

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

JINDŘICH NEČAS

**Sur l'existence de la solution classique du problème de
Poisson pour les domaines plans**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 16,
n° 3 (1962), p. 285-296

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1962_3_16_3_285_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SUR L'EXISTENCE DE LA SOLUTION CLASSIQUE DU PROBLEME DE POISSON POUR LES DOMAINES PLANS

JINDŘICH NEČAS, Prague-Nancy

Introduction.

Nous nous intéressons aux équations aux dérivées partielles du type elliptique de l'ordre $2k$. On considère des domaines plans, bornés, dont chaque point de la frontière est sommet d'un triangle, le même pour tous les points en question, placé à l'extérieur de Ω . L'opérateur différentiel D a la forme

$$\sum_{|i|, |j| \leq k} (-1)^{|i|} D^i (a_{ij} D^j).$$

Le résultat central: Soit Ω le domaine considéré, soit u la solution faible de l'équation $Du = f$, soit $u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = \dots = \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = 0$ à la frontière au sens généralisé. Alors sous certaines conditions sur f (il suffit par exemple $f \in L_2(\Omega)$) et a_{ij} , la solution u avec ses dérivées jusqu'à l'ordre $k - 1$ est continue sur la fermeture de Ω .

Si la frontière est assez régulière, les résultats de ce genre sont bien connus pour dimension quelconque. Cela découle des théorèmes de Sobolev (cfr. E. Gagliardo [1]) et des estimations « à priori » démontrées par plusieurs auteurs (cfr. par exemple S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg [2]).

En abandonnant la condition sur la régularité de la frontière, ce résultat est connu pour dimension quelconque, mais seulement pour $k = 1$. Pour le démontrer, on peut se servir des méthodes classiques de G. Tautz (cfr. G. Tautz [3]). En ce cas les conditions sur les coefficients a_{ij} sont très sévères. Ce résultat est valable si l'on suppose seulement $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$ ce qui découle des résultats de C. B. Morrey (cfr. C. B. Morrey [4]).

Notre méthode est analogue à l'idée utilisée au livre de R. Courant et D. Hilbert [5] où on considère l'équation de Laplace. On s'appuie sur

les résultats de L. Nirenberg [6] sur la régularité de la solution à l'intérieur du domaine.

À la dernière partie de cet article on considère les opérateurs polyharmoniques. Modifiant un résultat de M. Nicolesco [7], on obtient pour le problème de Dirichlet des résultats plus forts.

1. Lemmes. On désigne par E_2 l'espace euclidien, $X = [x_1, x_2]$ le point générique.

Soit i le vecteur $[i_1, i_2]$ où $0 \leq i_1, 0 \leq i_2$ sont des entiers, soit $|i| = i_1 + i_2$. Alors on écrit $D^i u = \frac{\partial^{|i|} u}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}}$.

Soit Ω un ouvert quelconque. On désigne par $W_p^{(k)}(\Omega)$, $p \geq 1, k \geq 0$ un entier, l'espace des fonctions complexes qui sont avec toutes leurs dérivées (au sens des distributions) jusqu'à l'ordre k de p ème puissance sommables sur Ω . On introduit dans $W_p^{(k)}(\Omega)$ la norme par

$$(1.1) \quad |u|_{W_p^{(k)}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |i| \leq k} \int_{\Omega} |D^i u|^p dX \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Les espaces $W_p^{(k)}(\Omega)$ sont complets, séparables. Pour $p = 2$, on obtient l'espace de Hilbert.

On désigne par $C^{(k)}(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions, continues sur la fermeture de Ω avec toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k . On munit $C^{(k)}(\bar{\Omega})$ par la norme

$$(1.2) \quad |u|_{C^{(k)}(\bar{\Omega})} = \sum_{0 \leq |i| \leq k} \max_{X \in \bar{\Omega}} |D^i u(X)|.$$

Soit $0 < \mu \leq 1$. On désigne par $C^{(k), \mu}(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$ avec toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k . On suppose les dérivées de l'ordre k μ höldériennes. On munit $C^{(k), \mu}(\bar{\Omega})$ par la norme :

$$(1.3) \quad |u|_{C^{(k), \mu}(\bar{\Omega})} = |u|_{C^{(k)}(\bar{\Omega})} + \sum_{|i|=k} \sup_{\substack{X, Y \in \bar{\Omega} \\ X \neq Y}} \frac{|D^i u(X) - D^i u(Y)|}{|X - Y|^\mu}.$$

On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment continûment différentiables avec support compact dans Ω .

