Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

U. Barbuti

Sul problema della esistenza di misure invarianti rispetto a trasformazioni misurabili di uno spazio in sè

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 15, nº 1-2 (1961), p. 105-114

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1961_3_15_1-2_105_0>

SUL PROBLEMA DELLA ESISTENZA DI MISURE INVARIANTI RISPETTO A TRASFORMAZIONI MISURABILI DI UNO SPAZIO IN SÈ (*)

Nota di U. BARBUTI (a Pisa)

L'esistenza di misure invarianti, rispetto a trasformazioni misurabili di uno spazio in sè, è presupposta nella quasi totalità delle proposizioni che s'incontrano nella teoria ergodica ([1]) e il problema della esistenza di tali misure ebbe una prima notevole soluzione, nel caso di trasformazioni biunivoche e bicontinue di uno spazio metrico in sè, da parte di N. Kryloff e N. Bogoliouboff ([2]) in un fondamentale lavoro di interesse fisico matematico. Successivamente J. C. Oxtoby e S. M. Ulam ([3]) migliorarono il risultato di detti autori, utilizzando un'applicazione del classico teorema di Banach sul prolungamento dei funzionali lineari.

Con questo lavoro discutiamo di nuovo la tecnica di Oxtoby e Ulam alla luce di alcuni recenti risultati ([4]) della teoria del prolungamento di misure in reticoli a struttura normale, conseguendo, in tal modo, estensioni di quel teorema che si ritengono degne di nota.

1. Sia $\mathcal{B}$ un δ-anello di sottoinsiemi ([5]) di un prefissato insieme sostegno S. Sia T una trasformazione (puntuale) di S in sè, ***misurabile*** rispetto a $\mathcal{B}$, vale a dire:

(1) $$T^{-1} X \in \mathcal{B} \text{ ([6]), per ogni } X \in \mathcal{B}.$$

(*) Questo lavoro fa parte della realizzazione del programma del gruppo di ricerca, n° 20, del C. N. R. (1960-61).

([1]) Per una recentissima trattazione delle teorie ergodiche si veda [1].

([2]) Cfr. [2].

([3]) Cfr. [3].

([4]) Cfr. la monografia [4] e il lavoro [5].

([5]) Cioè un anello chiuso rispetto alla formazione di intersezioni numerabili dei suoi elementi; si noti che esso risulta anche condizionatamente σ-completo.

([6]) Si veda [6], a p. 162, oppure [7], a p. 5. $T^{-1}X$ indica l'estensione reciproca di X rispetto a T.

Una misura μ su $\mathcal{B}$ è detta *invariante*, rispetto a T, se

(2) $\mu(T^{-1}X) = \mu(X)$ (7), per ogni $X \in \mathcal{B}$.

2. Suppongasi che $\mathcal{R}$ sia un reticolo di sottoinsiemi di S relativamente $\cup$-normale ($\cap$-normale) e condizionatamente σ-completo (δ-completo) (8), sia inoltre $\mathcal{B}$ il minimo δ-anello d'insiemi contenente $\mathcal{R}$. Ci sarà utile la proposizione:

I. ***Al fine di riconoscere che la misura μ su $\mathcal{B}$ è invariante rispetto a T, è sufficiente verificare la*** (2) ***su $\mathcal{R}$.***

Suppongasi $\mathcal{R}$ relativamente $\cup$-normale e condizionatamente σ-completo. Fissato $X \in \mathcal{B}$, esiste (9) un $Y \in \mathcal{R}$ tate che $X \subseteq Y$ e $\mu(Y) < \mu(X) + \varepsilon$; risulta anche $T^{-1}X \subseteq T^{-1}Y$ e poichè per ipotesi è $\mu(T^{-1}Y) = \mu(Y)$, si ha $\mu(T^{-1}X) < \mu(X) + \varepsilon$; ossia, tenuto conto della arbitrarietà di ε, $\mu(T^{-1}X) \leq \leq \mu(X)$.

