Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
*Classe di Scienze*

Giovanni Aquaro

# Convergenza localmente quasi-uniforme ed estensione di Hewitt di uno spazio completamente regolare

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série*, tome 16, nº 3 (1962), p. 207-212

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1962_3_16_3_207_0>

# CONVERGENZA LOCALMENTE QUASI-UNIFORME ED ESTENSIONE DI HEWITT DI UNO SPAZIO COMPLETAMENTE REGOLARE

Nota (*) di GIOVANNI AQUARO

INTRODUZIONE. — In tutto il seguito, $E$ denota uno spazio topologico ed $M$ denota uno spazio metrico con distanza $d$.

Nella presente nota si indica un criterio, che non sembra sia stato segnalato altrove, per la continuità della applicazione limite di una successione (semplicemente) convergente di applicazioni continue di $E$ in $M$.

Se ne deduce la convergenza sulla estensione $v(E)$ di HEWITT di $E$, supposto completamente regolare (cioè uniformizzabile di Hausdorff), di una successione $(\bar{f}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ di applicazioni continue di $v(E)$ in $M$ verso una applicazione continua $\bar{f}$ di $v(E)$ in $M$, quando la successione $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ delle restrizioni delle $\bar{f}_n$ ad $E$ converga in $E$ verso la restrizione $f$ di $\bar{f}$ ad $E$.

Con $\mathbf{N}$ si denota l'insieme degli interi naturali (compreso lo zero).

1. — Conviene premettere un lemma.

LEMMA 1. — *Supponiamo che $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sia una successione di applicazioni continue di $E$ in $M$ e supponiamo che tale successione converga in $E$ verso l'applicazione $f$ di $E$ in $M$. Supponiamo, inoltre, che esista una applicazione $g$ di $E$ in $M$ tale che per ogni numero reale positivo $\varepsilon$ e per ogni $n\in\mathbf{N}$ si possa assegnare una funzione a valori in $\mathbf{N}$ $\varphi_{\varepsilon n}$ che sia localmente limitata* (1) *in $E$ e sia tale che per ogni $x\in E$ risulti:*

$$n \leq \varphi_{\varepsilon n}(x), \quad d\left(f_{\varphi_{\varepsilon n}(x)}(x), g(x)\right) < \varepsilon .$$

*Allora risulta $f = g$ e $g$, ed in conseguenza $f$, risulta continua.*

---

(*) Lavoro eseguito nel GRUPPO DI RICERCA n. 9 del Comitato Nazionale per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, per l'anno 1961-62.

(1) Cioè per ogni $x\in E$ esiste un intorno $V$ di $x$ sul quale $\varphi_{\varepsilon n}$ sia limitata.

DIM. Sia $\varepsilon$ reale positivo e sia $x_0 \in E$. Poichè risulta $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ esiste uno $\nu \in \mathbf{N}$ tale che da $n \in \mathbf{N}$ e $\nu \leq n$ consegua $d(f_n(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Esiste una funzione $\varphi_{\frac{\varepsilon}{3},\nu}$ a valori in $\mathbf{N}$ la quale è localmente limitata ed è tale che, per ogni $x \in E$ sia $\nu \leq \varphi_{\frac{\varepsilon}{3},\nu}(x)$, $d(f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3},\nu}(x)}(x), g(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Poichè $\varphi_{\frac{\varepsilon}{3},\nu}$ è localmente limitata esiste un intorno $U$ di $x_0$ sul quale $\varphi_{\frac{\varepsilon}{3},\nu}$ è limitata e supponiamo che sia $\zeta \in \mathbf{N}$ tale che $\varphi_{\frac{\varepsilon}{3},\nu}(x) \leq \zeta$ per ogni $x \in U$. Poichè ogni $f_n$ è continua esiste un intorno $V$ di $x_0$ tale che per ogni $k = 0, 1, \dots, \zeta$, sia $d(f_k(x), f_k(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Sia $x \in U \cap V$.

Per quanto sopra si ha $d(f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3},\nu}(x)}(x), g(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$, per la definizione di $\varphi_{\frac{\varepsilon}{3},\nu}$, $d(f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3},\nu}(x)}(x), f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3},\nu}(x)}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$ poichè è $x \in V$, e, da ultimo, essendo $\nu \leq \varphi_{\frac{\varepsilon}{3},\nu}(x)$, si ha $d(f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3},\nu}(x)}(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$ per la definizione di $\nu$.