Par $\overset{\circ}{W}_p^{(k)}(\Omega)$ on désigne l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ moyennant la norme de $W_p^{(k)}(\Omega)$.

Nous utilisons dans la suite les théorèmes de Sobolev sur l'immersion, pour le cas spécial de dimension $n = 2$. (cfr. par exemple [1]).

PROPOSITION 1.1 — Soit Ω un domaine borné avec la frontière $\overset{\circ}{\Omega}$ une variété indéfiniment continûment différentiable de dimension $n - 1$, Ω étant d'un seul côté de $\overset{\circ}{\Omega}$. Soit $u \in W_p^{(k)}(\Omega)$ et $kp < 2$.

Alors $W_p^{(k)}(\Omega) \subset W_2^{(0)}(\Omega)$ pour $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{2}$ algébriquement et topologiquement.

Soit $kp = 2$. Alors on a pour n'importe quel $q > 1$: $W_p^{(k)}(\Omega) \subset W_q^{(0)}(\Omega)$ algébriquement et topologiquement.

Soit $kp > 2$. Soit l entier, $l < k - \frac{2}{p} \leq l + 1$.

Posons $\mu = k - \frac{2}{p} - l$ dans le cas où $k - \frac{2}{p} < l + 1$, soit $0 < \mu < 1$

pour $k - \frac{2}{p} = l + 1$.

Alors $W_p^{(k)}(\Omega) \subset C^{(l, \mu)}(\overline{\Omega})$ algébriquement et topologiquement

Soit $l < k$. Alors la transformation identique de $W_p^{(k)}(\Omega)$ dans $W_p^{(l)}(\Omega)$ est complètement continue.

Soit Ω un domaine borné. On désigne par $D = (-1)^{|i|} \sum_{0 \leq |i|, |j| \leq k} D^i (a_{ij} D^j)$.

On suppose $a_{ij} \in W_\infty^{(0)}(\Omega)$. Désormais on suppose que D soit P -elliptique (elliptique pour le problème de Poisson) :

$$(1.4) \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \implies \left| \int_{\Omega} \overline{a_{ij}} D^i \varphi D^j \overline{\varphi} dX \right| \geq \alpha |\varphi|_{W_2^{(k)}(\Omega)}^2.$$

On désigne par $W_2^{(-k)}(\Omega)$ l'espace des fonctionnelles sur $\overset{\circ}{W}_2^{(k)}(\Omega)$.

Soient $f \in W^{(-k)}(\Omega)$, $u \in W_2^{(k)}(\Omega)$. On dit que $Du = f$ faiblement si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \implies B(\varphi, u) = \int_{\Omega} \overline{a_{ij}} D^i \varphi D^j \overline{u} dX = f(\varphi)$.

Soit $u \in W_2^{(k)}(\Omega)$. On dit que $u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = \dots = \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = 0$ sur $\overset{\circ}{\Omega}$ si $u \in \overset{\circ}{W}_2^{(k)}(\Omega)$. Ici $\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}$ sont les dérivées selon la normale extérieure.

Soit $f \in W_2^{(-k)}(\Omega)$, $u \in \overset{\circ}{W}_2^{(k)}(\Omega)$ et $Du = f$.

Alors on dit que u résout le problème de Poisson : $Du = f$ dans Ω , $u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = \dots = \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = 0$ sur $\overset{\circ}{\Omega}$.

