ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
*Classe di Scienze*

CARLO PUCCI

# Un problema variazionale per i coefficienti di equazioni differenziali di tipo ellittico

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série*, tome 16, nº 2 (1962), p. 159-172

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1962_3_16_2_159_0>

# UN PROBLEMA VARIAZIONALE PER I COEFFICIENTI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI TIPO ELLITTICO

di CARLO PUCCI (Catania)

Si considera la classe $\mathcal{L}_\alpha$, $\alpha$ costante positiva, degli operatori differenziali ellittici

$$(1) \qquad L(u) \equiv ar + 2bs + ct \qquad (r = u_{xx},\ s = u_{xy},\ t = u_{yy}),$$

con $a$, $b$ e $c$ funzioni reali misurabili in un insieme aperto e limitato $A$, verificanti in ogni punto di $A$ le condizioni:

$$(2) \qquad \max_{\lambda^2+\mu^2=1} (a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2) = 1, \qquad \min_{\lambda^2+\mu^2=1} (a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2) \geq \alpha .$$

Assegnata una funzione $\varphi$ sulla frontiera di $A$ si considera una classe $G_\alpha$ di soluzioni dei problemi di Dirichlet:

$$L(u) = 0 \text{ in } A, \quad u = \varphi \text{ su } \mathcal{F}A,$$

al variare di $L$ in $\mathcal{L}_\alpha$. In opportune ipotesi di differenziabilità delle soluzioni, di $\varphi$ e della frontiera di $A$ si prova che vi è una funzione $u_2\,[u_1]$ in $G_\alpha$ che è maggiore [minore] di tutte le altre funzioni di $G_\alpha$ in ogni punto di $A$. Indicato con $\mathcal{C}'(u)$, $\mathcal{C}''(u)$ le curvature principali di $u$ $(\mathcal{C}' \leq \mathcal{C}'')$ le funzioni estremanti $u_1$ ed $u_2$ soddisfano in ogni punto di $A$ alla condizione

$$\mathcal{C}'(u_1) + \alpha\, \mathcal{C}''(u_1) = 0, \quad \alpha \mathcal{C}'(u_2) + \mathcal{C}''(u_2) = 0.$$

In altre parole le superfici di equazione cartesiana $z = u(x, y)$, con $u \in G_\alpha$, superfici aventi tutte lo stesso bordo, sono racchiuse fra due superfici della famiglia e queste due superfici estremanti sono particolari superfici di Weingarten, essendo costante il rapporto dei raggi di curvatura (1).

La dimostrazione è basata su una caratterizzazione delle soluzioni delle equazioni del tipo ellittico considerato mediante limitazioni del rapporto delle curvature principali, e su un teorema di chiusura della classe di operatori $\mathcal{L}_\alpha$ (2).

## § 1. — Disequazioni caratterizzanti le soluzioni considerate.

Osserviamo che ogni operatore $L$, definito dalla (1), uniformemente ellittico in $A$, a meno di un fattore di normalizzazione appartiene alla classe $\mathcal{L}_\alpha$, con $\alpha$ costante positiva opportuna. Oltre agli operatori $L$ di $\mathcal{L}_\alpha$ consideriamo i seguenti operatori differenziali:

$$(3) \qquad \mathcal{C}'(u) \equiv \frac{r+t}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(r-t)^2+4s^2}\,, \quad \mathcal{C}''(u) = \frac{r+t}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(r-t)^2+4s^2}.$$

Supponiamo sempre $L, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ operanti su funzioni $u$ dotate di derivate prime assolutamente continue secondo Tonelli nell'insieme aperto e limitato $A$ (3); pertanto $u$ ha derivate seconde quasi ovunque (q.o.) e $L(u)$, $\mathcal{C}'(u)$, $\mathcal{C}''(u)$ sono definiti q. o. in $A$ e risultano funzioni misurabili in $A$. Nei punti ove $u$ ha differenziale secondo (4), $\mathcal{C}'(u)$ e $\mathcal{C}''(u)$ rappresentano la prima e seconda curvatura principale; si ha:

$$(4) \qquad \mathcal{C}'(u) = \min_{0\le\varphi<\pi} (r\cos^2\varphi + 2s \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + t\cos^2\varphi),$$

$$\mathcal{C}''(u) = \max_{0\le\varphi<\pi} (r\cos^2\varphi + 2s \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + t\cos^2\varphi).$$

Premettiamo una semplice osservazione sulle forme quadratiche:

$$Q_1(\lambda,\mu) \equiv r\lambda^2 + 2s\,\lambda\mu + t\,\mu^2, \quad Q_2(\lambda,\mu) \equiv a\lambda^2 + 2b\,\lambda\mu + c\,\mu^2,$$

---

(1) Uno studio delle superfici di Weingarten, caratterizzate dal fatto che un raggio di curvatura è funzione assegnata dell'altro, si trova ad es. in Darboux [4], libro VII, cap. VII.