Consegue

$$d(g(x), f(x_0)) \leq d(g(x), f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3},\nu}(x)}(x)) + d(f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3},\nu}(x)}(x), f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3},\nu}(x)}(x_0)) +$$

$$+ d(f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3},\nu}(x)}(x), f(x_0)) < \varepsilon .$$

Concludendo, in primo luogo è $d(g(x_0), f(x_0)) < \varepsilon$ donde, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, $g(x_0) = f(x_0)$; successivamente risulta $d(g(x), g(x_0)) < \varepsilon$ per ogni $x \in U \cap V$ e quindi $g$, insieme ad $f$, è continua

Ciò stabilito premettiamo una definizione:

DEF. 1. — *Se $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ è una successione di applicazioni di $E$ in $M$, si dice che $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge localmente quasi-uniformemente verso la applicazione $f$ di $E$ in $M$ se, per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ e per ogni, $\nu \in \mathbf{N}$, esiste una funzione $\varphi_{\varepsilon\nu}$ su $E$ a valori in $\mathbf{N}$, localmente limitata* [2] *su $E$ e tale che, per ogni $x \in E$, sia $\nu \leq \varphi_{\varepsilon\nu}(x)$ e $d(f_{\varphi_{\varepsilon,\nu}(x)}(x), f(x)) < \varepsilon$.*

---

(2) Cfr. nota (1).

Dopo ciò è agevole stabilire la caratterizzazione preannunciata nell'INTRODUZIONE.

PROP. 1. — *Supponiamo che* $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ *sia una successione convergente di applicazioni di* $E$ *in* $M$ *e* $f$ *sia il suo limite. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

*a)* — $f$ *è continua,*

*b)* — *per ogni numero reale* $\varepsilon > 0$ *e per ogni* $\nu \in \mathrm{N}$ *esistono una funzione* $\varphi_{\varepsilon,\nu}$ *su* $E$ *a valori in* $\mathrm{N}$ *ed un ricovrimento aperto numerabile, localmente finito ed* $\mathcal{U}$*-riducibile* (³) $(G_n)_{n \in \mathrm{N}}$ *di* $E$ *tale ehe* $\varphi_{\varepsilon\nu}$ *sia limitata sù ciascun* $G_n$ *e, per ogni* $x \in E$ *sia* $\nu \leq \varphi_{\varepsilon,\nu}(x)$, $d(f_{\varphi_{\varepsilon,\nu}(x)}(x), f(x)) < \varepsilon$.

*c)* — *la successione* $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ *converge localmente quasi-uniformemente verso* $f$ *su* $E$ (def. 1).

DIM. *a) implica b).* Sia vera la *a)* e supponiamo che $\varepsilon$ sia un numero reale $> 0$ e che sia $\nu \in \mathrm{N}$. Per ogni $k \in \mathrm{N}$ sia $g_k$ la funzione reale, ovviamente continua in $E$, definita ponendo $g_k(x) = d(f_{\nu+k}(x), f(x))$ per ogni $x \in E$ e poniamo

$$F_k = \overset{-1}{g_k}(]-\infty\,,\ \varepsilon/2]), \quad U_k = \overset{-1}{g_k}(]-\infty\,,\ \varepsilon\,[).$$

Ovviamente $F_k$ è chiuso, $U_k$ è aperto ed $F_k$ è $\mathcal{U}$-contenuto (³) in $U_k$ (si tenga presente che la retta numerica è uno spazio normale e quindi che $]-\infty\,,\ \varepsilon/2]$ è $\mathcal{U}$-contenuto in $]-\infty\,,\ \varepsilon\,[$ ed inoltre che $g_k$ è continua).

Sia $x \in E$.

Risultando $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ esiste un $n \in \mathrm{N}$ tale che $\nu \leq n$ e tale che $d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon/2$. Posto $k = n - \nu$, consegue $g_k(x) \leq \varepsilon/2$ e quindi $x \in F_k$: dunque $(F_k)_{k \in \mathrm{N}}$ è un ricovrimento (chiuso) di $E$. In conseguenza $(U_k)_{k \in \mathrm{N}}$ è un ricovrimento aperto $\mathcal{U}$-riducibile di $E$ e $(F_k)_{k \in \mathrm{N}}$ è una sua $\mathcal{U}$-riduzione (³).

