

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

ANTONIO CHIFFI

## **Insiemi $K$ -rettificabili e spazio tangente**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série*, tome 16,  
n° 4 (1962), p. 335-349

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1962\\_3\\_16\\_4\\_335\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1962_3_16_4_335_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# INSIEMI K-RETTIFICABILI E SPAZIO TANGENTE. (1)

di ANTONIO CHIFFI (Pisa).

Si considera (definizione 1.5) una famiglia  $\mathcal{C}_{k,n}$  di insiemi dello spazio  $R^n$ , la quale risulta formata da tutti e soli gli insiemi di  $R^n$  che sono misurabili rispetto alla misura  $k$ -dimensionale di Hausdorff  $\mathcal{H}_k$  e sono  $(\mathcal{H}_k, k)$ -rettificabili (2). Viene data una definizione di spazio  $k$ -dimensionale tangente (definizione 3.1) per insiemi misurabili rispetto a  $\mathcal{H}_k$  e si dimostra (teorema 5.1) che gli insiemi di  $R^n$  misurabili rispetto a  $\mathcal{H}_k$  che possiedono uno spazio  $k$ -dimensionale tangente in  $\mathcal{H}_k$ -quasi tutti i loro punti sono tutti e soli quelli di una sottofamiglia di  $\mathcal{C}_{k,n}$ , che viene detta famiglia degli insiemi  $k$ -orientabili (definizione 1.9) e che contiene anche insiemi di misura  $\mathcal{H}_k$  infinita.

Se in un punto di un insieme  $E$  esiste lo spazio  $k$ -dimensionale tangente a  $E$  secondo la definizione 3.1, esiste anche lo spazio tangente a  $E$  secondo Hausdorff (3) (teorema 4.9), ma non viceversa; vale a dire che il primo impone una condizione di maggiore regolarità per l'insieme  $E$  nel punto  $x$ .

## § 1. Definizioni preliminari.

DEFINIZIONE 1.1. Indichiamo con  $R^n$  lo spazio numerico a  $n$  dimensioni e con  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  un suo generico punto. Poniamo  $|x| = (\sum x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ .

---

(1) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche. L'autore ringrazia il prof. Ennio De Giorgi per i preziosi suggerimenti.

(2) Cfr. [2] def. 2.34 a pag. 126. I numeri in parentesi [ ] si riferiscono all'elenco bibliografico posto in fondo al lavoro.

(3) Cfr. [3] a pag. 312.

DEFINIZIONE 1.2. Indicheremo con  $I(x, \rho)$  l'insieme:

$$(1.1) \quad I(x, \rho) = \{z : z \in R^n, |z - x| < \rho\}.$$

DEFINIZIONE 1.3. Indicheremo con  $k$  un intero che, salvo avviso in contrario, si supponrà soddisfacente alla limitazione  $1 \leq k \leq n$ .

DEFINIZIONE 1.4. Sia:  $f: T \rightarrow R^n$  una funzione reale vettoriale di componenti  $f_1, \dots, f_n$ , continua, definita in un intervallo  $T$  di  $R^k$  di cui indicheremo con  $y = (y_1, \dots, y_k)$  il generico punto. Posto  $V = f(T)$ , se sono soddisfatte le seguenti ipotesi:

a) le componenti  $f_1, \dots, f_n$  delle funzione  $f$  possiedono derivate parziali prime continue in  $T$ ;

b) la corrispondenza  $f: T \rightarrow V$  è biunivoca;

c) la matrice jacobiana  $\frac{\partial (f_1, \dots, f_n)}{\partial (y_1, \dots, y_k)}$  ha caratteristica  $k$ ;

allora la terna:

$$(1.2) \quad \mathcal{V} = [T, f, V]$$

sarà detta *varietà parametrica regolare k-dimensionale di  $R^n$ , di intervallo base  $T$ , di equazione:*

$$(1.3) \quad x = f(y), \quad y \in T$$

e supporto  $V$ .

DEFINIZIONE 1.5. Diremo che un insieme  $E \subset R^n$  appartiene alla famiglia  $\mathcal{C}_{k,n}$  se<sup>(4)</sup>:

a) l'insieme  $E$  è misurabile rispetto alla misura  $k$ -dimensionale di Hausdorff  $\mathcal{H}_k$ :

b) esistono: una successione  $\{\mathcal{V}_h\}_{h=1,2,\dots}$  di varietà regolari  $\mathcal{V}_h = [T_h, f^{(h)}, V_h]$  ed un insieme  $N$  di misura  $\mathcal{H}_k$  nulla tali che:

$$(1.4) \quad E \subset \left( \bigcup_{h=1}^{\infty} V_h \right) \cup N.$$

Diremo che l'insieme  $E \subset R^n$  appartiene alla famiglia  $\mathcal{C}_{0,n}$  se è finito o numerabile.