(2) Il presente lavoro è stato svolto nell'ambito dei Gruppi di ricerca 9 e 40 del Comitato per la matematica del C. N. R. per l'anno accademico 1960-61. Ringrazio Guido Stampacchia per alcune utilissime indicazioni.

(3) Vale a dire che le derivate sono assolutamente continue in ogni insieme chiuso contenuto in $A$.

(4) Si intende differenziale secondo di Peano-Stoltz.

con $r, s, t, a, b, c$ numeri reali assegnati, $a, b$ e $c$ verificanti le (2). Ricordiamo che con una opportuna trasformazione delle variabili $\lambda$ e $\mu$:

$$\lambda = \lambda_i \cos\theta_i + \mu_i \operatorname{sen}\theta_i , \qquad \mu = - \lambda_i \operatorname{sen}\theta_i + \mu_i \cos\theta_i ,$$

si può ricondurre $Q_i$ a forma canonica, cioè

$$Q_1 \equiv \mathcal{C}'(u)\, \lambda_1^2 + \mathcal{C}''(u)\, \mu_1^2 , \qquad Q_2 \equiv \gamma\, \lambda_2^2 + \mu_2^2 ;$$

$\mathcal{C}'(u)$, $\mathcal{C}''(u)$ sono le radici caratteristiche di $Q_1$, $\gamma$ ed 1 sono le radici caratteristiche di $Q_2$;

$$\gamma = \min_{0 \leq \varphi < \pi} (a \cos^2\varphi + 2b \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + c \operatorname{sen}^2\varphi), \tag{5}$$

$$\alpha \leq \gamma \leq 1, \quad \mathcal{C}'(u) \leq \mathcal{C}''(u) .$$

Se le due radici caratteristiche della forma quadratica $Q_1$ sono distinte gli assi $\lambda_i, \mu_i$ sono univocamente determinati a meno del verso nel piano $\lambda, \mu$ ed essi si dicono assi principali di $Q_i$. Se entrambe le forme quadratiche $Q_1$ e $Q_2$ hanno radici caratteristiche diverse diciamo angolo di sfasamento $\theta$ fra le due forme quadratiche il più piccolo angolo formato dalle direzioni $\lambda_1$ e $\lambda_2$; si ha quindi $\theta = | \theta_1 - \theta_2 |$. Sussiste la seguente relazione:

$$ar + 2bs + ct = (\gamma \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\, \mathcal{C}'(u) + (\gamma \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)\, \mathcal{C}''(u). \tag{6}$$

Si ha infatti per la definizione di $\theta_1$ e $\theta_2$:

$$r = \mathcal{C}'(u) \cos^2\theta_1 + \mathcal{C}''(u) \operatorname{sen}^2\theta_1 , \quad s = [\mathcal{C}'(u) - \mathcal{C}''(u)] \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_1 ,$$

$$t = \mathcal{C}'(u) \operatorname{sen}^2\theta_1 + \mathcal{C}''(u) \cos^2\theta_1 ,$$

$$a = \gamma \cos^2\theta_2 + \operatorname{sen}^2\theta_2 , \quad b = (\gamma - 1) \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_2 , \quad c = \gamma \operatorname{sen}^2\theta_2 + \cos^2\theta_2 ,$$

e svolgendo i conti si ottiene la (5), essendo $\theta = | \theta_1 - \theta_2 |$.

Proviamo ora il seguente teorema:

I. *Sia $u$ una funzione dotata di derivate prime assolutamente continue secondo Tonelli in $A$. Se è*

$$L(u) = 0 \quad q.o. \ in\ A, \quad L \in \mathcal{L}_\alpha , \tag{7}$$

*si ha*

$$\alpha\, \mathcal{C}''(u) \leq - \mathcal{C}'(u) \leq \frac{1}{\alpha}\, \mathcal{C}''(u) \quad q.o. \ in\ A; \tag{8}$$

*inversamente se $u$ soddisfa alla* (8) *vi è almeno un operatore $L$ di $\mathcal{L}_\alpha$ per il quale sussiste la* (7).

Tenuto conto della (6) se sussiste la (7) $\mathcal{C}'(u)$ e $\mathcal{C}''(u)$ o sono entrambi nulli, ed in tal caso sussiste la (8), oppure hanno segno contrario e si ha q.o. in $A$:

$$-\frac{\mathcal{C}'(u)}{\mathcal{C}''(u)}=\frac{\cos^2\theta+\gamma\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{\mathrm{sen}^2\,\theta+\gamma\cos^2\theta}.$$

Fissato $\gamma$ con $\alpha\leq\gamma\leq 1$ il secondo membro al variare di $\theta$ ha per minimo $\gamma$ e per massimo $\frac{1}{\gamma}$ e pertanto la (8) è provata.

