$, soit $v(t) = \pi(u(t))$; alors $v(0)$ est dans $S_0(p, \alpha; A_i^1)$, et dépend continûment de e; comme $v(0) = \pi e$, on a (*i*); même chose pour (*ii*).

REMARQUE 4.1.

Munissons $S_0(p, \alpha; A_i)$ et $S_1(p, \alpha; A_i)$ des normes

$$|||e|||_{S_0(p,\alpha;A_i)} = \text{inf.} \, \|u\|_{V(p,\alpha;A_i)}, \; u(0) = e,$$

$$|||e|||_{S_1(p,\alpha;A_i)} = \text{inf.} \, \|u\|_{V(p,\alpha;A_i)}, \; u'(0) = e.$$

On a là des normes équivalentes aux normes des définitions 2.1 et 2.2. Il serait intéressant de pouvoir calculer explicitement ces nouvelles normes à l'aide des quantités:

$$\|e\|, \left(\int_0^\infty t^{(\alpha-2)p} \, \|G(t)e + G(-t)e - 2e\|^p \, dt \right)^{1/p}$$

et

$$\left(\int_0^\infty t^{(\alpha-2)p} \left\| \int_0^t (G(\sigma)e + G(-\sigma)e - 2e) \, d\sigma \right\|^p dt \right)^{1/p};$$

on a en effet le résultat suivant: désignons par M_1 la norme de π dans $\mathcal{L}(E, E^1)$, et M_0 la norme de π dans $\mathcal{L}(D(A^2); D((A')^2))$; alors la norme de π dans $\mathcal{L}(S_0(p, \alpha; A_i); S_0(p, \alpha; A_i^1))$ (resp. dans $\mathcal{L}(S_1(p,\alpha; A_i); S_1(p,\alpha; A_i^1))$ — *ces espaces étant munis des normes correspondant à* $|||e|||_{S_0(p,\alpha;A_i)}$ *et* $|||e|||_{S_1(p,\alpha;A_i)}$ — est majorée par $M_0^{1-\vartheta/2} M_1^{\vartheta/2}$ (resp. par $M_0^{(1-\vartheta)/2} M_1^{(1+\vartheta)/2}$). En effet, soit e dans $S_0(p, \alpha; A_i)$; alors

$$|||\pi e|||_{S_0(p,\alpha;A_i^1)} = \inf_{v(0)=\pi e} \|v\|_{V(p,\alpha;A_i^1)} \leq \inf_{u(0)=e} \|\pi(u(t))\|_{V(p,\alpha;A_i^1)}$$
$$\leq \inf_{u(0)=e} (M_0 X(u) + M_1 Y(u)),$$

où

$$X(u) = \left(\int_0^\infty t^{\alpha p} \, \| u(t) \|^p_{D(A^2)} \, dt \right)^{1/p},$$

$$Y(u) = \left(\int_0^\infty t^{\alpha p} \, \| u''(t) \|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Choisissons u dans $V(p, \alpha; A_i)$ avec $u(0) = e$. Alors $u_\lambda(t) = u(\lambda t)$, $\lambda > 0$, a la même propriété. Donc

$$||| \pi e |||_{S_0(p,\alpha;A_i^1)} \leq \inf_\lambda . (M_0 X(u_\lambda) + M_1 Y(u_\lambda)) =$$

$$= \inf_\lambda . (\lambda^{-\vartheta} M_0 X(u) + \lambda^{2-\vartheta} M_1 Y(u)) \leq M_0^{1-\vartheta/2} M_1^{\vartheta/2} X(u)^{1-\vartheta/2} \, Y(u)^{\vartheta/2} \leq$$

$$\leq M_0^{1-\vartheta/2} M_1^{\vartheta/2} (X(u) + Y(u)),$$

et ceci quel que soit u avec $u(0) = e$, donc

$$||| \pi e |||_{S_0(p,\alpha;A_i^1)} \leq M_0^{1-\vartheta/2} \, M_1^{\vartheta/2} \, ||| e |||_{S_0(p,\alpha;A_i)},$$

d'où notre assertion. On obtient de même la deuxième majoration, en utilisant cette fois au lieu de u_λ la fonction $u_\lambda^* = \lambda^{-1} u(\lambda t)$, $\lambda > 0$. On peut faire une remarque analogue à propos du Théorème 3.1 de Lions [1].