---

(4) Cfr. [1], § 1 e 2.

DEFINIZIONE 1.6. Sia  $A$  un insieme aperto di  $R^n$ ; indicheremo con  $\mathcal{K}(A)$  la famiglia degli insiemi  $E \subset R^n$  tali che:

(a) l'insieme  $E$  sia misurabile rispetto a  $\mathcal{H}_k$ ;

(b) valga l'uguaglianza:

$$(1.5) \quad \mathcal{H}_k(E - A) = 0;$$

(c) qualunque sia l'insieme compatto  $C \subset A$  si abbia:

$$(1.6) \quad \mathcal{H}_k(E \cap C) < \infty.$$

DEFINIZIONE 1.7. Indicheremo con  $\mathcal{K}$  la famiglia degli insiemi  $E \subset R^n$  a ciascuno dei quali si possa associare un insieme aperto  $A \subset R^n$  tale che per questo e per l'insieme  $E$  valgano le proprietà (a), (b), (c) della precedente definizione.

È immediato verificare il seguente:

TEOREMA 1.8. Sia  $A$  un insieme aperto di  $R^n$ , sia  $E$  un insieme della famiglia  $\mathcal{K}(A)$  e  $L$  un suo sottoinsieme misurabile rispetto a  $\mathcal{H}_k$ ; allora anche  $L$  appartiene a  $\mathcal{K}(A)$ .

DEFINIZIONE 1.9. Diremo che un insieme  $E \subset R^n$  è  $k$ -orientabile ( $0 \leq k \leq n$ ) se appartiene ad entrambe le famiglie  $\mathcal{E}_{k,n}$  e  $\mathcal{K}$ .

Si noti che la famiglia degli insiemi  $n$  orientabili coincide con la famiglia degli insiemi misurabili secondo  $\mathcal{H}_n$ , cioè secondo la misura di Lebesgue in  $R^n$ .

Sono di immediata verifica i due seguenti teoremi:

TEOREMA 1.10. Sia  $E \subset R^n$  un insieme  $k$ -orientabile ed  $L$  un suo sottoinsieme misurabile rispetto a  $\mathcal{H}_k$ ; l'insieme  $L$  è pure  $k$ -orientabile.

TEOREMA 1.11. Sia  $\{E_h\}_{h=1,2,\dots}$  una successione di insiemi  $k$ -orientabili di  $R^n$  tali che l'unione  $E = \bigcup_{h=1}^{\infty} E_h$  appartenga alla famiglia  $\mathcal{K}$ . L'insieme  $E$  è  $k$  orientabile.

## § 2. Densità.

È noto<sup>(5)</sup> il seguente:

---

<sup>(5)</sup> Cfr. [2], 3.2 a pag. 128.

**TEOREMA 2.1.** *Sia  $E$  un insieme di  $R^n$  misurabile rispetto a  $\mathcal{H}_k$  con  $\mathcal{H}_k(E) < \infty$ . Per  $\mathcal{H}_k$ -quasi tutti i punti  $x \in R^n - E$  si ha :*

$$(2.1) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{-k} \mathcal{H}_k [E \cap I(x, \varrho)] = 0$$

**TEOREMA 2.2.** *Sia  $A$  un insieme aperto di  $R^n$  e sia  $E \subset R^n$  un insieme della famiglia  $\mathcal{K}(A)$ . Per  $\mathcal{H}_k$ -quasi tutti i punti  $x \in A - E$  ha luogo la (2.1).*

**DIMOSTRAZIONE.** Esiste una famiglia numerabile  $\{I_h\}_{h=1,2,\dots}$  di sfere aperte  $I_h$  di  $R^n$ , tali che :

$$(2.2) \quad A = \bigcup_{h=1}^{\infty} I_h$$

$$(2.3) \quad (\text{chiusura di } I_h) \subset A$$

Per la (2.3) e per la (1.6) si ha, per ogni  $h$  :

$$(2.4) \quad \mathcal{H}_k [E \cap I_h] < \infty$$

e per il teorema 2.1 si ha pure, per  $\mathcal{H}_k$ -quasi tutti i punti  $x \in R^n - (E \cap I_h)$  :

$$(2.5) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{-k} \mathcal{H}_k [E \cap I_h \cap I(x, \varrho)] = 0.$$

In particolare la (2.5) ha luogo in  $\mathcal{H}_k$ -quasi tutti i punti  $x \in I_h - E$ , dove equivale alla (2.1) e quindi per la (2.2) il teorema è dimostrato.