Supponiamo ora che $u$ soddisfi alla (8); esiste quindi una funzione $\beta$ misurabile in $A$ tale che

$$\mathcal{C}'(u)+\beta\mathcal{C}''(u)=0,\quad \alpha\leq\beta\leq\frac{1}{\alpha}\quad \text{q.o. in } A. \tag{9}$$

Dalle (3) segue

$$\frac{1+\beta}{2}(r+t)+\frac{\beta-1}{2}\sqrt{(r-t)^2+4s^2}=0, \tag{10}$$

e posto

$$\bar a=1,\quad \bar c=\beta,\quad \bar b=0\quad \text{se}\quad (r-t)^2+4s^2=0,$$

e, nel caso $(r-t)^2+4s^2>0$, posto

$$a'=\frac{1+\beta}{2}+\frac{1-\beta}{2}\frac{r-t}{\sqrt{(r-t)^2+4s^2}},\quad c'=\frac{1+\beta}{2}-\frac{1-\beta}{2}\frac{r-t}{\sqrt{(r-t)^2+4s^2}},$$

$$b'=\frac{s(1-\beta)}{\sqrt{(r-t)^2+4s^2}},$$

$$\bar a=a',\ \bar b=b',\ \bar c=c'\ \text{se}\ \beta\leq 1,\ \bar a\beta^2=a',\ \bar b\beta^2=b',\ \bar c\beta^2=c'\ \text{se}\ \beta>1,$$

si ha

$$\bar L(u)=\bar a r+2\bar b s+\bar c t=0,\quad \bar L\in\mathcal{L}_\alpha,$$

verificandosi con facili calcoli le (2).

Abbiamo provato la equivalenza della (7) e (8); quindi, eccettuati i punti ove $r=s=t=0$, le soluzioni $u(x,y)$ delle equazioni ellittiche considerate sono rappresentate da superfici nello spazio $x, y, u$ a punti iperbolici con il rapporto dei due raggi di curvatura opportunamente limitato e questa limitazione caratterizza dette soluzioni. In margine al teorema dimostrato osserviamo altre analoghe disuguaglianze che caratterizzano le soluzioni considerate, pure non occorrendoci queste nella trattazione successiva.

*Sia $u$ una funzione con derivate prime assolutamente continue secondo Tonelli in $A$. Se si verifica una delle cinque seguenti condizioni anche le altre quattro sono soddisfatte*

$$L(u) = 0 \quad q.o. \text{ in } A, \; L \in \mathcal{L}_\alpha, \tag{7}$$

$$r^2 + t^2 + 2s^2 \leq \frac{1+\alpha^2}{\alpha}(s^2 - rt) \qquad q.o. \text{ in } A, \tag{11}$$

$$(r+t)^2 \leq \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}(s^2 - rt) \qquad q.o. \text{ in } A, \tag{12}$$

$$(1-\alpha)\,\mathcal{C}'(u) \leq r + t \leq (1-\alpha)\,\mathcal{C}''(u) \qquad q.o. \text{ in } A, \tag{13}$$

$$\frac{\alpha-1}{\alpha}\,\mathcal{C}''(u) \leq r + t \leq \frac{\alpha-1}{\alpha}\,\mathcal{C}'(u) \qquad q.o. \text{ in } A. \tag{14}$$

Per la (3)

$$\mathcal{C}'(u) + \mathcal{C}''(u) = r + t,$$

e quindi la (13) e la (14) sono equivalenti alla (8) e quindi per il teorema precedente alla (7).

Abbiamo già osservato che dalla (8) segue la (9) e da questa per la (3)

$$r + t = \frac{1-\beta}{1+\beta}\sqrt{(r-t)^2 + 4s^2}, \; \alpha \leq \beta \leq \frac{1}{\alpha} \qquad q.o. \text{ in } A. \tag{15}$$

Pertanto

$$r^2 + t^2 + 2s^2 = \frac{1+\beta^2}{\beta}(s^2 - rt), \; (r+t)^2 = \frac{(1-\beta)^2}{\beta}(s^2 - rt) \qquad q.o. \text{ in } A,$$

e per le limitazioni di $\beta$ si ottengono le (11), (12).

Inversamente se è soddisfatta la (11) o la (12) esiste una funzione misurabile $\beta$ definita in $A$ per la quale sussiste la (15); da questa e dalla (3) segue la (9) e quindi la (8) e la (7).