Sia, d'altro canto, $\mathcal{R}'_Y$ il reticolo complementare di $\mathcal{R}_Y$; esiste ancora un $Y' \in \mathcal{R}'_Y$ tale che per esso risulta $Y' \subseteq X$ e $\mu(Y') > \mu(X) - \varepsilon$. Si ha anche $T^{-1}Y' \subseteq T^{-1}X$; dico, inoltre, che $\mu(T^{-1}Y') = \mu(Y')$. Infatti risulta $Y' = Y - Z$ con $Z \in \mathcal{R}_Y$ e $T^{-1}Y' = T^{-1}Y - T^{-1}Z$ (con $T^{-1}Y \supseteq T^{-1}Z$), onde $\mu(T^{-1}Y') = \mu(T^{-1}Y) - \mu(T^{-1}Z) = \mu(Y) - \mu(Z) = \mu(Y')$. Si ha dunque: $\mu(T^{-1}X) \geq \mu(T^{-1}Y') = \mu(Y') > \mu(X) - \varepsilon$, e, per l'arbitrarietà di ε $\mu(T^{-1}X) \geq \mu(X)$; si ha cioè la (2).

Analogamente si ragiona se $\mathcal{R}$ è relativamente $\cap$-normale e δ-completo.

3. Vale anche la seguente proposizione:

II. ***Sia $\mathcal{R}$ un reticolo d'insiemi contenente l'insieme vuoto come elemento; sia ν una funzione reale finita su $\mathcal{R}$ e tale da risultare;***

a) ***non decrescente e nulla sull'insieme vuoto,***

---

(7) Cfr. [7], a p. 7.

(8) Per la nomenclatura usata in questa nota si veda F. Cafiero in [4]. Un reticolo d'insiemi $\mathcal{R}$ è detto relativamente $\cup$-normale ($\cap$-normale) se contiene l'insieme vuoto come elemento e se per ogni $X \in \mathcal{R}$, e $Y \in \mathcal{R}$, $Y \subseteq X$, esistono una successione $\{Y_n\}_{n \in N}$ ($N = 1, 2, \ldots$) d'insiemi appartenenti al sottoreticolo $\mathcal{R}_X$ ed una successione d'insiemi $\{Y'_n\}_{n \in N}$ appartenenti al reticolo $\mathcal{R}'_X$, complementare di $\mathcal{R}_X$, per i quali è:

$$Y_n \subseteq Y'_n \subseteq Y_{n+1} \quad (Y_n \supseteq Y'_n \supseteq Y_{n+1}), \quad n \in N, \quad \lim_n Y_n = Y.$$

Un reticolo d'insiemi $\mathcal{R}$ è poi detto condizionatamente σ-completo (δ-completo) se è chiuso rispetto alla formazione di unioni (intersezioni) numerabili d'insiemi di $\mathcal{R}$ contenuti in insiemi di $\mathcal{R}$.

(9) Cfr., per quel che segue, in [4], a p. 203, la definizione, ivi data, di misurabilità.

b) *finitamente additiva e subadditiva;*
allora la funzione definita per ogni $X \in \mathcal{R}$ con:

$$\mu(X) = \inf \left(\sum_{n \in N} \nu(X_n), X_n \in \mathcal{R}, \bigcup_{n \in N} X_n \supseteq X \right) \tag{3}$$

$$N = (1, 2, \ldots),$$

ove $\{X_n\}$ è un'arbitraria successione, gode delle proprietà a), b) e inoltre risulta:

c) *numerabilmente subadditiva su $\mathcal{R}$* (10).

La a) segue facilmente per μ dalla validità della a) medesima per ν.