### § 3. Spazio tangente.

**DEFINIZIONE 3.1.** Sia  $E \subset R^n$  un insieme misurabile rispetto alla misura  $\mathcal{H}_k$  e sia  $1 \leq k < n$ .

Sia  $C_0^{(0)}(R^n)$  la famiglia delle funzioni reali  $\varphi$ , definite e continue in  $R^n$ , ivi a supporto compatto (nulle, cioè, al di fuori di un insieme limitato). Un sottospazio  $k$ -dimensionale  $S_k(x)$  di  $R^n$  passante per un punto  $x \in R^n$  si dirà *spazio  $k$ -dimensionale tangente a  $E$  nel punto  $x$*  se, per ogni  $\varphi \in C_0^{(0)}(R^n)$  ha luogo l'uguaglianza <sup>(6)</sup> :

$$(3.1) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{-k} \int_E \varphi \left( x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d \mathcal{H}_k(\xi) = \int_{S_k(x)} \varphi(\xi) d \mathcal{H}_k(\xi)$$

<sup>(6)</sup> È evidente che scrivendo la (3.1) intendiamo che si abbia, per  $\varrho$  sufficientemente piccolo :

$$\mathcal{H}_k [E \cap I(x, \varrho)] < \infty$$

Per  $k = n$  si può dare la stessa definizione, sostituendo a  $S_k(x)$  lo spazio  $R^n$ .

È immediato verificare il seguente:

**TEOREMA 3.2.** *Se esiste lo spazio  $k$ -dimensionale  $S_k(x)$  tangente nel punto  $x$  all'insieme  $\mathcal{H}_k$ -misurabile  $E \subset R^n$ , esso è necessariamente unico.*

**TEOREMA 3.3.** *Sia  $E \subset R^n$  un insieme misurabile rispetto a  $\mathcal{H}_k$  e nel punto  $x \in R^n$  esista lo spazio  $k$  dimensionale  $S_k(x)$  tangente a  $E$ . Sia  $\psi$  una funzione reale definita in  $R^n$ , ivi misurabile, limitata e a supporto compatto ed esista un insieme chiuso  $N$  tale che  $\psi$  sia continua in  $R^n - N$ , e si abbia:*

$$(3.2) \quad \mathcal{H}_k [N \cap S_k(x)] = 0$$

In tali ipotesi vale l'uguaglianza:

$$(3.3) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{-k} \int_E \psi \left( x + \frac{\xi - x}{\rho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) = \int_{S_k(x)} \psi(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per ogni intero positivo  $h$  consideriamo la funzione continua  $\varphi_h$ , così definita per  $x \in R^n$ :

$$(3.4) \quad \varphi_h(x) = \max \{ 0, 1 - h \text{ dist}(x, N) \}$$

dove con  $\text{dist}(x, N)$  si è indicata la distanza del punto  $x$  dall'insieme  $N$ .

Dalla (3.4) segue che le funzioni  $\varphi_h$  ( $h = 1, 2, \dots$ ) sono continue e verificano le disuguaglianze:

$$(3.5) \quad 0 \leq \varphi_h(x) \leq 1 \quad \text{per } x \in R^n$$

Poniamo:

$$(3.6) \quad \begin{cases} \varphi_h^*(x) = [1 - \varphi_h(x)] \psi(x) + \varphi_h(x) \inf \{ \psi(x) : x \in R^n \} \\ \varphi_h^{**}(x) = [1 - \varphi_h(x)] \psi(x) + \varphi_h(x) \sup \{ \psi(x) : x \in R^n \} \end{cases}$$

Dalla definizione 3.1 e dalla evidente continuità delle funzioni  $\varphi_h^*$  e  $\varphi_h^{**}$  seguono le uguaglianze:

$$(3.7) \quad \begin{cases} \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{-k} \int_E \varphi_h^* \left( x + \frac{\xi - x}{\rho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) = \int_{S_k(x)} \varphi_h^*(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi) \\ \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{-k} \int_E \varphi_h^{**} \left( x + \frac{\xi - x}{\rho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) = \int_{S_k(x)} \varphi_h^{**}(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi) \end{cases}$$