Avendo provato che la (7) è equivalente a ciascuna delle altre condizioni (11), (12), (13), (14) il teorema è dimostrato.

## § 2. — Un teorema di chiusura per gli operatori.

II. *Le funzioni $u_n$, $n = 1, 2, \dots$, siano dotate di derivate prime assolutamente continue secondo Tonelli in $A$ e per ogni indice $n$ vi sia un operatore $L_n$ di $\mathcal{L}_\alpha$ tale che*

$$L_n(u_n) = 0 \quad q.o \text{ in } A. \tag{16}$$

*Se la successione $\{u_n\}$ converge uniformemente in ogni insieme chiuso $B$ contenuto in $A$ ad una funzione $u$ dotata di derivate prime assolutamente continue secondo Tonelli in $A$ e di differenziale secondo $q.o.$ in $A$, esiste un operatore $L$ di $\mathcal{L}_\alpha$ tale che*

$$L(u) = 0 \quad q.o. \text{ in } A.$$

Osserviamo che per il teorema I si può sostituire alla (16) la condizione

$$\alpha \mathcal{C}''(u_n) \leq -\mathcal{C}'(u_n) \leq \frac{1}{\alpha}\mathcal{C}''(u_n) \quad q.o. \text{ in } A;$$

inoltre il teorema è provato se dimostriamo che sussiste la (8).

Sia $z_0$ un punto di $A$ ove $u$ è dotato di differenziale secondo. Per semplicità possiamo assumere $z_0$ come origine del sistema di riferimento e gli assi orientati in modo che

$$r = \mathcal{C}'(u), \quad s = 0, \quad t = \mathcal{C}''(u) \text{ in } z_0. \tag{17}$$

Supponiamo le $u_n$, la $u$ e le derivate prime della $u$ nulle in $z_0$. Ciò non comporta restrizioni nella generalità della dimostrazione perchè possiamo ricondurci a questo caso considerando al posto di $u$ e delle $u_n$ le funzioni

$$v(z) = u(z) - u(z_0) - p_0(x - x_0) - q_0(y - y_0),$$

$$v_n(z) = u_n(z) - u_n(z_0) - p_0(x - x_0) - q_0(y - y_0),$$

ove si è indicato con $p_0$ e $q_0$ le derivate prime di $u$ in $z_0$. Infatti per le $v_n$ e la $v$ seguitano a sussistere le ipotesi fissate per le $u_n$ e la $u$.

Per quanto ora supposto, tenuto conto della (17), si ha

$$u(z) = \frac{1}{2} r_0 x^2 + \frac{1}{2} t_0 y^2 + o(x^2 + y^2), \qquad (r_0 = r(z_0), t_0 = t(z_0)). \tag{18}$$

Supponiamo per assurdo

$$\alpha\, \mathcal{C}''(u) > -\mathcal{C}'(u) \ \ in\ z_0, \tag{19}$$

cioè per la (17)

$$\alpha t_0 + r_0 > 0.$$

Tenendo conto che sempre per la (17) è $r_0 < t_0$, deve essere $t_0 > 0$ ed esiste quindi una costante $\varepsilon$ tale che

$$0 < \varepsilon < t_0, \qquad \alpha(t_0 - \varepsilon) + r_0 - \varepsilon > 0. \tag{20}$$

Posto

$$\psi(z) = \frac{1}{2}(r_0 - \varepsilon)\, x^2 + \frac{1}{2}(t_0 - \varepsilon)\, y^2,$$

per la (18) vi è un $d_\varepsilon$ tale che

$$u(z) > \psi(z) \ \text{ per } |z| = d_\varepsilon,$$

e per la uniforme convergenza di $u_n$ ad $u$ vi è un indice $n_\varepsilon$ tale che

$$u_n(z) - \psi(z) > 0 \ \text{ per } |z| = d_\varepsilon,\ n > n_\varepsilon. \tag{21}$$

Si ha

$$L_n(\psi) = a_n(r_0 - \varepsilon) + c_n(t_0 - \varepsilon) = a_n\left[r_0 - \varepsilon + \frac{c_n}{a_n}(t_0 - \varepsilon)\right],$$

ed essendo $L_n \in \mathcal{L}_\alpha$ si ha $c_n \geq \alpha$, $a_n \leq 1$ e quindi $c_n \geq \alpha\, a_n$ e per la (20) è $L_n(\psi) > 0$ e per la (16)

$$L_n(u_n - \psi) < 0 \ \ q.o.\ in\ A.$$

Per note proprietà delle soluzioni di equazioni di tipo ellittico $u_n - \psi$ non è dotata di punti di minimo in $A$ (5) e per la (21) dovrebbe risultare $u_n > \psi$ per $|z| < d_\varepsilon$ ed $n > n_\varepsilon$ che è assurdo essendo $u_n$ e $\psi$ nulle in $z_0$.