Inoltre, per il sopradetto $n$ si ha $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$: denotiamo con $\varphi_{\varepsilon\nu}(x)$ il più piccolo degli $n \in \mathrm{N}$ tali che $\nu \leq n$ e $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Pertanto la applicazione $\varphi_{\varepsilon\nu}\colon E \to \mathrm{N}$ gode della proprietà $\nu \leq \varphi_{\varepsilon\nu}(x)$ per ogni $x \in E$.

Sia $k \in \mathrm{N}$ e $x \in U_k$: risulta $d(f_{\nu+k}(x), f(x)) = g_k(x) < \varepsilon$ e quindi si ha $\varphi_{\varepsilon\nu}(x) \leq \nu + k$. Dunque, la restrizione di $\varphi_{\varepsilon\nu}$ ad $U_k$ è limitata

In forza della def. 6, § 3 e del lemma 10, § 2 di [1] risulta l'esistenza di un ricovrimento aperto, numerabile, localmente finito ed $\mathcal{U}$-riducibile $(G_k)_{k \in \mathrm{N}}$ di $E$ tale che, per ogni $k \in \mathrm{N}$, sia $G_k \subset U_k$,

*b) implica c).* Consegue dalla def. 1.

*c) implica a).* Consegue dal lemma 1 per $f = g$.

---

(³) Le definizioni di insieme chiuso $\mathcal{U}$-contenuto in un insieme aperto, di ricovrimento aperto $\mathcal{U}$-riducibile e di $\mathcal{U}$-riduzione trovansi in [1] § 3, deff. 2, 5 e 6.

2. — Il risultato stabilito consente di ottenere la seguente prop. 2 relativa alla convergenza sulla estensione di HEWITT dopo aver premesso l'ulteriore lemma:

LEMMA 2. — *Supponiamo che $X$ sia una parte ovunque densa dello spazio uniformizzabile separato $E$ tale che, posto $\omega = \text{card}\,\mathbf{N}$, la $\omega$-struttura uniforme $\mathcal{A}_\omega(X)$ su $X$* (4) *sia identica alla struttura uniforme $\mathcal{A}_\omega(E)_X$ indotta su $X$ dalla $\omega$-struttura uniforme $\mathcal{A}_\omega(E)$ su $E$. Allora se $(G_n)_{n\in\mathbf{N}}$ è un ricovrimento aperto numerabile localmente finito ed $\mathcal{U}$-riducibile del sottospazio (uniformizzabile e separato) $X$, esiste un ricovrimento aperto numerabile localmente finito ed $\mathcal{U}$-riducibile $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dell'intero $E$ tale che $(U_n \cap X)_{n\in\mathbf{N}}$ sia un raffinamento di $(G_n)_{n\in\mathbf{N}}$.*

DIM. Sia $W$ un'adiacenza di $X$ per $\mathcal{A}_\omega(X)$ tale che $W(x))_{x\in E}$ sia un raffinamento di $(G_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la cui esistenza è assicurata (4) dal teor. 1, d), § 2 di [1].

Poichè è $\mathcal{A}_\omega(X) = \mathcal{A}_\omega(E)_X$ esiste un'adiacenza $V$ di $E$ per $\mathcal{A}_\omega(E)$ la cui traccia $V \cap (X \times X)$ su $X \times X$ sia $W$. Sia $W^*$ un'adiacenza aperta e simmetrica di $E$ per $\mathcal{A}_\omega(E)$ tale che $W^* \circ W^* \subset V$. Sia $x \in E$ e sia $y \in W^*(x) \cap X$. Per ogni $z \in W^*(x) \cap X$, stante la simmetria di $W^*$, si ha $(y, z) \in W^* \circ W^* \subset V$ nonchè $(y, z) \in X \times X$ e per ciò $(y, z) \in W$ e poi $z \in W(y)$. Supposto che $n \in \mathbf{N}$ sia tale che $W(y) \subset G_n$, esistente perchè $(W(x))_{x\in X}$ è un raffinamento di $(G_n)_{n\in\mathbf{N}}$, consegue $z \in G_n$ e quindi, per l'arbitrarietà di $z$ in $W^*(x) \cap X$, risulta $W^*(x) \cap X \subset G_n$.