Il est bien connu (cfr. per exemple E. Magenes, G. Stampacchia [8]) :

PROPOSITION 1.2. — Soit Ω borné, D opérateur P -elliptique, $f \in W_2^{(-k)}(\Omega)$. Alors il existe précisément une solution u du problème de Poisson et on a

$$(1.5) \quad \|u\|_{W_2^{(k)}(\Omega)} \leq C \|f\|_{W_2^{(-k)}(\Omega)}.$$

On désigne dans la suite par $K(X, r)$ la boule, centrée au point X et du rayon r .

Il est démontré dans [6] (quoique l'auteur annonce pour simplifier le résultat un peu plus faible en remplaçant la condition $a_{ij} \in C^{(0),1}(\bar{\Omega})$ par $a_{ij} \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$) :

PROPOSITION 1.3. — Soit $K_r = K(0, r)$. Soit $0 \leq l < k$.

Soient $a_{ij} \in C^{(\chi_i-1),1}(\bar{K}_1)$ où $\chi_i = \max(1, |i| - l)$.

L'opérateur D soit P -elliptique. Soit $f \in W_2^{(-l)}(\Omega)$ et u la solution faible de $Du = f$.

Alors $u \in W_2^{(2k-l)}(K_r)$ pour $r < 1$ et on a :

$$(1.6) \quad \|u\|_{W_2^{(2k-l)}(K_r)} \leq C(r, \|a_{ij}\|_{C^{(\chi_i-1),1}(\bar{K}_1)}, \alpha)^{(1)} \cdot [\|u\|_{W_2^{(k)}(K_1)} + \|f\|_{W_2^{(-l)}(K_1)}].$$

Nous démontrerons maintenant :

THÉORÈME 1. — Soit $K_r = K(0, r)$, $r_0 \leq 1$. Soit $0 \leq l < k$. L'opérateur D soit P -elliptique, $a_{ij} \in C^{(\chi_i-1),1}(\bar{K}_{r_0})$, $\chi_i = \max(1, |i| - l)$. Soit $f \in W_2^{(-l)}(K_{r_0})$, u la solution faible de $Du = f$.

Alors $u \in C^{(k-1)}(\bar{K}_r)$ pour $r < r_0$ et on a :

$$(1.7) \quad \sum_{|i| \leq k-1} |D^i u(0)| \leq C (\|a_{ij}\|_{C^{(\chi_i-1),1}(\bar{K}_{r_0})}, \alpha) \cdot \left[r^{k-l} \|f\|_{W_2^{(-l)}(K_r)} + \sum_{|i| \leq k} r^{|i|-k} \left(\int_{K_r} |D^i u|^2 dX \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

DÉMONSTRATION. — Posons $Y = \frac{X}{r}$, $v(Y) = u(rY)$. Désignons par \tilde{D}^i le symbole de la dérivée en cartes Y .

(1) α est la constante de P -ellipticité Cfr. (1.4).

Il existe maintenant $w \in \overset{\circ}{W}_2^{(l)}(K_r)$ de sorte que $f(\varphi) = \int_{\overset{\circ}{K}_r} \sum_{|i| \leq l} D^i \varphi D^i \bar{w} dX$ et que $|f|_{W_2^{(-l)}(K_r)} = |w|_{W_2^{(l)}(K_r)}$. Posons pour $|i| \leq l$: $D^i w = f_i$, $g_i(Y) = r^{2k-|i|} f_i(rY)$, $b_{ij}(Y) = r^{2k-(|i|+|j|)} \cdot a_{ij}(rY)$. On a pour $\psi \in \mathcal{D}(K_1)$:

$$(1.8) \quad \int_{\overset{\circ}{K}_1} \bar{b}_{ij} \tilde{D}^i \psi \tilde{D}^j \bar{v} dY = \int_{\overset{\circ}{K}_1} \sum_{|i| \leq l} \tilde{D}^i \psi \bar{g}_i dY.$$

