

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

G. SORANI

Omologia degli spazi q -pseudoconvessi

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 16,
n° 3 (1962), p. 299-304

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1962_3_16_3_299_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

OMOLOGIA DEGLI SPAZI q -PSEUDOCONVESSI (*)

di G. SORANI (a Roma)

1. — Introduzione.

Sia D un aperto di \mathbb{C}^n ; una funzione $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *fortemente plurisubarmonica* se la forma di Levi $\mathcal{L}(\varphi) = \partial \bar{\partial} \varphi$ è definita positiva in ogni punto di D .

La funzione φ si dice *fortemente q -plurisubarmonica* ($q > 0$) se la forma $\mathcal{L}(\varphi)$ ha $n - q + 1$ valori propri positivi.

Sia X una varietà complessa di dimensione complessa n ; X si dice *q -pseudoconvessa* se esistono un compatto $K \subset X$ ed una funzione continua $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$, tali che:

- i) $\varphi|_{X-K}$ sia fortemente q -plurisubarmonica,
- ii) per ogni $c \in \mathbb{R}$, gli insiemi $B_c = \{ P \in X \mid \varphi(P) < c \}$ siano relativamente compatti in X .

Se $K = \emptyset$, X si dice *q -completa*; se inoltre è $q = 1$, X è una varietà di Stein (cfr. A. Andreotti e H. Grauert [1] e H. Grauert [5]).

I punti $P \in X - K$ nei quali $\text{grad } \varphi = 0$ si chiamano punti critici di φ su $X - K$.

Un punto critico P si dice non degenerare se l'hessiano $H(\varphi)_P$ è una forma quadratica non degenerare; in tale caso il numero dei valori propri negativi di $H(\varphi)_P$ si chiama indice del punto critico P e si designa con $i(P)$.

Detto M_i il numero dei punti critici di indice i , sussiste la disuguaglianza di Morse:

$$M_i \geq \dim H_i(X, k),$$

ove k è un qualsiasi corpo di coefficienti.

(*) Lavoro eseguito nel Gruppo di Ricerca n. 35 del C. M. C. N. R. (anno accademico 1962-63).

In questa nota mostreremo che, se X è una varietà q -pseudoconvessa e $c > c_0$, ($c_0 = \sup_K \varphi$) allora $H_r(X \text{ mod } B_c, \mathbf{Z}) = 0$ per $r > n + q - 1$, e privo di torsione per $r = n + q - 1$; se inoltre la frontiera di B_c è differenziabile $H_{n+q-1}(X \text{ mod } B_c, \mathbf{Z})$ è libero.

Questo teorema generalizza in parte un teorema di A. Andreotti ed R. Narasimhan [3] relativo alle coppie di Runge perchè, nel caso $q = 1$, la coppia (X, B_c) è una coppia di Runge.

Daremo poi (n. 3) un corollario relativo alle varietà q -complete che generalizza un teorema di A. Andreotti e T. Frankel [2] al quale si riduce se X è una varietà di Stein.

2. — Omologia relativa delle varietà q -pseudoconvesse ($q > 0$).

Sia X una varietà complessa di dimensione complessa n ; siano $z^\alpha = x^\alpha + ix^{n+\alpha}$, ($\alpha = 1, \dots, n$) coordinate complesse locali nell'intorno del punto $P \in X$. Faremo uso del seguente:

LEMMA. Sia $\psi: X \rightarrow \mathbf{R}$, una funzione differenziabile su un aperto $U \subset \mathbf{C}^n$ e supponiamo che nel punto $P \in X$ la forma hermitiana $\partial \bar{\partial} \psi = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right)_P u^\alpha \bar{u}^\beta$ abbia $\nu(\psi)$ valori propri positivi.