Si verificano pure le disuguaglianze, vevoli per  $x \in R^n$  :

$$(3.8) \quad \varphi_h^*(x) \leq \psi(x) \leq \varphi_h^{**}(x)$$

$$(3.9) \quad \lim_{e \rightarrow 0} e^{-k} \int_{\tilde{E}} \varphi_h^* \left( x + \frac{\xi - x}{e} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) \leq$$

$$\leq \min_{e \rightarrow 0} \lim_{\tilde{E}} e^{-k} \int \psi \left( x + \frac{\xi - x}{e} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) \leq \max_{e \rightarrow 0} \lim_{\tilde{E}} e^{-k} \int \psi \left( x + \frac{\xi - x}{e} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) \leq$$

$$\leq \lim_{e \rightarrow 0} e^{-k} \int_{\tilde{E}} \varphi_h^{**} \left( x + \frac{\xi - x}{e} \right) d\mathcal{H}_k(\xi)$$

$$(3.10) \quad \int_{S_k(x)} \varphi_h^*(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi) \leq \int_{S_k(x)} \psi(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi) \leq \int_{S_k(x)} \varphi_h^{**}(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi)$$

Per le (3.7) la (3.9) diventa :

$$(3.11) \quad \int_{S_k(x)} \varphi_h^*(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi) \leq \min_{e \rightarrow 0} \lim_{\tilde{E}} e^{-k} \int \psi \left( x + \frac{\xi - x}{e} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) \leq$$

$$\leq \max_{e \rightarrow 0} \lim_{\tilde{E}} e^{-k} \int \psi \left( x + \frac{\xi - x}{e} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) \leq \int_{S_k(x)} \varphi_h^{**}(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi)$$

Dalle (3.6) segue :

$$(3.12) \quad \int_{S_k(x)} \varphi_h^{**}(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi) - \int_{S_k(x)} \varphi_h^*(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi) =$$

$$= [\sup \{ \psi(x) : x \in R^n \} - \inf \{ \psi(x) : x \in R^n \}] \int_{S_k(x)} \varphi_h(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi)$$

Tenendo presente che è

$$(3.13) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \varphi_h(\xi) = 0 \quad \text{per } \xi \in S_k(x) - N$$

$$(3.14) \quad 0 \leq \varphi_h(\xi) \leq \varphi_1(\xi)$$

$$(3.15) \quad \int_{S_k(x)} \varphi_1(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi) < \infty$$

dalle (3.12) si deduce :

$$(3.16) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{S_k(x)} \varphi_h^{**}(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi) - \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{S_k(x)} \varphi_h^*(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi) = 0$$

e per la (3.10) si ha :

$$(3.17) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{S_k(x)} \varphi_h^*(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi) = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{S_k(x)} \varphi_h^{**}(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi) = \\ = \int_{S_k(x)} \psi(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi)$$

Per la (3.16) e la (3.11) esiste il limite :

$$(3.18) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{-k} \int_E \psi \left( x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi)$$

e questo, per la (3.11) e (3.17) risulta uguale all'integrale :

$$(3.19) \quad \int_{S_k(x)} \psi(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi).$$

Il teorema risulta così dimostrato.

**TEOREMA 3.4.** *Sia  $E \subset R^n$  un insieme misurabile rispetto a  $\mathcal{H}_k$  e sia  $C_0^{(\infty)}(R^n)$  la famiglia delle funzioni reali  $\psi$  definite e continue con tutte le loro derivate in  $R^n$ , ivi a supporto compatto. Se esiste un sottospazio  $k$ -dimensionale  $S_k(x)$  di  $R^n$ , passante per un punto  $x \in R^n$ , tale che, per ogni  $\psi \in C_0^{(\infty)}(R^n)$  valga l'uguaglianza :*

$$(3.20) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{-k} \int_E \psi \left( x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) = \int_{S_k(x)} \psi(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi)$$

*allora  $S_k(x)$  è lo spazio  $k$ -dimensionale tangente a  $x$  in  $E$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\varphi \in C_0^{(0)}(R^n)$  e sia  $I(x, r)$  un intorno di  $x$  di raggio  $r$ , contenente nel suo interno il supporto di  $\varphi$ . Siano  $\{\varphi_h^*\}_h$  e  $\{\varphi_h^{**}\}_h$  due

successioni di funzioni della famiglia  $C_0^{(\infty)}(R^n)$ , convergenti uniformemente a  $\varphi$  in  $I(x, r)$ , formate da funzioni nulle fuori di  $I(x, r)$  e tali che per  $x \in R^n$  si abbia (<sup>7</sup>):

$$(3.21) \quad \psi_1^*(x) \leq \dots \leq \psi_h^*(x) \leq \dots$$

$$(3.22) \quad \psi_1^{**}(x) \geq \dots \geq \psi_h^{**}(x) \geq \dots$$

Per ipotesi si ha:

$$(3.23) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{-k} \int_E \psi_h^* \left( x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) = \int_{S_k(x)} \psi_h^*(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi)$$

$$(3.24) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{-k} \int_E \psi_h^{**} \left( x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) = \int_{S_k(x)} \psi_h^{**}(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi)$$

mentre, per la convergenza uniforme delle successioni  $\{\psi_h^*\}_h$  e  $\{\psi_h^{**}\}_h$ , si ha:

$$(3.25) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{S_k(x)} \psi_h^*(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi) = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{S_k(x)} \psi_h^{**}(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi) = \int_{S_k(x)} \varphi(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi)$$