Si è provata l'assurdità delle (19); in modo analogo si prova

$$\mathcal{C}'(u) \leq \frac{1}{\alpha}\, \mathcal{C}''(u) \ \ in\ z_0.$$

## § 3. — Un problema variazionale.

*Sia $A$ un insieme aperto semplicemente connesso, limitato da una curva rettificabile dotata di rappresentazione parametrica $z(s)$ di classe $C^{(2)}$* ($s$ lun-

(5) Vedere ad es. L. Bers, L. Nirenberg [3].

ghezza d'arco). *Sia $\varphi$ una funzione definita sulla frontiera di $A$ e $\varphi$ $(s)$ di classe $C^{(2)}$.*

Bers e Nirenberg hanno provato in [2] che, fissato comunque un operatore $L$ di $\mathcal{L}_\alpha$, esiste in corrispondenza una ed una sola funzione $u$ di classe $C^{(1)}$ in $\bar{A}$, con derivate prime assolutamente continue secondo Tonelli in $A$, soluzione del problema di Dirichlet

$$L(u) = 0 \ \ q.o. \ \ in \ A, \ u = \varphi \ su \ \mathcal{F}A.$$

Indichiamo con $G_\alpha$ la classe di dette soluzioni $u$ al variare di $\mathcal{L}_\alpha$. Questa classe non è vuota ed è costituita da più elementi se, come supponiamo, $\alpha < 1$ e $\varphi$ non coincide con la traccia su $A$ di un polinomio di primo grado.

Bers e Nirenberg hanno provato nel lavoro citato che esistono due costanti positive $k$ e $\tau$ ed una funzione $g(\delta)$ tali che qualunque funzione $u$ di $G_\alpha$ soddisfa alle seguenti limitazioni:

$$|p(z) - p(z')|, \ |q(z) - q(z')| < k\,|z - z'|^\tau \ \text{per} \ z, z' \in \bar{A}, \tag{22}$$

$$\int_B (r^2 + 2s^2 + t^2)\, dx\, dy \leq g(\delta), \tag{23}$$

avendo indicato con $B$ un insieme chiuso contenuto in $A$, avente distanza dalla frontiera di $A$ maggiore o uguale a $\delta$ (6).

Ci occorre per il seguito osservare che le funzioni $u$ di $G_\alpha$ hanno q.o. in $A$ differenziale secondo. Infatti per la (23) $\Delta u$ è di quadrato sommabile in $C$ e quindi fissato un cerchio $C$ chiuso contenuto in $A$ si ha la identità di Stokes:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{F}C}\left(\log\varrho\,\frac{du}{dn} - u\,\frac{d\log\varrho}{dn}\right) ds + \frac{1}{2\pi}\int_C \Delta u \log\varrho\, dx\, dy,$$

(6) Limitazioni analoghe sono provate da NIRENBERG in [6] con un diverso procedimento basato su una disugualianza simile alla (11). Per questa dimostrazione vedere anche MIRANDA [3] pag. 136. NIRENBERG prova che le derivate delle funzioni di $G_\alpha$ sono, internamente ad $A$, hölderiane con un esponente dipendente solo da $\alpha$. In base ad una osservazione di Nirenberg ([6] pag. 122) ed alla (11) tali derivate sono hölderiane con esponente $\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$.

con $z$ punto interno a $C$, $\varrho$ distanza del punto $z$ dal punto variabile di integrazione, $n$ normale interna. Il primo integrale è una funzione analitica di $z$ internamente a $C$; per un risultato di Calderon e Zygmund sui potenziali ([1] pag. 133-34) il secondo integrale è una funzione di $z$ dotata quasi ovunque di differenziale secondo in $C$.

Consideriamo ora il seguente problema:

*Fissato un punto $z_0$ in $A$ ricercare se esiste il massimo (il minimo) di $u(z_0)$ al variare di $u$ in $G_\alpha$.*

Si tratta di vedere se è possibile determinare $L$ in $\mathcal{L}_\alpha$ e quindi i coefficienti dell'equazione differenziale in modo da rendere massima (minima) la soluzione in un punto prestabilito.