Proviamo la b). Siano $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ due insiemi di $\mathcal{R}$ e siano $\{X_n^{(1)}\}_{n \in N}$ $\{X_n^{(2)}\}_{n \in N}$ due successioni, appartenenti ad $\mathcal{R}$ e tali che $\bigcup_{n \in N} X_n \supseteq X^{(1)}$, $\bigcup_{n \in N} X_n^{(2)} \supseteq X^{(2)}$. Posto $X_n = X_n^{(1)} \cup X_n^{(2)}$, risulta $\bigcup_{n \in N} X_n \supseteq X^{(1)} \cup X^{(2)}$ e inoltre per la finita subadditività di ν:

$$\sum_{n \in N} \nu(X_u^{(1)} \cup X_n^{(2)}) \leq \sum_{n \in N} \nu(X_n^{(1)}) + \sum_{n N} \nu(X_n^{(2)}).$$

Dalla definizione di μ e dal fatto che le successioni $\{X_n^{(1)}\}$, $\{X_n^{(2)}\}$ sono qualunque segue:

$$\mu(X^{(1)} \cup X^{(2)}) \leq \mu(X^{(1)}) + \mu(X^{(2)}).$$

Quest'ultima disuguaglianza prova la finita subadditività di μ; inoltre essa può invertirsi, se $X^{(1)} \cap X^{(2)} = \emptyset$. Sia infatti $\{X_n\}_{n \in N}$ una successione di $\mathcal{R}$ tale che $\bigcup_{n \in N} X_n \supseteq X^{(1)} \cup X^{(2)}$. Si ponga $X_n^{(1)} = X_n \cap X^{(1)}, X_n^{(2)} = X_n \cap X^{(2)}$, $n \in N$; risulterà $X_n^{(1)} \cap X_n^{(2)} = \emptyset$.

Per le a), b) valevoli per ν, si ha:

$$\sum_{n \in N} \nu(X_n) \geq \sum_{n \in N} \nu(X_n \cap (X^{(1)} \cup X^{(2)})) = \sum_{n \in N} \nu(X_n^{(1)}) + \sum_{n \in N} \nu(X_n^{(2)}).$$

Per la definizione di μ e per essere $\{X_n\}$ una successione qualunque, segue: $\mu(X^{(1)} \cup X^{(2)}) \geq \mu(X^{(1)}) + \mu(X^{(2)})$; quest'ultima prova la b) per μ. Proviamo ora la c). Sia $X \in \mathcal{R}$ e $\{X^{(n)}\}$, $n \in N$, una successione d'insiemi di $\mathcal{R}$ tali che $\bigcup_{n \in N} X^{(n)} \supseteq X$. Fissato $\varepsilon > 0$, associamo, per la definizione di μ e utilizzando l'assioma della scelta, ad ogni $X^{(n)}$ una successione $\{X_k^{(n)}\}_{k \in N}$

(10) Cioè risulta: $\mu(X) \leq \sum_{n \in N} \mu(X_n)$ se X, $X_n \in \mathcal{R}$ e $\bigcup_{n \in N} X_n \supseteq X$.

d'insiemi di $\mathfrak{R}$, tali che:

$$X^{(n)} \subseteq \bigcup_{k \in N} X_k^{(n)} \text{ e } \sum_{k \in N} \nu(X_k^{(n)}) < \mu(X^{(n)}) + \varepsilon/2^n, n \in N.$$

Avremo $X \subseteq \bigcup_{k;n \in N} X_k^{(n)}$ e, sommando rispetto all'indice n la disuguaglianza su scritta:

$$\sum_{k,n \in N} \nu(X_k^{(n)}) \leq \sum_{n \in N} \mu(X^{(n)}) + \varepsilon.$$

Tenuto conto della definizione di μ e della arbitrarietà di ε, segue dall'ultima disuguaglianza la c) e la proposizione è così provata.

4. Suppongasi ancora $\mathfrak{R}$ un reticolo relativamente $\cup$-normale e condizionatamente σ-completo, $\mathfrak{B}$ il minimo δ-anello d'insiemi contenente $\mathfrak{R}$.

Sia ν una funzione su $\mathfrak{R}$ godente delle proprietà a), b) della proposizione II. La funzione μ definita in (3) gode delle proprietà a), b) e c) e, a causa della struttura normale di $\mathfrak{R}$, è univocamente prolungabile ([11]) in una misura $\bar{\mu}$ su $\mathfrak{B}$. È opportuno osservare allora che: *condizione necessaria e sufficiente affinchè $\bar{\mu}$ sia non identicamente nulla è che esista almeno un insieme $C \in \mathfrak{B}$ tale che per esso risulti*:

$$\inf\left[\sum_{n \in N} \nu(X_n), X_n \in \mathfrak{R}, \bigcup_{n \in N} X_n \supseteq C\right] > 0. \tag{4}$$ ([12])

Osservazione.