Si ha pure:

$$(3.26) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{-k} \int_E \psi_h^* \left( x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) \leq$$

$$\leq \min_{\varrho \rightarrow 0} \lim_E \varrho^{-k} \int \varphi \left( x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) \leq \max_{\varrho \rightarrow 0} \lim_E \varrho^{-k} \int \varphi \left( x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) \leq$$

$$\leq \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{-k} \int_E \psi_h^{**} \left( x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi).$$

---

(<sup>7</sup>) Cfr. [4], Cap. I a pag. 22. Costruita una successione di funzioni della famiglia  $C_0^{(\infty)}(R^n)$ :  $\{\psi_h\}_h$ , convergente uniformemente a  $\varphi$  e formata da funzioni nulle al di fuori di un intorno circolare interno a  $I(x, r)$ , si possono facilmente dedurre due successioni  $\{\psi_h^*\}_h$  e  $\{\psi_h^{**}\}_h$  convergenti uniformemente a  $\varphi$  e formate da funzioni di  $C_0^{(\infty)}(R^n)$ , nulle al di fuori di  $I(x, r)$  e verificanti le (3.21) e (3.22).

Per le (3.26), (3.23), (3.24) e (3.25) esiste il limite :

$$(3.27) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{-k} \int_E \varphi \left( x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi)$$

e questo, per le (3.26) e (3.25), risulta uguale a

$$\int_{S_k(x)} \varphi(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi)$$

e il teorema risulta dimostrato.

#### § 4. Caratterizzazione degli insiemi $k$ -orientabili.

**TEOREMA 4.1.** *Sia  $E \subset R^n$  un insieme misurabile rispetto a  $\mathcal{H}_k$  e sia  $x$  un punto di  $R^n$  tale che in esso esista lo spazio  $k$ -dimensionale  $S_k(x)$  tangente a  $E$ . Si ha l'uguaglianza :*

$$(4.1) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{-k} \mathcal{H}_k[E \cap I(x, \varrho)] = \omega_k$$

dove con  $\omega_k$  si è indicata la misura della sfera di  $R^k$  di raggio 1.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $x \in R^n$  un punto nel quale esiste lo spazio  $k$ -dimensionale  $S_k(x)$  tangente a  $E$  e consideriamo la funzione  $\psi$  così definita per  $z \in R^n$  :

$$\psi(z) = 1 \quad \text{per ogni } z \text{ tale che } |z - x| \leq 1$$

$$\psi(z) = 0 \quad \text{per ogni } z \text{ tale che } |z - x| > 1.$$

La funzione  $\psi$  verifica le ipotesi del teorema 3.3 e pertanto verifica pure la formula (3.3) che diventa :

$$(4.2) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{-k} \mathcal{H}_k[E \cap I(x, \varrho)] = \mathcal{H}_k[S_k(x) \cap I(x, 1)].$$

Il secondo membro della (4.2) è uguale a  $\omega_k$  e la (4.1) risulta dimostrata.

**DEFINIZIONE 4.2.** Indichiamo con  $\mathcal{C}_{k,n}$  ( $1 \leq k \leq n$ ) la famiglia degli insiemi  $E \subset R^n$  misurabili rispetto a  $\mathcal{H}_k$  e tali che per  $\mathcal{H}_k$ -quasi tutti i punti  $x \in E$  esista uno spazio  $k$ -dimensionale  $S_k(x)$  tangente a  $E$  nel punto  $x$ .

TEOREMA 4.3. *Ogni insieme della famiglia  $\mathcal{T}_{k,n}$  appartiene alla famiglia  $\mathcal{K}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni punto  $x \in E$  per il quale valga la (4.1) costruiamo un intorno sferico aperto  $I(x, \varrho(x))$  tale che si abbia:

$$(4.3) \quad \mathcal{H}_k[E \cap I(x, \varrho(x))] < \omega_k + 1$$

Posto:

$$(4.4) \quad A = \bigcup_x I(x, \varrho(x))$$

l'insieme  $A$  è aperto e si ha:

$$(4.5) \quad \mathcal{H}_k[E - A] = 0.$$

Inoltre ogni insieme compatto  $C \subset A$  è contenuto in una famiglia finita di insiemi della famiglia  $\{I(x, \varrho(x))\}_x$  e pertanto si ha:

$$(4.6) \quad \mathcal{H}_k(E \cap C) < \infty.$$

Le (4.5) e (4.6) mostrano che sono verificate le (b) e (c) della definizione 1.6 e pertanto, per la definizione 1.7, si conclude che  $E$  appartiene a  $\mathcal{K}$ .