Posto $u^\alpha = t^\alpha + it^{n+\alpha}$, sia $i(\psi)$ il numero dei valori propri negativi della forma quadratica $\sum_{i, j=1}^{2n} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} \right)_P t^i t^j$. Allora:

$$\nu(\psi) + i(\psi) \leq 2n.$$

DIMOSTRAZIONE. Poichè ψ è una funzione reale risulta:

$$(1) \quad \sum_{i, j=1}^{2n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} t^i t^j = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} u^\alpha \bar{u}^\beta + 2\text{Re} \left(\sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^\alpha \partial z^\beta} u^\alpha u^\beta \right).$$

Sia ad esempio $u^{r(\psi)+1} = \dots = u^n = 0$ uno spazio lineare sul quale la forma $\sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} u^\alpha \bar{u}^\beta$ è definita positiva. Ivi la forma $2\text{Re} \left(\sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^\alpha \partial z^\beta} u^\alpha u^\beta \right)$ ha tanti valori propri positivi quanti negativi comè parte reale di una forma quadratica nelle variabili complesse.

Ne segue che esiste uno spazio reale a $\nu(\psi)$ dimensioni sul quale il secondo membro della (1) è positivo. Quindi la forma quadratica $\sum_{i, j=1}^{2n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} t^i t^j$ ha almeno $\nu(\psi)$ valori propri positivi e perciò $\nu(\psi) + i(\psi) \leq 2n$.

Dimostriamo ora il seguente :

TEOREMA. Sia X una varietà q -pseudoconvessa, relativamente ad una funzione φ fortemente q -plurisubarmonica su $X - K$ ($K \subset X$, compatto). Sia $c_0 = \sup_K \varphi$; per $c > c_0$ si ha :

$$(2) \quad H_i(X \bmod B_c, \mathbf{Z}) = 0 \quad \text{per } i > n + q - 1,$$

$$(3) \quad H_{n+q-1}(X \bmod B_c, \mathbf{Z}) \quad \text{privo di torsione};$$

se inoltre la frontiera di B_c è differenziabile⁽¹⁾ allora $H_{n+q-1}(X \bmod B_c, \mathbf{Z})$ è libero.

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo col supporre che nell'insieme $\{P \in X \mid c \leq \varphi(P) < +\infty\}$ vi siano solo punti critici non degeneri. Se P è uno di tali punti, il lemma precedente mostra che l'indice di P soddisfa alla disuguaglianza :

$$(4) \quad i(P) \leq n + q - 1.$$

Si consideri la filtrazione del complesso singolare $C_*(X)/C_*(B_c)$ mediante i complessi $C_*(B_l)/C_*(B_c)$, ($l > c$); dalla successione spettrale di omologia relativa associata a tale filtrazione segue la disuguaglianza di Morse, $M_i \geq \dim H_i(X \bmod B_c, k)$, e quindi dalla (4):

$$(5) \quad H_i(X \bmod B_c, k) = 0 \quad \text{per } i > n + q - 1$$

e per ogni corpo di coefficienti k .

Il teorema dei coefficienti universali :

$$H_i(X \bmod B_c, k) = H_i(X \bmod B_c, \mathbf{Z}) \otimes k + \text{Tor}[H_{i-1}(X \bmod B_c, \mathbf{Z}), k]$$

e la (5) danno quindi la prova delle (2), (3).

Lasciamo ora cadere l'ipotesi che φ abbia solo punti critici non degeneri. È noto⁽²⁾ che, per $c_0 < c < C$, si può determinare una funzione ψ_n , continua su X , C^∞ su $X - K$, avente solo punti critici non degeneri su $B = B_C - B_c$, e tale che, scelto un sistema finito di carte, U_i , su un in-

⁽¹⁾ Questa ipotesi è soddisfatta per $c > c_0$ e generico, cioè al di fuori di un insieme avente misura di Lebesgue nulla. (Teorema di Sard).