Allo scopo di indicare un caso. utile nel seguito, nel quale la (4) si trova verificata, diamo la seguente definizione: diremo che l'insieme $C \in \mathfrak{B}$

([11]) Si veda in (5) la proposizione A.

([12]) Poichè $\mathfrak{R}$ è relativamente $\cup$-normale e condizionatamente σ-completo, risulta (cfr. la nota (9)), $\bar{\mu}(C) = \inf_{C \subseteq X \in \mathfrak{R}} \mu(X)$. Per la definizione (3) di μ si ha:

$$\bar{\mu}(C) = \inf_{C \subseteq X \in \mathfrak{R}} [\inf\{\sum_{n \in N} \nu(X_n), X_n \in \mathfrak{R}, \bigcup_{n \in N} X_n \supseteq X\}]$$

o, ciò che è lo stesso:

$$\bar{\mu}(C) = \inf[\sum_{n \in N} \nu(X_n), X_n \in \mathfrak{R}, \bigcup_{n \in N} X_n \supseteq C] \tag{*}$$

e, per la (4), $\bar{\mu}$ è non identicamente nulla.

Viceversa se $\bar{\mu}$ è non identicamente nulla, allora esiste un $C \in \mathfrak{B}$ tale che $\bar{\mu}(C) > 0$; per la detta struttura di $\mathfrak{R}$ esiste una successione d'insiemi $X_n \in \mathfrak{R}$ tali che $\bigcup_{n \in N} X_n \supseteq C$ e per i quali vale la (4).

è *compatto* relativamente ad $\mathfrak{R}$, se ogni ricoprimento numerabile di C con insiemi di $\mathfrak{R}$ contiene un ricoprimento finito. Vale osservare allora che:

Se C è un compatto relativamente ad $\mathfrak{R}$ e se risulta:

$$\inf_{C \subseteq X \in \mathfrak{R}} \nu(X) > 0, \tag{5}$$

allora è verificata la (4) [13], *cioè μ è non identicamente nulla su $\mathfrak{B}$.*

5. Sia $\mathfrak{R}$ un reticolo d'insiemi di S, contenente l'insieme vuoto come elemento, $\mathfrak{B}$ il minimo δ-anello contenente $\mathfrak{R}$ e T una trasformazione di S in sè, misurabile rispetto a $\mathfrak{B}$. Vale la proposizione:

III. *Se ν è finita su $\mathfrak{R}$, se T è invertibile, se, inoltre, $T^{-1} X \in \mathfrak{R}$ e $TX \in \mathfrak{R}$ quando $X \in R$: allora, se ν è invariante su $\mathfrak{R}$, tale risulta su $\mathfrak{B}$ la μ definita in* (3).

Siano $X, X_n \in \mathfrak{R}$, $n \in N$, $\bigcup_{n \in N} X_n \supseteq X$. Risulterà $T^{-1} X \subseteq T^{-1} (\bigcup_{n \in N} X_n) = \bigcup_{n \in N} T^{-1} X_n$. È dunque:

$$\mu(T^{-1} X) \leq \sum_{n \in N} \nu(T^{-1} X_n).$$

Per essere $\nu(T^{-1} X_n) = \nu(X_n)$, è anche:

$$\mu(T^{-1} X) \leq \sum_{n \in N} \nu(X_n),$$

dalla definizione di μ segue:

$$\mu(T^{-1} X) \leq \mu(X). \tag{6}$$

Per la ipotesi fatta risulta allora, ragionando sulla T^{-1} come si è fatto sulla T, per la (6), $\mu(TX) \leq (X)$.

Se ora partiamo dall'insieme $T^{-1} X \in \mathfrak{R}$, risulta ancora $\mu(X) \leq \mu(T^{-1} X)$ che, confrontata con la (6), dà la tesi.