On obtient que l'opérateur $(-1)^{|i|} \tilde{D}^i (b_{ij} \tilde{D}^j)$ est P -elliptique sur K_1 , avec la constante α . Il est évident que $|b_{ij}|_{C^{(k_i-1),1}(\overset{\circ}{K}_1)} \leq |a_{ij}|_{C^{(k_i-1),1}(\overset{\circ}{K}_{r_0})}$. Utilisons maintenant la proposition 1.3 pour l'opérateur $(-1)^{|i|} \tilde{D}^i (b_{ij} \tilde{D}^j)$ et $r = \frac{1}{2}$. Ayant $k > l$, on obtient en vertu du (1.8) et tenant compte de la proposition 1.1: $v \in C^{(k-1)}(\overset{\circ}{K}_{\frac{1}{2}})$ et l'inégalité:

$$(1.9) \quad \sum_{|i| \leq k-1} |\tilde{D}^i v(0)| \leq C^* \cdot C\left(\frac{1}{2}, |a_{ij}|_{C^{(k_i-1),1}(\overset{\circ}{K}_{r_0})}, \alpha\right) \cdot \left[\left(\int_{\overset{\circ}{K}_1} \sum_{|i| \leq l} |g_i|^2 dY \right)^{\frac{1}{2}} + |v|_{W_2^{(k)}(K_1)} \right].$$

C^* est la norme de l'opérateur identique de $W_2^{(k-l+2)}(\overset{\circ}{K}_{\frac{1}{2}})$ dans $C^{(k-1)}(\overset{\circ}{K}_{\frac{1}{2}})$. En revenant à la variable X on tire de (1.9) l'inégalité (1.7).

2. La continuité de la solution.

Il nous sera utile le théorème de J. L. Lions (cfr. [8]):

PROPOSITION. 2.1. — Soient A, B, C les espaces de Banach, $A \subset B \subset C$ algébriquement et topologiquement. La transformation identique de A dans B est complètement continue.

Alors à chaque $\varepsilon > 0$ correspond $\lambda(\varepsilon)$ de sorte que

$$(2.1) \quad \forall u \in A \implies |u|_B \leq \varepsilon |u|_A + \lambda(\varepsilon) |u|_C.$$

Soit Ω un domaine borné. On dit que Ω jouit de la propriété du coin de l'extérieur (et on l'écrit $\Omega \in K_{ext}$) si: il existe un triangle ouvert, fixe,

disons T , avec le sommet S privilégié de manière que pour chaque X de $\dot{\Omega}$, on peut placer T dans $\text{compl. } \Omega$ de manière que $X = S$.

THÉORÈME 2. — Soit $\Omega \in K_{\text{ext}}$, D opérateur P elliptique, $a_{ij} \in C^{(0),1}(\bar{\Omega})$, pour $|i| = k$, soit $f \in W_2^{(-k+1)}(\Omega)$.

Alors la solution faible u du problème de Poisson appartient à $C^{(k-1)}(\bar{\Omega})$, $D^i u(X) = 0$ pour $X \in \dot{\Omega}$, $|i| \leq k - 1$ et on a :

$$(2.2) \quad \|u\|_{C^{(k-1)}(\bar{\Omega})} \leq C \|f\|_{W_2^{(-k+1)}(\Omega)} .$$

DÉMONSTRATION. — On a pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$(2.3) \quad \int_{\Omega} \sum_{|i|=|j|=k} \bar{a}_{ij} D^i \varphi D^j \bar{u} dX + \lambda \int_{\Omega} \varphi \bar{u} dX = \\ = f(\varphi) + \lambda \int_{\Omega} \varphi \bar{u} dX - \int_{\Omega} \sum_{\substack{0 \leq |i| \leq k-1 \\ 0 \leq |j| \leq k}} \bar{a}_{ij} D^i \varphi D^j \bar{u} dX - \int_{\Omega} \sum_{\substack{|i|=k \\ 0 \leq |j| \leq k-1}} \bar{a}_{ij} D^i \varphi D^j \bar{u} dX .$$

Par intégration per partes, on peut diminuer d'un l'ordre des dérivées de φ au dernier terme du (2.3). Tenant compte de la proposition 2.1, on peut trouver $\lambda > 0$ si grand, que l'opérateur $\tilde{D} = \sum_{|i|=|j|=k} (-1)^{|k|} D^i (a_{ij} D^j) + \lambda$ est P -elliptique.