TEOREMA 4.4. *Sia  $E$  un insieme della famiglia  $\mathcal{T}_{k,n}$ . Ogni sottoinsieme  $L$  di  $E$ , che sia misurabile rispetto a  $\mathcal{H}_k$ , appartiene a  $\mathcal{T}_{k,n}$ . Inoltre, per  $\mathcal{H}_k$ -quasi tutti i punti  $x \in L$ , lo spazio tangente a  $L$  in  $x$  e lo spazio tangente a  $E$  in  $x$  coincidono.*

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema 4.3 esiste un insieme aperto  $A \subset R^n$  tale che  $E \in \mathcal{K}(A)$ . Per i teoremi 1.8 e 2.2 per  $\mathcal{H}_k$ -quasi tutti i punti  $x \in [A - (E - L)]$  e, di conseguenza, per  $\mathcal{H}_k$ -quasi tutti i punti  $x \in L$ , si ha:

$$(4.7) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{-k} \mathcal{H}_k[(E - L) \cap I(x, \varrho)] = 0.$$

Detta  $\varphi$  una funzione di  $C_0^{(0)}(R^n)$  si ha, per  $\varrho$  sufficientemente piccolo:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \varrho^{-k} \int_E \varphi \left( x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) &= \\ &= \varrho^{-k} \int_L \varphi \left( x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) + \varrho^{-k} \int_{E-L} \varphi \left( x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi). \end{aligned}$$

Sia  $r$  il raggio di un cerchio di centro  $x$  e contenente nel suo interno il supporto di  $\varphi$ ; sia  $M$  il massimo di  $\varphi$ ; si ha, sempre per  $\varrho$  sufficientemente piccolo:

$$(4.9) \quad \left| \varrho^{-k} \int_{E-L} \varphi \left( x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) \right| = \left| \varrho^{-k} \int_{(E-L) \cap I(x, \varrho r)} \varphi \left( x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) \right| \leq \\ \leq M r^k (\varrho r)^{-k} \mathcal{H}_k[(E-L) \cap I(x, \varrho r)].$$

Dalla (4.7) e dalla (4.9) segue che per  $\mathcal{H}_k$ -quasi tutti i punti  $x \in L$  il secondo addendo del secondo membro della (4.8) tende a zero per  $\varrho \rightarrow 0$  e, tenuto conto della (3.1), si ottiene l'uguaglianza:

$$(4.10) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{-k} \int_L \varphi \left( x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) = \int_{S_k(x)} \varphi(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi),$$

che dimostra il teorema.

**TEOREMA 4.5.** *Sia  $\{E_h\}_{h=1,2,\dots}$  una successione di insiemi della famiglia  $\mathcal{C}_{k,n}$ , tali che l'unione  $E = \bigcup_{h=1}^{\infty} E_h$  appartenga alla famiglia  $\mathcal{K}$ ; allora l'insieme  $E$  appartiene a  $\mathcal{C}_{k,n}$ . Inoltre, per ogni  $h$ , in  $\mathcal{H}_k$ -quasi tutti i punti  $x \in E_h$  lo spazio tangente a  $E_h$  e lo spazio tangente a  $E$  coincidono.*

**DIMOSTRAZIONE.** Esiste un insieme aperto  $A \subset R^n$  tale che  $E \in \mathcal{K}(A)$ . Fissiamo un valore dell'indice  $h$ . Dai teoremi 1.8 e 2.2 segue che per  $\mathcal{H}_k$ -quasi tutti i punti  $x \in A - (E - E_h)$  e, di conseguenza per  $\mathcal{H}_k$ -quasi tutti i punti  $x \in E_h$ , si ha:

$$(4.11) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{-k} \mathcal{H}_k[(E - E_h) \cap I(x, \varrho)] = 0.$$

Sia  $x$  un punto di  $E_h$  nel quale abbia luogo la (4.11) e nel quale esista lo spazio  $k$ -dimensionale  $S_k(x)$  tangente a  $E_h$ .

Sia  $\varphi$  una funzione di  $C_0^{(0)}(R^n)$ ; dalla uguaglianza, valevole per  $\varrho$  sufficientemente piccolo:

$$(4.11) \quad \varrho^{-k} \int_E \varphi \left( x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) = \\ = \varrho^{-k} \int_{E_h} \varphi \left( x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) + \varrho^{-k} \int_{E - E_h} \varphi \left( x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi)$$

si deduce, con ragionamento analogo a quello del teorema precedente :

$$(4.12) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{-k} \int_E \varphi \left( x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) = \int_{S_k(x)} \varphi \left( x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi).$$

Ne segue che,  $\mathcal{H}_k$ -quasi ovunque in  $E_h$ , esiste lo spazio  $k$ -dimensionale tangente a  $E$  ed essendo:  $E = \bigcup_{h=1}^{\infty} E_h$ , il teorema risulta dimostrato.