---

[13] Per la compattezza di C, segue l'esistenza di un numero finito Y_i, $i \leq m$, d'insiemi della successione $\{X_n\}_{n \in N}$, che figura nella (*) (nota (12)), tali che $\bigcup_{i \leq m} Y_i \supseteq C$. Posto $\bigcup_{i \leq m} Y_i = X$, per la finita sub-additività di ν, risulta:

$$\bar{\mu}(C) = \inf [\sum_{i \in m} \nu(Y_i), \bigcup_{i \leq m} Y_i \supseteq C] \geq \inf_{C \leq X \in \mathfrak{R}} \nu(X).$$

È dunque per la ipotesi (5) $\bar{\mu}(C) > 0$.

6. Può ora provarsi il seguente teorema d'esistenza di misure invarianti:

IV. *Sia $\mathfrak{R}$ un reticolo relativamente* U*-normale e condizionatamente σ-completo di sottoinsiemi di S, $\mathfrak{B}$ il minimo δ-anello contenente $\mathfrak{R}$; sia T una trasformazione di S in sè, misurabile rispetto a $\mathfrak{B}$, tale che $T^{-1}X \in \mathfrak{R}$ e $TX \in \mathfrak{R}$ se $X \in \mathfrak{R}$. Esiste allora una misura limitata su $\mathfrak{B}$, invariante rispetto a T e non nulla, se esiste un compatto C relativamente ad $\mathfrak{R}$ ed un punto $x^0 \in S$ per cui è:*

$$\lim_n{}'' \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_C (T^k x^0) > 0, \tag{7}$$

ove χ_C è la funzione caratteristica di C e T^k la iterata k^{ma} di T.

Consideriamo con Oxtoby e Ulam lo spazio di Banach S^* delle successioni limitate di numeri reali $\xi = \{\xi_n\}_{n\in N}$ ed osserviamo che, in virtù di un classico teorema di Banach, è possibile costruire un funzionale lineare $L(\xi)$ su S^* che rispetta le condizioni seguenti ([14])

1⁰) $\lim_n{}' \xi_n \leq L(\xi) \leq \lim_n{}'' \xi_n$ ([15])

2⁰) Posto $\xi = \{\xi_n\}_{n\in N}$ e $\xi' = \{\xi_{n+1}\}_{n\in N}$, risulta: $L(\xi) = L(\xi')$.

3⁰) $L(\xi)$ può essere scelto in modo che, per una prescritta successione $\xi^0 = \{\xi_n^0\}_{n\in N}$, sia $L(\xi^0) = \lim_n{}'' \xi_n^0$.

Ciò premesso, in corrispondenza ad ogni $X \in \mathfrak{R}$, consideriamo la successione ξ il cui termine generale è:

$$\xi_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_X (T^k x^0), \tag{8}$$

ove il punto x^0 soddisfa la (7). Poniamo poi:

$$\nu(X) = L(\xi). \tag{9}$$

Dico che la funzione ν gode delle proprietà a), b) ([16]) della proposizione II.

([14]) Cfr. [3] alle pp. 561-562.

([15]) Si osservi che la 1⁰) assicura che $L(\xi)$ si restringe al $\lim_n \xi_n$ sulla varietà lineare delle successioni convergenti.

([16]) Si noti che la funzione ν può definirsi su qualsiasi famiglia di sottoinsiemi di S e le proprietà *a*), *b*) sono in ogni caso verificate. Notiamo però che ν può non godere della proprietà *c*), vale a dire può non essere numerabilmente subadditiva. Valga l'esempio seguente. Sia S l'insieme dei reali tali che $0 < x < 1$ e sia $Tx = x^2$. Fissato un qualunque $x^0 \in S$, la successione $T^k x^0$ converge a zero, se k tende all'infinito. Esaminando le (9), (8) Se infatti $X^{(1)} \leq X^{(2)}$ sono due insiemi di $\mathcal{R}$, sarà $\chi_{X^{(1)}} \leq \chi_{X^{(2)}}$ e conseguentemente dette $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$ le due successioni definite dalla (8) con $X^{(1)}, X^{(2)}$, risulta $\xi^{(1)}_n \leq \xi^{(2)}_n$, $n \in N$, e, per la linearità di L, anche $L(\xi^{(1)} - \xi^{(2)}) = L(\xi^{(1)}) - L(\xi^{(2)})$. Dalla proprietà 1⁰) e dalla (9) segue $\nu(X^{(1)}) \leq \nu(X^{(2)})$; è poi ovvio che $\nu(\emptyset) = 0$.