Alors on a pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \sum_{|i|=|j|=k} \bar{a}_{ij} D^i \varphi D^j \bar{u} dX + \int_{\Omega} \lambda \varphi \bar{u} dX = \tilde{f}(\varphi)$$

où $\tilde{f} \in W_2^{(-k+1)}(\Omega)$. Tenant compte du théorème 1 on a $u \in C^{(k-1)}(\bar{\Omega}')$ où $\bar{\Omega}' \subset \Omega$.

Soient $X_m \in \Omega$, $X_m \rightarrow X_0 \in \dot{\Omega}$. Soit d_m la distance du point X_m de $\dot{\Omega}$. Soit $Y_m \in \dot{\Omega}$ choisi de sorte que $|X_m - Y_m| = d_m$. Plaçons le triangle T dans $\text{compl } \Omega$ de manière que $Y_m = S$. Introduisons les cartes $[y_1, y_2] = Y$ de manière que $Y = 0$ corresponde à Y_m , l'axe y_2 coïncide avec l'axe de T , $y_2 > 0 \Rightarrow [0, y_2] = Y \in \text{compl } \Omega$.

On fait correspondre à chaque X de $K\left(X_m, \frac{d_m}{2}\right)$ le point X^3 de \dot{T} destiné par la condition que la carte y_1 de $X^3 - X$ soit zéro. On prend X^3 sur le côté de T qui contient Y_m .

On a : il existe $d > 0$ de sorte que pour $d_m \leq d$, X^3 est déterminé, et une constante $c_1 > 0$ de sorte qu'il vaut :

$$(2.4) \quad X \in K\left(X_m, \frac{d_m}{2}\right) \implies |X - X^3| \leq c_1 \frac{d_m}{2}.$$

On désigne par X^1, X^2 des intersections de la droite, donnée par X, X^3 , avec $\dot{K}\left(X_m, \frac{d_m}{2}\right)$.

On pose $X^i = [y_{10}, y_{2i}]$. On ordonne X^i de manière que $y_{21} < y_{22} < y_{23}$. Utilisant l'inégalité de Hardy (cfr. [9]), on obtient pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$(2.5) \quad \int_{y_{21}}^{y_{22}} |\varphi(y_{10}, \eta)|^2 |X - X^3|^{-2} d\eta \leq 4 \int_{-\infty}^{y_{23}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}(y_{10}, \eta) \right|^2 d\eta.$$

En vertu du (2.4), il découle de (2.5) :

$$(2.6) \quad \frac{1}{C_1^2 d_m^2} \int_{y_{21}}^{y_{22}} |\varphi(y_{10}, \eta)|^2 d\eta < \int_{-\infty}^{y_{23}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}(y_{10}, \eta) \right|^2 d\eta.$$

Par intégration en y_{10} on obtient pour φ

$$(2.7) \quad \frac{1}{C_1^2 d_m^2} \int_{K\left(X_m, \frac{d_m}{2}\right)} |\varphi|^2 dY \leq \int_{E\left(X_m, \frac{d_m}{2}\right)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \right|^2 dY$$

où $E\left(X_m, \frac{d_m}{2}\right)$ est l'ensemble des points Y de Ω choisi de manière que la droite destinée par Y et par la direction de l'axe y_2 , coupe $K\left(X_m, \frac{d_m}{2}\right)$.

u étant dans $\overset{\circ}{W}_2^{(k)}(\Omega)$ on parvient à l'inégalité

$$(2.8) \quad \sum_{|i| \leq k} \left(\frac{d_m}{2}\right)^{|i|-k} \left(\int_{K\left(X_m, \frac{d_m}{2}\right)} |D^i u|^2 dX \right)^{\frac{1}{2}} \leq C |u|_{W_2^{(k)}\left(E\left(X_m, \frac{d_m}{2}\right)\right)}.$$

En utilisant (1.7) pour \tilde{f} , opérateur \tilde{D} et $K\left(X_m, \frac{d_m}{2}\right)$, on obtient en vertu de (2.8) : $\lim_{m \rightarrow \infty} D^i u(X_m) = 0$ pour $|i| \leq k - 1$.

Pour démontrer (2.2), on utilise le théorème du graphe fermé.