**TEOREMA 4.6.** *Il supporto  $V$  di una varietà regolare  $k$ -dimensionale  $\mathcal{V} = [T, f, V]$  appartiene a  $\mathcal{C}_{k,n}$ . Nei punti  $x$  di  $V$  associati per la  $f$  a punti interni a  $T$ , lo spazio  $k$ -dimensionale  $S_k(x)$  tangente a  $\mathcal{V}$  nel senso usuale coincide con lo spazio tangente nel senso della definizione 3.1.*

**DIMOSTRAZIONE.** Posto :

$$(4.13) \quad g_{hl}(y) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_h} \frac{\partial f_i}{\partial y_l} \quad (h, l = 1, \dots, k)$$

$$(4.14) \quad G(y) = \{\det \|g_{hl}(y)\|\}^{1/2},$$

dalla uguaglianza, valevole <sup>(8)</sup> per ogni insieme misurabile  $L \subset T$

$$(4.15) \quad \mathcal{H}_k[f(L)] = \int_L G(y) dy$$

segue, per ogni  $\psi \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ :

$$(4.16) \quad \int_V \psi(\xi) d\mathcal{H}_k(\xi) = \int_T \psi[f(y)] G(y) dy,$$

donde, con calcoli di carattere elementare, si ha la (3.1) per ogni  $x \in f(T - \mathcal{F}T)$ , essendo  $S_k(x)$  lo spazio  $k$ -dimensionale tangente a  $\mathcal{V}$  nel senso usuale.

**TEOREMA 4.7.** *Ogni insieme  $k$ -orientabile  $E \subset \mathbb{R}^n$  appartiene alla famiglia  $\mathcal{C}_{k,n}$ .*

La dimostrazione segue dai teoremi 4.6, 4.4 e 4.5.

**DEFINIZIONE 4.8.** Sia  $1 \leq k < n$  e sia  $S_k(x)$  un sottospazio  $k$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^n$  passante per il punto  $x$ . Detta  $\xi'$  la proiezione ortogonale di un

<sup>(8)</sup> Cfr. [2] teor. 5.10 a pag. 144.

punto  $\xi \in R^n$  su  $S_k(x)$ , poniamo, per ogni  $\varepsilon > 0$ :

$$(4.17) \quad M^{n-k}(x, S_k(x), \varepsilon) = \{\xi : |x - \xi| > (1 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} |x - \xi'|\}.$$

Diremo che lo spazio  $k$ -dimensionale  $S_k(x)$  è uno spazio  $k$ -dimensionale tangente a  $E$  nel punto  $x$  secondo Hausdorff<sup>(9)</sup> se sono verificate le condizioni seguenti:

$$(4.18) \quad \max \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{-k} \mathcal{H}_k[E \cap I(x, \varrho)] > 0$$

$$(4.19) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{-k} \mathcal{H}_k[E \cap M^{n-k}(x, S_k(x), \varepsilon) \cap I(x, \varrho)] = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0.$$

**TEOREMA 4.9.** *Sia  $E \subset R^n$  un insieme misurabile rispetto a  $\mathcal{H}_k$  e sia  $x$  un punto di  $R^n$  in cui esiste lo spazio  $k$ -dimensionale  $S_k(x)$  tangente a  $E$  secondo la definizione 3.1. Esiste allora in  $x$  lo spazio  $k$ -dimensionale tangente  $E$  secondo Hausdorff ed esso coincide con  $S_k(x)$ <sup>(10)</sup>.*

**DIMOSTRAZIONE.** Per ogni  $\varepsilon > 0$  consideriamo la funzione  $\psi_\varepsilon$  così definita per  $\xi \in R^n$ :

$$\psi_\varepsilon(\xi) = 1 \text{ per } \xi \in I(x, 1) \cap M^{n-k}(x, S_k(x), \varepsilon)$$

$$\psi_\varepsilon(\xi) = 0 \text{ per } \xi \in [R^n - I(x, 1) \cap M^{n-k}(x, S_k(x), \varepsilon)].$$

La funzione  $\psi_\varepsilon$  verifica le ipotesi del teorema 3.3 e pertanto verifica pure la formula (3.3), dalla quale si ottiene, per ogni  $\varepsilon > 0$ :

$$(4.20) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{-k} \mathcal{H}_k[E \cap M^{n-k}(x, S_k(x), \varepsilon) \cap I(x, \varrho)] = 0$$

e questa dimostra la (4.19). La (4.18) segue dal teorema 4.1.