Per la proprietà b) basta osservare che se $X^{(1)}, X^{(2)}$ sono disgiunti è $\chi_{X^{(1)} \cup X^{(2)}} = \chi_{X^{(1)}} + \chi_{X^{(2)}}$, se non sono disgiunti è invece $\chi_{X^{(1)} \cup X^{(2)}} \leq \chi_{X^{(1)}} + \chi_{X^{(2)}}$. Conseguentemente per la (9), la linearità di $L(\xi)$ ed ancora per la proprietà 1⁰) segue la finita additività e subadditività di ν.

Osserviamo ora che la ν è invariante su $\mathcal{R}$ (17). Infatti è : $\chi_{T^{-1}X}(T^k x^0) = \chi_X(T^{k+1} x^0)$ e, considerata la successione ξ, il cui termine generale è definito in (8) e la ξ' il cui termine generale è:

$$\xi'_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{T^{-1}X}(T^k x^0) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_X (T^{k+1} x^0),$$

risulta subito dalla proprietà 2⁰) e dalla definizione di ν che $\nu(T^{-1} X) = \nu(X)$, per ogni $X \in \mathcal{R}$.

Consideriamo ora su $\mathcal{R}$ la funzione μ definita in (3). Per la proposizione II essa godrà delle proprietà a), b), c); per essere ν invariante su $\mathcal{R}$ rispetto a T e, godendo T delle medesime ipotesi della proposizione III, anche μ riuscirà invariante su $\mathcal{R}$. Se consideriamo allora il prolungamento $\bar{\mu}$ di μ su $\mathcal{B}$ (18), per la proposizione I, anche $\bar{\mu}$ sarà invariante rispetto a T. Per provare completamente il teorema basta mostrare che la (7) assicura che $\bar{\mu}$ è non identicamente nulla. Per questo osserviamo che se $X \in \mathcal{R}$ e $X \supseteq C$, per la proprietà 3⁰) di L, la ν soddisfa la condizione:

$$\nu(X) \geq \nu(C)\,(^{19}) = \lim_n{}'' \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_C (T^k x^0).$$

Per la osservazione fatta al n⁰ 4 risulta allora che $\bar{\mu}$ è non identicamente nulla.

---

e la proprieta 1⁰) di L, si noti che risulta $\nu(X) = 0$ se esiste un intero n tale che, preso $x \in X$, risulta $x > \frac{1}{n}$, mentre $\nu(S) = 1$. Se dunque prendiamo una successione $\{X_n\}$ d'insiemi di S tali che risulti 1⁰ $x > \frac{1}{n}$ se $x \in X_n$, $n \in N$, 2⁰ $\bigcup_{n \in N} X_n = S$, avremo $\sum_{n \in N} \nu(X_n) = 0$, mentre $\nu(S) = 1$.

(17) È cioè $\nu(T^{-1}X) = \nu(X)$ per ogni $X \in \mathcal{R}$. Si noti che la invarianza di ν resta verificata se ν è supposta definita su di una qualunque famiglia di sottoinsiemi di S.

(18) Cfr. la nota (11).

(19) Si ricordi quanto è stato detto nella prima parte nella nota (16).

Dalla proposizione IV ora provata segue il corollario:

Sia S è uno spazio topologico perfettamente normale e $\mathcal{B}$ la famiglia dei borelliani di S, sia T una trasformazione di S in sè, biunivoca e bicontinua; affinchè esista una misura invariante rispetto a T e non nulla è sufficiente che esista un compatto C ed un punto $x_0 \in S$ per i quali risulti verificata la (7) ([20]).