REMARQUE 4.2.

Nous ignorons si la conclusion (i) du Théorème 4.1 est valable pour

$$\vartheta = 1/p + \alpha \in [1,2[.$$

5. Nouvelle définition de $S_0(p, \alpha)$.

On a introduit dans Lions [1] *l'espace* $T(p, \alpha)$ des $e \in E$ tels que

$$t^{\alpha-1} (G(t) e - e) \in L^p(0, \infty; E); \tag{5.1}$$

c'est un espace de Banach pour la norme

$$\| e \| + \left(\int_0^\infty t^{(\alpha-1)p} \, \| G(t) e - e \|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

(Notons que cet espace est introduit et étudié dans Lions, loc. cit., en supposant que $G(t)$ est un semi groupe et non un groupe, comme nous supposons toujours dans cet article).

Introduisons (pour le cas général, cf. Lions [2]) l'espace $T^1(p, \alpha)$ des $e \in D(\Lambda)$, tels que $\Lambda e \in T(p, \alpha)$, muni de la norme $\| e \| + \| \Lambda e \|_{T(p,\alpha)}$ (qui en fait un espace de Banach).

THÉORÈME 5.1. *Pour* $0 < \vartheta < 1$, *l'espace* $S_0(p, \alpha)$ *coincide* (algébriquement et topologiquement) *avec* $T^1(p, \alpha)$, *les hypothèses étant celles du Théorème* 3.1.

Tout ceci est encore valable lorsqu'on considère une famille $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_\nu$ de générateurs infinitésimaux.

DÉMONSTRATION.

1) Soit e dans $S_0(p, \alpha)$; alors

$$t^{\alpha-2}(G(t)e + G(-t)e - 2e) = f_1(t) \in L^p(0, \infty; E),$$

et comme $G(t)$ est borné

$$G(t) f_1(t) = t^{\alpha-2}(G(2t)e - 2G(t)e + e) \in L^p(0, \infty; E).$$

Donc

$$t^{\alpha-2}(G(t)e - 2G(t/2)e + e) = f(t) \in L^p(0, \infty; E).$$

Posant $u(t) = t^{-1}(G(t)e - e)$, on a donc

$$t^{\alpha-1}(u(t) - u(t/2)) = f(t) \in L^p(0, \infty; E) \tag{5.2}$$

(cette transformation est analogue à celle faite dans Zygmund [1], Théorème 3.4). On déduit de là:

$$t^{\alpha-1}(u(t/2) - u(t/2^2)) = 2^{\alpha-1} f(t/2), \text{ etc} \ldots,$$

et posant

$$v_n(t) = t^{\alpha-1}(u(t) - u(t/2^n)), \tag{5.3}$$

il vient

$$v_n(t) - v_{n+q}(t) = -[2^{n(\alpha-1)} f(t/2^n) + \ldots + 2^{(n+q-1)(\alpha-1)} f(t/2^{n+q-1})],$$

d'où

$$\| v_n - v_{n+q} \|_{L^p(0,\infty;E)} \leq (\textstyle\sum_{k=0}^{q-1} 2^{-(n+k)(1-\vartheta)}) \| f \|_{L^p(0,\infty,E)} .$$

Par conséquent

$$v_n \to g \text{ dans } L^p(0, \infty; E); \tag{5.4}$$

on peut extraire v_{n_i} telle que $v_{n_i}(t) \to g(t)\, p \cdot p.$, disons pour $t \notin Z$, Z ensemble de mesure nulle sur $(0, \infty)$. Donc, pour $t \notin Z$, > 0, $u(t/2^{n_i}) \to u(t) - t^{1-\alpha} g(t)$ dans E fort lorsque $n_i \to \infty$, ce qui montre que $e \in D(A)$, et que $u(t/2^{n_i}) \to A e$ dans E. Alors