**TEOREMA 4.10.** *Ogni insieme  $E$  della famiglia  $\mathcal{C}_{k,n}$  è  $k$ -orientabile.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $1 \leq k < n$ . Per il teorema 4.3 e la definizione 1.6 esiste una successione di insiemi compatti  $\{C_h\}_h$  di  $R^n$  tali che sia:

$$(4.21) \quad \mathcal{H}_k \left[ E - \bigcup_{h=1}^{\infty} C_h \right] = 0$$

$$(4.22) \quad \mathcal{H}_k[E \cap C_h] < \infty \quad (h = 1, 2, \dots)$$

<sup>(9)</sup> Cfr. [3] a pag. 311.

<sup>(10)</sup> Non vale l'inverso del teorema 4.8; infatti l'insieme dei punti della curva di  $R^2$  di equazione:  $x_1^2 = x_2^3$  possiede nel punto  $(0,0)$  la retta tangente secondo Hausdorff, ma non secondo la definizione 3.1.

Fissato  $h$ , l'insieme  $E \cap C_h$  appartiene alla famiglia  $\mathcal{C}_{k,n}$  (teorema 4.4) e, per il teorema 4.9, esiste in  $\mathcal{H}_k$ -quasi tutti i suoi punti lo spazio  $k$ -dimensionale tangente a  $E \cap C_h$  secondo Hausdorff. Per tale motivo, per la (4.22) e per risultati già noti<sup>(11)</sup>, segue che l'insieme  $E \cap C_h$  è  $(\mathcal{H}_k, -k)$  rettificabile. Dalla (4.21) si deduce che anche l'insieme  $E$  è  $(\mathcal{H}_k, k)$  rettificabile. L'insieme  $E$  appartiene allora<sup>(12)</sup> alla famiglia  $\mathcal{C}_{k,n}$  e, poichè per il teorema 4.3 appartiene alla famiglia  $\mathcal{K}$ , esso risulta  $k$ -orientabile. Per  $k = n$  il teorema discende dal fatto che ogni insieme della famiglia  $\mathcal{C}_{n,n}$  è misurabile (secondo Lebesgue) in  $R^n$ .

### § 5. Riassunto dei principali risultati.

I teoremi 4.7 e 4.10 si possono riassumere nel seguente:

**TEOREMA 5.1.** *Condizione necessaria e sufficiente perché un insieme  $E \subset R^n$  misurabile rispetto a  $\mathcal{H}_k$  sia  $k$ -orientabile è che in  $\mathcal{H}_k$ -quasi tutti i suoi punti esista uno spazio  $k$ -dimensionale tangente a  $E$  nel senso della def. 3.1.*

Dai teoremi 5.1 e 4.1 si deduce il seguente:

**TEOREMA 5.2.** *Sia  $E$  un insieme  $k$ -orientabile. In  $\mathcal{H}_k$ -quasi tutti i punti  $x \in E$  si ha:*

$$(5.1) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{-k} \mathcal{H}_k [E \cap I(x, \varrho)] = \omega_k$$

Dalla definizione 1.9 e dal teorema 2.2 si deduce il seguente:

**TEOREMA 5.3.** *Sia  $E$  un insieme  $k$ -orientabile. Esiste un insieme aperto  $A \subset R^n$  tale che si abbia:*

$$(5.2) \quad \mathcal{H}_k(E - A) = 0$$

e, per  $\mathcal{H}_k$ -quasi tutti i punti  $x \in A - E$  si abbia:

$$(5.3) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{-k} \mathcal{H}_k [E \cap I(x, \varrho)] = 0.$$

<sup>(11)</sup> Cfr. [2], teor. 9.1 a pag. 178, [3] a pag. 312.

<sup>(12)</sup> Cfr. [1] teor. 2.12 a pag. 180 e 2.13 a pag. 181.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. CHIEFFI: *Sezioni di insiemi  $k$ -rettificabili*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. XVI (1962), pp. 173-193.
- [2] H. FEDERER: *The  $(\Phi, k)$  rectifiable subsets of  $n$ -space*. Transactions of the American Math. Soc. vol. 62 (1947), pp. 114-192.
- [3] H. FEDERER: *Measure and area*. Bulletin of the American Math. Soc., vol. 58 (1952) pp. 306-378.
- [4] L. SCHWARTZ: *Théorie des distributions*, vol. I; Hermann, Paris, 2<sup>a</sup> ed. 1957.