7. Una più semplice costruzione di una misura invariante e, con essa, un più diretto legame tra tale misura e il valore del funzionale L ([21]), in quanto evita il ricorso alla funzione μ, definita in (3), può ottenersi partendo da un reticolo $\mathcal{R}$ relativamente $\cap$-normale, δ-completo e condizionatamente perfetto ([22]) di sottoinsiemi di S. Supponiamo soltanto che T risulti misurabile rispetto $\mathcal{B}$, essendo al solito $\mathcal{B}$ il minimo δ-anello d'insiemi contenente $\mathcal{R}$. Per ogni $X \in \mathcal{R}$ si consideri ancora la $\nu(X)$ definita in (9); quest'ultima gode delle proprietà a), b) ed è invariante su $\mathcal{R}$ ([23]). Essendo poi $\mathcal{R}$ condizionatamente perfetto riesce per ν valida la proprietà:

c') *ν è continua verso il basso sull'insieme vuoto* ([24]).

Le condizioni a), b), c') sono sufficienti perchè ν possa essere prolungata in una misura $\bar{\mu}$ su $\mathcal{B}$ ([25]); poichè poi ν è invariante su $\mathcal{R}$, utilizzando ancora la proposizione I, segue che μ è invariante, rispetto a T.

Segue dunque il teorema:

V. *Sia $\mathcal{R}$ un reticolo relativamente $\cap$-normale, δ-completo e condizionatamente perfetto di sottoinsiemi di S, sia T una trasformazione misurabile rispetto al più piccolo δ-anello d'insiemi $\mathcal{B}$ contenente $\mathcal{R}$, allora esiste su $\mathcal{B}$ una*

([20]) Basterà assumere in S il reticolo degli aperti $\mathcal{R}$ che risulta relativamente $\cup$-normale e condizionatamente σ-completo per essere la topologia su S perfettamente normale. Ricordiamo che spazio topologico perfettamente normale significa spazio normale nel quale ogni chiuso è un $\mathcal{G}_\delta$.

([21]) L'interesse di questo più diretto legame va veduto nella circostanza che, se la successione ξ definita in (8) ha limite, allora il valore del funzionale $L(\xi)$ coincide con questo limite (cfr. la nota (15)); un tale limite rappresenta poi, per n grande, il «soggiorno medio» di $T^k x^0$ sull'insieme X.

([22]) Un reticolo $\mathcal{R}$ d'insiemi è detto perfetto se ogni filtro $\mathcal{F}$ primo su $\mathcal{R}$ è determinato da un punto $x \in S$; cioè se esiste un $x \in S$ tale che $X \in \mathcal{F}$ se e solo se $x \in X$. Un filtro $\mathcal{F}$ è un insieme di elementi di $\mathcal{R}$ tali che: 1° se $X \in \mathcal{F}$ e $Y \in \mathcal{F}$, allora $X \cap Y \in \mathcal{F}$, 2° se $X \in \mathcal{F}$, $Y \in \mathcal{F}$ e $X \subseteq Y$, allora $Y \in \mathcal{F}$. Un filtro proprio è poi detto primo se, supponendo che $X \cup Y \in \mathcal{F}$, ciò implica $X \in \mathcal{F}$ oppure $Y \in \mathcal{F}$. Può provarsi che: ogni filtro primo è massimale, vale a dire e proprio e non contenuto propriamente in alcun filtro proprio. Noi diciamo poi che $\mathcal{R}$ è un reticolo condizionatamente perfetto se ogni reticolo $\mathcal{R}_X$ ($X \in \mathcal{R}$) è perfetto.

([23]) Si veda la nota (17).

([24]) Cioè $\nu(X_n) \to 0$ se X_n tende, non crescendo, all'insieme vuoto; è questa una facile conseguenza dell'essere $\mathcal{R}$ condizionatamente perfetto.

([25]) Cfr. [8], alle pp. 152-154.

misura limitata, invariante rispetto a T, che risulta non nulla, se esiste almeno un punto $x^0 \in S$ ed un insieme $C \in \mathcal{R}$ per i quali risulta verificata la (7).