$$v_{n_i}(t) \to t^{\alpha-1}(u(t) - Ae) \text{ p.p.},$$

donc

$$t^{\alpha-1}(t^{-1}(G(t)\, e - e) - Ae) = t^{\alpha-1}(u(t) = Ae) - g(t), \tag{5.5}$$

avec $g \in L^p(0, \infty\,; E)$. On en déduit que

$$t^{\alpha-1}(t^{-1}(G(2t)\, e - G(t)\, e) - G(t)\, Ae) = G(t)\, g(t) \in L^p(0, \infty\,; E),$$

et alors

$$t^{\alpha-1}(G(t)\, Ae - Ae) = t^{\alpha-1}(G(t)\, Ae - t^{-1}(G(2t)\, e - G(t)\, e) +$$
$$+ t^{\alpha-1}(t^{-1}(G(t)\, e - e) - Ae) +$$
$$+ t^{\alpha-2}(G(2t)\, e - 2G(t)\, e + e)$$

montre que $t^{\alpha-1}(G(t)\, Ae - Ae) \in L^p(0, \infty\,; E)$, ce qui montre que $Ae \in T(p, \alpha)$, donc que $e \in T^1(p, \alpha)$.

2) Si $e \in T^1(p, \alpha)$, on déduit de la formule

$$G(t)\, e + G(-t)\, e - 2e = G(-t) \int_0^t G(\sigma)(G(t)\, Ae - Ae)\, d\sigma$$

que

$$\| G(t)\, e + G(-t)\, e - 2e \| \leq tM^2 \| G(t)\, Ae - Ae \| \; (si \; \| G(t) \| \leq M)$$

d'où résulte que $t^{\alpha-2}(G(t)\, e + G(-t)\, e - 2e) \in L^p(0, \infty\,; E)$

Le théoréme suit.

REMARQUE 5.1.

Il résulte de Lions [2] que $T^1(p, \alpha)$ est l'espace parcouru par $v(0)$ lorsque v vérifie : $v \in V(p, \alpha)$ *et en outre*

$$t^{\alpha} v' \in L^p(0, \infty\,; D(A)).$$

Le point 2) de la démonstration du Théorème 5.1 en résulte.

REMARQUE 5.2.

Il résulte également de Lions [2] que, si π est un opérateur linéaire continu :

(a) de E dans E_1, (b) de $D(A)$ dans $D(A^1)$, (c) de $D(A^2)$ dans $D(A^1)^2$), alors π est un opérateur linéaire continu de $T^1(p, \alpha; A_i)$ dans $T^1(p, \alpha; A_i^1)$.

Ceci ne constituerait une nouvelle démonstration du Théorème 3.1, (i), que si l'hypothèse (b) était conséquence de (a) et (c); nous ignorons s'il en est ainsi (c'est vrai si l'on prend $E = L^q$ et le groupe des translations ; cela semble douteux en prenant encore le groupe des translations sur l'espace $E = C^0$ des fonctions continues périodiques ?)

Par des méthodes différentes nous montrons dans Lions [3] que $S_1(p, \alpha) = T(p, \alpha)$ lorsque E est un espace de Banach *réflexif*.

BIBLIOGRAPHIE.

G. H. HARDY-J. E. LITTLEWOOD-G. POLYA [1] *Inequalities*. Cambridge University Press, 1934.

E. HILLE-R. S. PHILLIPS [1] *Functionnal Analysis and Semi groups*. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. XXXI (1957).

J. L. LIONS [1] *Théorèmes de trace et d'interpolation*. (I), Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa, t. XIII (1959), p. 389-403.

[2] *Un théorème de traces ; application*. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 249 (1959), p. 2259-2261.

[3] *Sur les espaces d'interpolation ; dualité*. A paraitre, Math. Scandinavica.

L. SCHWARTZ [1] *Théorie des distributions à valeurs vectorielles*. Annales Inst. Fourier. (I), t. VII, p. 1-141 (1957), (II), t. VIII, p. 1-209 (1958).

A. ZYGMUND [1] *Trigonometric series*. Second edition. Cambridge Univ. Press. 1959. t. I.