III. *Il problema variazionale considerato ammette una ed una sola soluzione. La funzione minimante $u_1$ soddisfa alla condizione*

$$\mathcal{C}'(u_1) + \alpha\mathcal{C}''(u_1) = 0 \quad q.o. \ in \ A, \tag{24}$$

*e risulta minore di tutte le altre funzioni di $G_\alpha$ non solo nel punto $z_0$ ma in tutto $A$. La funzione massimante $u_2$ soddisfa alla condizione*

$$\alpha\mathcal{C}'(u_2) + \mathcal{C}''(u_2) = 0 \quad q.o \ in \ A,$$

*e risulta maggiore di tutte le altre funzioni di $G_\alpha$ in $A$.*

*Indicato con $L_i$ $(i = 1, 2)$ un operatore di $\mathcal{L}_\alpha$ tale che*

$$L_i u_i \equiv a_i r_i + 2b_i s_i + c_i t_i = 0 \quad q.o. \ in \ A,$$

*in tutti i punti di $A'$ ove $u_i$ è dotata di derivate seconde non tutte nulle $L_i$ è univocamente determinato* (7)*, in quei punti la forma quadratica*

$$F_i \equiv a_i \lambda^2 + 2b_i \lambda\mu + c_i \mu^2,$$

*ha radici caratteristiche uguali ad $\alpha$ e ad 1 ed assi principali coincidenti con gli assi principali della forma quadratica*

$$U_i \equiv r_i \lambda^2 + 2s_i \lambda\mu + t_i \mu^2;$$

*precisamente l'angolo di sfasamento fra $F_2$* e *$Q_2$ è nullo e fra $F_1$* e *$Q_1$ è $\frac{\pi}{2}$.*

---

(7) Osserviamo che $L_i$ è determinato a meno di un insieme di misura nulla. Infatti è di misura nulla l'insieme dei punti ove si annullano tutte le derivate seconde di una soluzione di una equazione di tipo ellittico del secondo ordine lineare in due variabili, a meno che la soluzione non sia un polinomio di I grado. Questo può essere dedotto da una rappresentazione della soluzione data da Bers e Nirenberg in [2].

Consideriamo una successione minimante $\{v_n\}$ del problema considerato, tale cioè che $v_n \in G_\alpha$ e $\{v_n(z_0)\}$ converge all'estremo inferiore di $u(z_0)$ per $u$ variabile in $G_\alpha$. Per il principio di massimo le funzioni di $G_\alpha$ sono equilimitate (in valore assoluto minori o uguali al massimo di $|\varphi|$ su $\mathcal{F}A$); inoltre, per il teorema di Bers-Nirenberg riportato, hanno derivate prime equicontinue in $\bar{A}$. Per i teoremi di Ascoli-Arzelà esiste quindi una successione $\{v'_n\}$, subordinata alla $\{v_n\}$, uniformemente convergente in $\bar{A}$ ad una funzione $u_1$ di classe $C^{(1)}$ in $\bar{A}$. Inoltre fissato comunque un insieme chiuso $B$ contenuto in $A$ le derivate seconde delle $v'_n$ soddisfano uniformemente alla limitazione espressa dalla (23), e pertanto $u_1$ ha derivate prime assolutamente continue secondo Tonelli in $A$ e le derivate seconde soddisfano alla limitazione data dalla (23) ([8]). Per la precedente osservazione $u_1$ ha quasi ovunque differenziale secondo in $A$ e per il teorema II $u_1 \in G_\alpha$.

Abbiamo provato l'esistenza di una funzione minimante. Per completare la dimostrazione premettiamo due teoremi. Consideriamo i seguenti operatori differenziali:

$$m_\alpha(u) \equiv \mathcal{C}'(u) + \alpha\mathcal{C}''(u) \equiv \frac{1+\alpha}{2}(r+t) - \frac{1-\alpha}{2}\sqrt{(r-t)^2+4s^2}, \tag{25}$$

$$M_\alpha(u) \equiv \alpha\mathcal{C}'(u) + \mathcal{C}''(u) \equiv \frac{1+\alpha}{2}(r+t) + \frac{1-\alpha}{2}\sqrt{(r-t)^2+4s^2}. \tag{26}$$

IV. *Sia $u \in G_\alpha$. Fissato comunque un operatore $L$ di $\mathcal{L}_\alpha$ si ha*

$$m_\alpha(u) \leq L(u) \leq M_\alpha(u) \quad q.o. \quad in \quad A. \tag{27}$$

La (27) è una immediata conseguenza della (6): essendo $\mathcal{C}'(u) \leq \mathcal{C}''(u)$ il minimo di $L(u)$ al variare di $\theta$ e di $\gamma$, con $\alpha \leq \gamma \leq 1$, è precisamente $m_\alpha(u)$.

V. *Vi è al più una funzione $u$ continua in $\bar{A}$, con derivate prime assolutamente continue secondo Tonelli in $A$, uguale a $\varphi$ su $\mathcal{F}A$ e tale che $m_\alpha(u) = 0$ (oppure $M_\alpha(u) = 0$) q.o. in $A$.*

Supponiamo che vi siano due funzioni $u$ e $v$ siffatte.