3. Problème de Dirichlet.

Soit $u_0 \in W_2^{(k)}(\Omega)$. On dit de u de $W_2^{(k)}(\Omega)$ qu'elle résout le problème de Dirichlet $Du = 0$ dans Ω , $u = u_0$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u_0}{\partial \nu}$, \dots , $\frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = \frac{\partial^{k-1} u_0}{\partial \nu^{k-1}}$ sur $\dot{\Omega}$ si $Du = 0$ faiblement, $u - u_0 \in \overset{\circ}{W}_2^{(k)}(\Omega)$.

Du théorème 2, il suit :

THÉORÈME 3. — Soient $\Omega \in K_{ext}$, D opérateur P-elliptique avec $a_{ij} \in C^{(0),1}(\bar{\Omega})$ pour $|i| = k$. Soit $u_0 \in W^{(k+1)}(\Omega)$.

Alors u , la solution faible du problème de Dirichlet appartient à $C^{(k-1)}(\bar{\Omega})$, on a $D^i u(X) = D^i u_0(X)$ pour $X \in \dot{\Omega}$ et $|i| \leq k-1$ et

$$(3.1) \quad |u|_{C^{(k-1)}(\bar{\Omega})} \leq C |u_0|_{W_2^{(k+1)}(\Omega)}.$$

La démonstration découle immédiatement du fait que $u - u_0$ résout le problème de Poisson avec $f \in W^{(-k+1)}(\Omega)$ où $|f|_{W_2^{(-k+1)}(\Omega)} \leq C |u_0|_{W_2^{(k+1)}(\Omega)}$.

Une question naturelle se pose. Est-ce que ne suffit pas pour le théorème 3 seulement $u_0 \in W_2^{(k)}(\Omega) \cap C^{(k-1)}(\bar{\Omega})$?

Nous résolvons cette question affirmativement pour l'opérateur $D = (-1)^k \Delta^k$ où Δ est l'opérateur de Laplace.

Nous démontrerons dans ce but :

PROPOSITION 3.1. — Soit u la fonction k -harmonique dans $K(0, R)$.

Alors pour $0 < r \leq R$, il existe une fonction $G(r, Y)$, continue pour $0 < r \leq R$, $|Y| \leq r$ (en r et Y simultanément), $|G(r, Y)| < c_1$ où c_1 ne dépend pas de r et Y , de manière qu'on a

$$(3.2) \quad u(0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{|Y| < r} G(r, Y) u(Y) dY.$$

DÉMONSTRATION. — On modifie un peu le procédé de M. Nicolesco [7]. Dans [7], pour la fonction en question, on a introduit (nous nous bornons

naturellement au cas $n = 2$) :

$$\begin{aligned}
 \mu_0(r) &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\tilde{K}(0,r)} u(Y) dS, \\
 (3.3) \quad \mu_1(r) &= \frac{2}{r^2} \int_0^r \varrho \mu_0(\varrho) d\varrho, \dots \\
 \mu_s(r) &= \frac{2}{r^2} \int_0^r \varrho \mu_{s-1}(\varrho) d\varrho.
 \end{aligned}$$

On trouve

$$(3.4) \quad \mu_s(r) = u(0) + \sum_{i=1}^{k-1} a_i \left(\frac{1}{1+i} \right)^s r^{2i} (\Delta^i u)_{X=0},$$

où $a_i = \frac{1}{2^{i+k} i! k!}$.

Ecrivant les relations (3.4) pour $s = 0, 1, \dots, k-1$, on peut en calculer $u(0)$ en éliminant $r^{2i} (\Delta^i u)_{X=0}$, $i = 1, 2, \dots, k-1$. La matrice du système (3.4) (pour $s = 0, 1 \dots, k-1$) est régulière.