Ma, d'altra parte, poichè $W^*$ è un'adiacenza di $E$ per $\mathcal{A}_\omega(E)$, esiste un ricovrimento aperto, localmente finito, numerabile ed $\mathcal{U}$-riducibile $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ di $E$ tale che:

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} (U_n \times U_n) \subset W^*.$$

Sia $x \in U_q$ con $q \in \mathbf{N}$. Consegue $U_q \subset \bigcup_{p\in\mathbf{N}_x^*} U_p \subset W^*(x)$, dove $\mathbf{N}_x^*$ è l'insieme degli $n \in \mathbf{N}$ tali che $x \in U_n$: assunto un $n \in \mathbf{N}$ tale che $W^*(x) \cap X \subset G_n$, come sopra, risulta $U_p \cap X \subset G_n$.

Così dimostrato il lemma 2, si può procedere a stabilire la proposizione che è obbiettivo del presente n. 2.

PROP. 2. — *Supponiamo che $X$ sia una parte ovunque densa dello spazio uniformizzabile separato $E$ tale che, posto $\omega = \text{card}(\mathbf{N})$, la $\omega$-struttura uniforme $\mathcal{A}_\omega(X)$ su $X$* (4) *sia identica alla struttura uniforme $\mathcal{A}_\omega(E)_X$ indotta su $X$ dalla $\omega$-struttura uniforme $\mathcal{A}_\omega(E)$ su $E$. Supponiamo inoltre che $\overline{f}$ e $(\overline{f}_n)_{n\in\mathbf{N}}$*

---

(4) Cfr. [1], § 3, def. 4.

(5) Cfr. nota (3).

*siano un'applicazione e, rispettivamente, una successione di applicazioni di $E$ in $M$, tutte continue su $E$ e tali che, denotate con $f$ e, rispettivamente, $f_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ le restrizioni di $\overline{f}$ e di $\overline{f}_n$ ad $X$, sia $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Allora, si ha $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{f}_n = \overline{f}$.*

DIM. Ragionando per assurdo, supponiamo che esista un $x_0 \in E$ tale che $(\overline{f}_n(x_0))_{n\in\mathbf{N}}$ non converga verso $\overline{f}(x_0)$. Dunque, esistono un numero reale positivo $\varepsilon$ ed una successione strettamente crescente $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ di interi non negativi (cioè di elementi di $\mathbf{N}$) tale che

$$d\,(\overline{f}_{n_k}(x_0),\ \overline{f}(x_0)) \geq \varepsilon\,. \tag{1}$$

In $X$ la successione $(f_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ converge verso la $f$ al pari della $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dalla quale essa è estratta. Pertanto, in forza della equivalenza di $a)$ e $b)$ nella prop. 1, esistono una funzione $\varphi$ su $X$ a valori in $\mathbf{N}$, ed un ricovrimento aperto numerabile, localmente finito, $\mathcal{U}$-riducibile $(G_n)_{n\in\mathbf{N}}$ del sottospazio $X$, tali che $\varphi$ sia limitata sopra ciascun $G_n$ e per ogni $x \in X$ sia:

$$d\,(f_{n_{\varphi(x)}}(x),\ f(x)) < \varepsilon\,. \tag{2}$$

Per il lemma 1, esiste un ricovrimento numerabile, localmente finito ed $\mathcal{U}$-riducibile $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ di $E$ tale che $(U_n \cap X)_{n\in\mathbf{N}}$ sia un raffinamento di $(G_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (in $X$).

Esiste un $n \in \mathbf{N}$ tale che $x_0 \in U_n$ ed esiste un $p \in \mathbf{N}$ tale che $U_n \cap X \subset G_p$: la $\varphi$ abbia $\varrho \in \mathbf{N}$ come suo massimo su $G_p$. Per ogni $k = 0, 1, \ldots, \varrho$ sia $V_k$ l'insieme degli $x \in E$ tali che $d\,(\overline{f}_{n_k}(x),\ \overline{f}(x)) > \varepsilon$: stante la continuità di $\overline{f}$ e di ciascuna delle $\overline{f}_k$ $(k = 0, 1, \ldots, \varrho)$, ogni $V_k$ è aperto e, posto $V = \bigcap\limits_{k=0}^{\varrho} V_k$, $V$ è un intorno di $x_0$ a causa di (1).