Per la (25) la $u$ soddisfa alla (8) e quindi per il teorema I vi è un $L$ di $\mathcal{L}_\alpha$ tale che $L(u) = 0$ q.o. in $A$. Si ha quindi $u \in G_\alpha$ ed analogamente

([8]) Vedere L. Tonelli [7].

si prova $v \in G_\alpha$. Per il precedente teorema $L(v) \geq m_\alpha(v)$ e quindi

$$L(u - v) \leq 0 \quad \text{q.o.} \quad \text{in } A, \qquad u = v \quad \text{su } \mathcal{F}A$$

e per il principio di massimo $u \geq v$ in $A$. Analogamente si prova $u \leq v$ in $A$ e quindi $u \equiv v$.

Riprendiamo ora la dimostrazione del teorema V e proviamo che la (24) è soddisfatta.

Posto

$$(28) \qquad a_1 = 1,\ b_1 = 0,\ c_1 = \alpha \ \text{se}\ (r_1 - t_1)^2 + 4s_1^2 = 0, \quad \left(r_1 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \ldots\right),$$

e nel caso $(r_1 - t_1)^2 + 4s_1^2 > 0$ posto

$$(29) \qquad \begin{gathered} a_1 = \frac{1+\alpha}{2} - \frac{1-\alpha}{2} \frac{r_1 - t_1}{\sqrt{(r_1 - t_1)^2 + 4s_1^2}}, \quad c_1 = \frac{1+\alpha}{2} + \frac{1-\alpha}{2} \frac{r_1 - t_1}{\sqrt{(r_1 - t_1)^2 + 4s_1^2}}, \\ b_1 = -\frac{(1-\alpha)\, s_1}{\sqrt{(r_1 - t_1)^2 + 4s_1^2}}, \end{gathered}$$

si ha

$$(30) \qquad L_1(u_1) \equiv a_1 r_1 + 2b_1 s_1 + c_1 t_1 \equiv m_\alpha(u_1) \quad \text{q.o.} \quad \text{in } A.$$

Per il teorema di Bers e Nirenberg riportato vi è una funzione $v$ di $G_\alpha$ tale che

$$L_1(v) = 0 \quad \text{q.o.} \quad \text{in } A,$$

e quindi

$$L_1(u_1 - v) = m_\alpha(u_1) \quad \text{q.o.} \quad \text{in } A, \qquad u_1 = v \quad \text{su } \mathcal{F}A.$$

Siccome $u_1 \in G_\alpha$ per il teorema VI $m_\alpha(u_1) \leq 0$ e quindi per il principio di massimo $u_1 - v \geq 0$. Siccome per la definizione di $u_1$ si ha $u_1 \leq v$ in $z_0$, per il principio di massimo deve essere $u_1 - v \equiv 0$ in $A$. Pertanto è provato che $m_\alpha(u_1) = 0$, cioè la (24). Dal teorema V segue quindi che la funzione minimante è unica. Inoltre indicato con $u$ una qualsiasi funzione di $G_\alpha$ e con $L$ l'operatore di $\mathcal{L}_\alpha$ tale che

$$L(u) = 0 \quad \text{q.o.} \quad \text{in } A,$$

si ha per il teorema IV

$$L(u_1) \geq m_\alpha(u_1) = 0,$$

e quindi

$$L(u_1 - u) \geq 0 \quad \text{q.o.} \quad \text{in } A, \qquad u_1 = u \quad \text{su } \mathcal{F}A,$$

e pertanto o $u$ coincide con $u_1$ oppure è maggiore di $u_1$ in tutto $A$.

In modo analogo si provano le proprietà della funzione massimante $u_2$.

Se in un punto $z_0$ $u_1$ ha derivate seconde non tutte nulle per la (24) $\mathcal{C}'(u_1) \neq \mathcal{C}''(u_1)$ in $z_0$ e pertanto ivi sono univocamente definiti gli assi principali della forma quadratica $U_1$ e l'angolo $\theta$ di sfasamento fra le due forme quadratiche $F_1$ ed $U_1$. Per la (6) si ha quindi in $z_0$:

$$L_1 u_1 = (\gamma \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\,\mathcal{C}'(u_1) + (\gamma \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)\,\mathcal{C}''(u_1),$$

essendo $\gamma$ la radice caratteristica più piccola di $F_1$ in $z_0$. Per la (24) deve essere

$$\gamma \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1, \quad \gamma \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \alpha,$$

e quindi

$$\gamma = \alpha, \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Analoghe considerazioni possono essere svolte per $u_2$ ed $L_2$.