Nous modifions un peu la définition (3.3) en posant

$$\begin{aligned}
 \mu_0(\varepsilon, r) &= \mu_0(r), \\
 \mu_1(\varepsilon, r) &= \mu_1(r), \\
 (3.5) \quad \mu_2(\varepsilon, r) &= \frac{2}{r^2(1-\varepsilon^2)} \int_{r\varepsilon}^r \varrho \mu_1(\varepsilon, \varrho) d\varrho, \dots \\
 \mu_s(\varepsilon, r) &= \frac{2}{r^2(1-\varepsilon^2)} \int_{r\varepsilon}^r \varrho \mu_{s-1}(\varepsilon, \varrho) d\varrho.
 \end{aligned}$$

On peut calculer $\mu_s(\varepsilon, r)$ à l'aide de $\mu_s(r)$, $\mu_s(\varepsilon r)$, ... $\mu_s(\varepsilon^s r)$ et utilisant (3.4) on obtient :

$$(3.6) \quad \mu_s(\varepsilon, r) = u(0) + \sum_{i=1}^{k-1} a_i(s, \varepsilon) \left(\frac{1}{1+i} \right)^s r (\Delta u)_{X=0}.$$

Evidemment $a_i(s, \varepsilon) \rightarrow a_i$ pour $\varepsilon \rightarrow 0$, alors pour $\varepsilon > 0$, assez petit, la matrice de (36) est régulière. On obtient de cette manière :

$$(3.7) \quad u(0) = \sum_{s=0}^{k-1} c_s \mu_s(\varepsilon, r).$$

De (3.7) on tire :

$$(3.8) \quad u(0) = \frac{2}{r^2(1-\varepsilon^2)} \int_{r\varepsilon}^r \sum_{s=0}^{k-1} c_s \mu_s(\varepsilon, \varrho) \cdot \varrho \, d\varrho.$$

Il ne s'agit maintenant que de changer l'ordre de l'intégration pour obtenir (3.2).

Remarquons, que pour $\varepsilon = 0$, cette conclusion est fautive.

De la proposition 3.1 il suit immédiatement :

PROPOSITION 3.2. — Soit $v \in C^{(0)}(\overline{K(0, R)})$. On désigne par $\omega(r)$, module de continuité. Alors

$$(3.9) \quad \left| v(0) - \frac{1}{\pi r^2} \int_{|Y| < r} G(r, Y) v(Y) \, dY \right| \leq c \omega(r).$$

Nous sommes maintenant en même de démontrer :

THÉORÈME 4. — Soient $\Omega \in K_{ext}$, $D = (-1)^k \Delta^k$. Soit $u_0 \in W_2^{(k)}(\Omega) \cap C^{(k-1)}(\overline{\Omega})$.

Alors la solution faible du problème de Dirichlet appartient à $C^{(k-1)}(\overline{\Omega})$, $D^i u(X) = D^i u_0(X)$ pour $X \in \Omega$, $|i| \leq k-1$, $(-1)^k \Delta^k u = 0$ au sens classique et on a

$$(3.10) \quad \|u\|_{C^{(k-1)}(\overline{\Omega})} \leq c [\|u_0\|_{C^{(k-1)}(\overline{\Omega})} + \|u_0\|_{W_2^{(k)}(\Omega)}].$$

DÉMONSTRATION. Posons $u = u_0 + w$, alors w est la solution du problème de Poisson et on a pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \implies$

$$(3.11) \quad \int_{\Omega} \sum_{i_1+i_2=k} \frac{k!}{i_1! i_2!} \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}} \frac{\partial^k \overline{w}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}} \, dX = - \int_{\Omega} \sum_{i_1+i_2=k} \frac{k!}{i_1! i_2!} \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}} \cdot \frac{\partial^k \overline{u_0}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}} \, dX,$$

alors

$$\|w\|_{W_2^{(k)}(\Omega)} \leq c \|u_0\|_{W_2^{(k)}(\Omega)}.$$

La fonction u est indéfiniment continûment différentiable à l'intérieur de Ω , $(-1)^k \Delta^k u = 0$ au sens classique : cela est démontré par plusieurs auteurs. (cfr. par exemple [6]).