Poichè $X$ è ovunque denso in $E$ e poichè $V \cap U_n$ è un intorno di $x_0$, risulta $(V \cap U_n) \cap X \neq \emptyset$. Sia $x \in (V \cap U_n) \cap X$ (ovviamente $\subset V \cap G_p$).

Risulta $x \in G_p$ e quindi è $\varphi(x) \leq \varrho$ e $x \in V \subset V_{\varphi(x)}$ e poi $d\,(\overline{f}(x), \overline{f}_{n_{\varphi(x)}}(x)) \geq \varepsilon$ mentre, per la (2), si ha $d\,(\overline{f}(x), \overline{f}_{n_{\varphi(x)}}(x)) = d\,(f(x),\ f_{n_{\varphi(x)}}(x)) < \varepsilon$ il che è contraddittorio.

Dunque $(\overline{f}(x_0))_{n\in\mathbf{N}}$ deve convergere verso $\overline{f}(x_0)$ e da ciò $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{f}_n = \overline{f}$.

La prop. 2 è così dimostrata.

Conserviamo l'ipotesi che $E$ sia uniformizzabile e separato (cioè, completamente regolare). Tale spazio può considerarsi (ingettivamente) immerso, come parte ovunque densa, nel suo completamento di HEWITT $v(E)$ con la condizione che, detta $\mathcal{A}_\omega(v(E))_E$ la struttura uniforme indotta su $E$ dalla $\omega$-struttura uniforme $\mathcal{A}_\omega(v(E))$ di $v(E)$, sia $\mathcal{A}_\omega(v(E))_E = \mathcal{A}_\omega(E)$ ed inoltre

$v(E)$ sia completo per $\mathscr{A}_\omega(v(E))$ (cioè sia un $Q$-spazio secondo HEWITT; cfr. [2], § 2, prop. 2). Con ciò la prop. 2 dà luogo al

COROLLARIO. — *Se $\bar{f}$ e $(\bar{f}_n)_{n\in\mathrm{N}}$ sono un'applicazione e, rispettivamente, una successione di applicazioni, tutte continue, della estensione di HEWITT $v(E)$ nello spazio metrico $M$ e se la successione $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ delle restrizioni delle $\bar{f}_n$ ad $E$ converge, in $E$, verso la restrizione $f$ di $\bar{f}$ ad $E$, allora in tutto $v(E)$ si ha $\lim_{n\to\infty} \bar{f}_n = \bar{f}$.*

3. — Ferme restando le ipotesi per $E$ e $v(E)$ del corollario alla prop. 2, supponiamo che $E$ sia un $P$-spazio cioè supponiamo che l'intersezione di ogni successione di insiemi aperti di $E$ sia ancora un insieme aperto. È noto che ciò accade se e solo se ogni successione convergente di funzioni reali continue ha come limite necessariamente una funzione continua.

Sia $(\bar{f}_n)_{n\in\mathrm{N}}$ una successione di funzioni reali continue convergente in $v(E)$ verso una funzione $\bar{f}$. Dimostriamo che se, come si è ammesso $E$ è un $P$-spazio, la $\bar{f}$ è continua e quindi anche $v(E)$ è un $P$-spazio.

Invero siano $f_n$ e $f$ le restrizioni di $\bar{f}_n$ e, rispett., di $\bar{f}$ ad $E$.

Poichè $E$ è $P$-spazio, come sopra si è detto, $f$ risulta continua in $E$ e quindi, per una proprietà di $v(E)$, esiste una funzione reale continua $g$ su su $v(E)$ la cui restrizione ad $E$ è $f$. Per il corollario alla prop. 2. in cui $M$ si faccia coincidere con la retta numerica, si ha $\lim_{n\to\infty} \bar{f}_n = g$ e quindi $\bar{f} = g$. La $\bar{f}$ è continua e quindi $v(E)$ è un $P$-spazio.

Il risultato indicato è noto per altra via.

Che, reciprocamente, se $v(E)$ è un $P$-spazio anche $E$ lo sia, è banale.

## BIBLIOGRAFIA

[1] AQUARO, G: *Ricovrimenti aperti e strutture uniformi sopra uno spazio topologico;* Annali di Mat. pura ed appl. (IV), tomo XLVII (1959) pp. 319-390.

[2] » : *Completamenti di spazii uniformi;* Annali di Mat. pura ed appl. (IV), vol. LVI, pp. 87-98.