⁽²⁾ R. Thom [7] pag. 72. Teorema 4.

torno U di B , risulti:

$$\sup_B |\varphi - \psi_n| < \frac{1}{n}, \quad \sup_i \sup_{U_i} \sum_{|r| \leq 2} |D_i^r \varphi - D_i^r \psi_n| < \frac{1}{n}.$$

Si può quindi scegliere ψ_n così prossima a φ che la forma hermitiana $\partial \bar{\partial} \psi_n$ abbia in ogni punto di B tanti valori propri positivi quanti ne ha la forma $\partial \bar{\partial} \varphi$.

Consideriamo gli insiemi:

$$B'_{c-\frac{1}{n}} = \left\{ P \in X \mid \psi_n(P) < c - \frac{1}{n} \right\}, \quad B'_{c-\frac{1}{n}} = \left\{ P \in X \mid \psi_n(P) < c - \frac{1}{n} \right\}.$$

Si ha $B'_{c-\frac{1}{n}} \subset B_c$ e $B'_{c-\frac{1}{n}} \subset B_C$ e inoltre:

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B'_{c-\frac{1}{n}} = B_c, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B'_{c-\frac{1}{n}} = B_C.$$

Per il risultato precedente si ha:

$$H_i(B'_{c-\frac{1}{n}} \bmod B'_{c-\frac{1}{n}}, k) = 0 \quad \text{per } i > n + q - 1;$$

le (6) danno poi:

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H_i(B'_{c-\frac{1}{n}} \bmod B'_{c-\frac{1}{n}}, k) = H_i(B_C \bmod B_c, k) = 0,$$

per $i > n + q - 1$.

Considerando ora che,

$$\lim_{c \rightarrow \infty} H_i(B_C \bmod B_c, k) = H_i(X \bmod B_c, k),$$

si ottiene la (5) e quindi la prova delle (2), (3).

Per completare la dimostrazione del teorema resta da mostrare che se la frontiera di B_c è differenziabile allora $H_{n+q-1}(X \bmod B_c, \mathbf{Z})$ è libero. Osserviamo intanto che dalla (7) e dal teorema dei coefficienti universali:

$$H_{n+q}(B_C \bmod B_c, k) = H_{n+q}(B_C \bmod B_c, \mathbf{Z}) \otimes k + \\ + \text{Tor}[H_{n+q-1}(B_C \bmod B_c, \mathbf{Z}), k],$$

segue che $H_{n+q-1}(B_C \bmod B_c, \mathbf{Z})$ è privo di torsione.

Supponiamo di nuovo che nell'insieme $\{P \in X \mid c \leq \varphi(P) < +\infty\}$ cadano solo punti critici non degeneri. Indichiamo con $c_i (c < c_1 < c_2 < \dots < c_i < \dots)$ una successione di valori di φ tali che $c_i \rightarrow +\infty$ e B_{c_i} abbia frontiera differenziabile.

Dalle inclusioni $B_c \subset \bar{B}_c \subset B_{c_i}$ segue:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_r(\bar{B}_c \bmod B_c, \mathbf{Z}) \rightarrow H_r(B_{c_i} \bmod B_c, \mathbf{Z}) \rightarrow H_r(B_{c_i} \bmod \bar{B}_c, \mathbf{Z}) \rightarrow \\ \rightarrow H_{r-1}(\bar{B}_c \bmod B_c, \mathbf{Z}) \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

ma, essendo la frontiera di B^c differenziabile, si ha $H_r(\bar{B}_c \bmod B_c, \mathbf{Z}) = 0$ per $r \geq 0$; risulta quindi $H_r(B_{c_i} \bmod B_c, \mathbf{Z}) \approx H_r(B_{c_i} \bmod \bar{B}_c, \mathbf{Z})$.

Analogamente dalle inclusioni $\bar{B}_c \subset B_{c_i} \subset \bar{B}_{c_i}$ segue $H_r(B_{c_i} \bmod \bar{B}_c, \mathbf{Z}) \approx H_r(\bar{B}_{c_i} \bmod \bar{B}_c, \mathbf{Z})$ per cui si ha:

$$(8) \quad H_r(B_{c_i} \bmod B_c, \mathbf{Z}) \approx H_r(\bar{B}_{c_i} \bmod \bar{B}_c, \mathbf{Z})$$

per $r \geq 0$.