Soient alors $X_m \in \Omega$, $X_m \rightarrow X \in \bar{\Omega}$. On répète maintenant la démonstration du théorème 2.2 avec quelques modifications : on obtient alors que

$$\left(\frac{2}{d_m}\right)^2 \int_{K\left(X_m, \frac{d_m}{2}\right)} |D^i w|^2 dX \rightarrow 0 \quad \text{pour } X_m \rightarrow X, |i| = k - 1.$$

D'autre part, en vertu des propositions 3.1 et 3.2 on a

$$(3.12) \quad D^i u(X_m) = \frac{4}{\pi d_m^2} \int_{|Y| < \frac{d_m}{2}} G\left(\frac{d_m}{2}, Y\right) D^i u(X_m + Y) dY$$

et

$$(3.13) \quad D^i u_0(X_m) = \frac{4}{\pi d_m^2} \int_{|Y| < \frac{d_m}{2}} G\left(\frac{d_m}{2}, Y\right) D^i u_0(X_m + Y) dY + F\left(X_m, \frac{d_m}{2}\right)$$

où $F\left(X_m, \frac{d_m}{2}\right) \rightarrow 0$ pour $m \rightarrow \infty$.

La fonction $G(r, Y)$ étant bornée indépendante de r et Y , on obtient

$$|D^i u(X_m) - D^i u_0(X_m)| \leq \left| F\left(X_m, \frac{d_m}{2}\right) \right| + \frac{c}{d_m} \left(\int_{K\left(X_m, \frac{d_m}{2}\right)} |D^i w|^2 dY \right)^{\frac{1}{2}},$$

d'où suit que $D^i u \in C(\bar{\Omega})$. (Pour $|i| = k - 1$). En ce qui concerne les dérivées de u de l'ordre inférieur de $k - 1$, elles appartiennent à $C(\bar{\Omega})$ en vertu de la proposition 1.1. En effet, on peut appliquer cette proposition à w (qui prolongé par zéro au complément de Ω appartient à $K(0, A)$ pour A assez grand).

(3.10) est la conséquence du théorème sur le graphe fermé.

Remarquons à la fin de cet article, qu'on peut par la méthode utilisée, démontrer les résultats, en substituant les espaces $W_2^{(-k+1)}(\Omega)$ par $W_p^{(-l)}(\Omega)$, p, l choisi convenablement. Il ne faut que s'appuyer sur les résultats de F. E. Browder [10].

Il est évident qu'on ne peut pas utiliser directement cette méthode pour dimension $n \geq 3$. Alors, la question naturelle se pose, si l'on peut modifier cette méthode afin qu'elle soit utilisable pour $n \geq 3$.

Si l'on veut examiner que la solution faible est classique en satisfaction de l'équation différentielle, il ne faut qu'utiliser les théorèmes sur la régularité à l'intérieur du domaine, démontrés par plusieurs auteurs (cfr. par exemple F. D. Browder [10]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. GAGLIARDO : *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*. *Ricerche di matematica*, vol. VII, (1958), 102-137.
- [2] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG : *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I*. *Comm. on pure and appl. mathematics*, vol. XII, (1959), 623-727.
- [3] G. TAUTZ : *Reguläre Randpunkte beim verallgemeinerten Dirichletschen Problem*, *Math. Zeit.*, 39, 532-559, (1935).
- [4] C. B. MORREY : *Second Order Elliptic Equations in Several Variables and Hölder Continuity*, *Math. Zeitschrift*, 72, 146-164, (1959).
- [5] R. COURANT, D. HILBERT : *Methoden der mathematischen Physik*, Springer (1931).
- [6] L. NIRENBERG : *Remarks on Strongly Elliptic Partial Differential Equations*. *Comm. on pure and appl. math.* vol. VIII, (1955), 649-675.
- [7] M. NICOLESCO : *Les fonctions polyharmoniques*, Herrmann, (1936).
- [8] E. MAGENES, G. STAMPACCHIA : *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico*. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Ser. III*, vol. XII, Fasc. III, (1958), 247-358.
- [9] G. A. HARDY, Y. E. LITTLEWOOD, G. POLYA : *Inequalities*, (1934).
- [10] F. E. BROWDER : *Functional Analysis and Partial Differential Equations II*, *Mathematische Annalen* 145, (1962), 81-226.