Basta per l'ultima affermazione della tesi osservare semplicemente che, per la proprietà 3°) del funzionale L, risulta:

$$\nu(C) = L(\xi^0) = \lim_n{}'' \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_C(T^k x^0) > 0.$$

La proposizione precedente ammette il corollario:

Sia S uno spazio di Hausdorff, perfettamente normale e $\mathcal{B}$ il minimo δ-anello d'insiemi, contenente il reticolo dei compatti (26), *sia T misurabile rispetto a $\mathcal{B}$; affinchè esista una misura invariante rispetto a T e non nulla, è sufficiente che esista un compatto C ed un punto x^0 per i quali valga la* (7).

Chiudiamo osservando che i procedimenti su esposti, che utilizzano il ricorso a teoremi di prolungamento per misure, possono essere impiegati a provare l'esistenza di misure invarianti, rispetto a famiglie di trasformazioni misurabili, dipendenti da un parametro continuo e formanti gruppo rispetto ad esso; basterà a tal uopo sostituire alla media (8) una media integrale (27).

---

(26) Il reticolo degli insiemi compatti di uno spazio topologico di Hausdorff è condizionatamente perfetto. Sia infatti $\mathcal{F}$ un filtro primo su $\mathcal{R}_X$. La intersezione C degli insiemi del filtro non è vuota perchè se fosse vuota, essendo gli insiemi del filtro chiusi (perchè compatti in un compatto) esisterebbe una famiglia finita, contenuta nel filtro, con intersezione vuota; conseguentemente il filtro $\mathcal{F}$ non sarebbe proprio e quindi neppure primo, contro il supposto. Sia ora $x \in C$; dico che tale punto determina $\mathcal{F}$. Sia $Y \in \mathcal{R}_X$ e tale che $x \in Y$, risulta $Y \in \mathcal{F}$; se infatti ciò non accadesse, si consideri il filtro $\mathcal{F}$ generato da $\mathcal{F} \cup \{Y\}$ (si dà per $\mathcal{F}_0$ la regola: $Z \in \mathcal{F}_0$ se solo se $Z \in \mathcal{R}_X$ e $Z \supseteq X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_k \cap Y$, ove X_i $(i \leq k)$ sono insiemi di $\mathcal{R}_X$). Poichè $\mathcal{F}$ è massimale perchè primo (vedi nota (23)) è allora $\mathcal{F}_0 = \mathcal{R}_X$, quindi $\emptyset \in \mathcal{F}_0$; si ha cioè che esistono un numero finito di elementi di $\mathcal{F}$ per i quali è $\emptyset = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_k \cap Y$, ciò è manifestamente assurdo perchè $x \in X_i$ $(i \leq k)$, $x \in Y$.

(27) Cfr. Oxtoby e Ulam in [3], a. p. 564.

BIBLIOGRAFIA

[1] K. JACOBS, *Neure Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie*, Springer-Verlag, (1960), Berlin.

[2] N. KRYLOFF e N. BOGOLIOUBOFF, *La Theorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systémes dinamiques de la mécanique non linéaire*; Annals of Math. (2), 38 (1937) pp. 63-113.

[3] J. C. OXTOBY e S. M. ULAM, *On the existence of measure invariant under a transformation*; Annals of Math. Vol. 40, (1939).

[4] F. CAFIERO, *Misura e Integrazione Collezione «Monografie Matematiche»* a cura del C.N.R. Ed. Cremonese, Roma (1959).

[5] U BARBUTI, *Sul prolungamento di misure da reticoli a struttura normale*; (nota in corso di stampa sui: Rend. dell'Acc. Naz. dei Lincei).

[6] P. R. HALMOS, *Measure Theory*; D. Van Nostrand Co., Inc., New York (1951).

[7] P. R. HALMOS, *Lectures on ergodic theory*; Pubblications of the Mathematical Society of Japan (1956).

[8] U. BARBUTI, *Teoremi di prolungamento per misure da reticoli d'insiemi*; «Ricerche di Matematica» V. VII, (1956) pp. 145-162.