Poichè \bar{B}_{c_i} e \bar{B}_c sono compatti *HLC* i loro gruppi di omologia hanno un numero finito di generatori in ogni dimensione⁽³⁾, allora $H_r(\bar{B}_{c_i} \bmod \bar{B}_c, \mathbf{Z})$ ($r \geq 0$), ha un numero finito di generatori e così anche $H_r(B_{c_i} \bmod B_c, \mathbf{Z})$ come segue da (8)⁽⁴⁾.

In particolare $H_{n+q-1}(B_{c_i} \bmod B_c, \mathbf{Z})$, essendo privo di torsione è libero. Tenuto conto della (7), dalle inclusioni $B_c \subset B_{c_{i-1}} \subset B_{c_i}$ segue poi:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{n+q-1}(B_{c_{i-1}} \bmod B_c, \mathbf{Z}) \rightarrow H_{n+q-1}(B_{c_i} \bmod B_c, \mathbf{Z}) \rightarrow \\ \rightarrow H_{n+q-1}(B_{c_i} \bmod B_{c_{i-1}}, \mathbf{Z}); \end{aligned}$$

quindi $H_{n+q-1}(B_{c_{i-1}} \bmod B_c, \mathbf{Z})$ è addendo diretto di $H_{n+q-1}(B_{c_i} \bmod B_c, \mathbf{Z})$.

Allora il

$$\lim_{i \rightarrow \infty} H_{n+q-1}(B_{c_i} \bmod B_c, \mathbf{Z}) = H_{n+q-1}(X \bmod B_c, \mathbf{Z})$$

è limite diretto di gruppi liberi ciascuno dei quali si immerge nel successivo come addendo diretto e quindi è libero.

(3) A. Borel [4] Exp. VII pag. 11.

(4) Se lo spazio X avesse delle singolarità contenute in K ma non fuori di K , in virtù del teorema di triangolabilità locale degli insiemi analitici di Koopman e Brown [6], il ragionamento precedente conserverebbe la sua validità. Perciò il teorema rimane valido anche se X è uno spazio complesso privo di singolarità in $X - K$.

3. — **Omologia degli spazi q -completi ($q > 0$).**

Se $K = \Phi$ il teorema precedente ha il seguente :

COROLLARIO. *Sia X una varietà q -completa relativamente ad una funzione differenziabile φ fortemente q -plurisubarmonica ; si ha :*

$$H_i(X, \mathbf{Z}) = 0 \quad \text{per } i > n + q - 1,$$

$$H_{n+q-1}(X, \mathbf{Z}) \quad \text{libero.}$$

La dimostrazione è ovvia.

B I B L I O G R A F I A

- [1] A. ANDREOTTI e H. GRAUERT, *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes.* (in corso di stampa su Bull. de la Soc. Math. de France).
- [2] A. ANDREOTTI e T. FRANKEL, *The Lefschetz theorem on hyperplane sections.* Annals of Math. 69 (1959) pag. 713-717.
- [3] A. ANDREOTTI e R. NARASIMHAN, *A topological property of Runge Pairs* (in corso di stampa su Annals of Math.)
- [4] A. BOREL, *Cohomologie des espaces localment compacts d'après J. Leray.* E.T.H. (Zurich) (1951).
- [5] H. GRAUERT, *On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds.* Annals of Math. 68 (1958) pag. 460-472.
- [6] B. O. KOOPMAN e A. B. BROWN, *On the covering of analytic loci by complexes.* Trans. American Math. Society 34 (1931) pag. 231-251.
- [7] R. THOM, *Les singularités des applications différentiables.* Annales de l'Inst. Fourier 6 (1955/56) pag. 43-87.