*Osservazione I.* La funzione $u_1$ è un integrale ellittico della (24) in tutti i punti ove $u_1$ è dotata di derivate seconde non tutte nulle. Infatti se $(r - t)^2 + 4s^2 > 0$ $m_\alpha(u)$ è derivabile rispetto ad $r$, $s$, $t$ e si ha

$$4\,(m_\alpha)_r\,(m_\alpha)_t - (m_\alpha)_s^2 = 16\,\alpha > 0.$$

Analoga proprietà vale per $u_2$.

*Osservazione II.* Notiamo una proprietà estremale di $M_\alpha$ più forte di quella provata. Siano $u$ e $v$ due funzioni continue in $\bar{A}$ e con derivate prime assolutamente continue secondo Tonelli in $A$ e sia $u_{xy}^2 \geq u_{xx}^2\, u_{yy}^2$ q.o. in $A$. Se

$$M_\alpha(u) \leq L(v) \quad \text{q.o.} \quad \text{in } A, \qquad L \in \mathcal{L}_\alpha, \qquad u \geq v \quad \text{su } \mathcal{F}A,$$

risulta $u \geq v$ in tutto $A$. Questo segue da

$$L(v - u) = [L(v) - M_\alpha(u)] + [M_\alpha(u) - L(u)].$$

*Osservazione III.* Le ipotesi sulla frontiera di $A$ e su $\varphi$ possono essere attenuate, come risulta anche dai lavori [2], [3] citati.

*Osservazione IV.* I risultati possono essere estesi ad equazioni del tipo

$$ar + 2bs + ct + a_1 p + b_1 q + c_1 u = f,$$

con opportune ipotesi sui coefficienti. Notiamo ad esempio il seguente teorema.

Siano $a_1$ e $b_1$ funzioni misurabili in $A$ e $\delta$ una costante positiva tale che $a_1^2 + b_1^2 \leq \delta^2$. Nelle ipotesi relative ad $A$ e $\varphi$ del teorema V, fissato comunque un operatore $L$ di $\mathcal{L}_\alpha$, per il teorema di Bers e Nirenberg riportato esiste una funzione $u$ di classe $C^{(1)}$ in $\bar{A}$, dotata di derivate prime assolutamente continue in $A$, soluzione del problema di Dirichlet

$$L(u) + a_1 p + b_1 q = 0 \quad \text{q.o.} \quad \text{in } A, \qquad u = \varphi \quad \text{su} \quad \mathcal{F}A.$$

Indichiamo con $G(\alpha, \delta)$ la classe di dette soluzioni al variare comunque di $L$ in $\mathcal{L}_\alpha$ e di $a_1$ e $b_1$ nella classe delle funzioni misurabili verificanti la limitazione $a_1^2 + b_1^2 \leq \delta^2$. Vi è una funzione $u_1$ in $G(\alpha, \delta)$ che è minore in ogni punto di $A$ di tutte le altre funzioni di $G(\alpha, \delta)$ e verifica la condizione

$$\mathcal{C}'(u_1) + \alpha \mathcal{C}''(u_1) - \delta \sqrt{p^2 + q^2} = 0 \quad \text{q.o.} \quad \text{in } A.$$

La dimostrazione è analoga a quella del caso già trattato.

*Osservazione V.* I risultati del § 1 possono essere parzialmente estesi al caso di più di due variabili. Per quanto invece riguarda la dimostrazione dell'esistenza della soluzione del corrispondente problema variazionale si incontrano difficoltà dovute anche alla mancanza di maggiorazioni analoghe alle (22), (23) nel caso di più di due variabili.

# BIBLIOGRAFIA

[1] CALDERON A., ZYGMUND A. *On the existence of certain integrals* « Acta Math. » 88 (1952) pp. 85-139.

[2] BERS L., NIRENBERG L., *On a representation theorem for linear elliptic systems with discontinuous coefficients and its applications.* » « Convegno Internazionale sulle Equazioni lineari alle derivate parziali », Trieste, 1954.

[3] BERS L., NIRENBERG L., *On linear and non-linear elliptic boundary value problems in the plane* « Convegno Internazionale sulle Equazioni lineari alle derivate parziali » Trieste, 1954.

[4] DARBOUX G., *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Gauthier Villars, Paris 1894.

[5] MIRANDA C., *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Springer-Verlag, Berlino (1955).

[6] NIRENBERG L., *On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity* « Comm. pure applied math » 6, pp. 103-155, (1953).

[7] TONELLI L., *L'estremo assoluto degli integrali doppi* « Ann. Scuola Norm. Pisa » 2, (1933) pp. 89-130.