ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

S. CAMPANATO

Proprietà di hölderianità di alcune classi di funzioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 17, nº 1-2 (1963), p. 175-188

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1963_3_17_1-2_175_0>

PROPRIETÀ DI HÖLDERIANITÀ DI ALCUNE CLASSI DI FUNZIONI

di S. CAMPANATO (a Pisa) (*)

Questa nota si ricollega a un lavoro precedente ([2]) (1) nel quale ho studiato le proprietà di immersione per classi di funzioni misurabili su un aperto limitato Ω dello spazio euclideo R^n ed appartenenti ad una certa classe di Morrey insieme con le loro derivate generalizzate di un certo ordine k intero o frazionario.

Rinvio al lavoro ora citato per quanto riguarda la bibliografia sull'argomento.

Supponiamo che Ω sia un aperto limitato di R^n avente frontiera $\partial\Omega$ sufficientemente regolare, ad es. localmente lipschitziana (2), è noto allora il seguente risultato di Sobolev: se $u(x)$ è una funzione che appartiene a $W_k^q(\Omega)$, k intero ≥ 0,q reale ≥ 1, cioè è una funzione di potenza q sommabile in Ω insieme con le sue derivate generalizzate fino a quelle di ordine k, e se $qk > n$ allora $u(x)$ coincide quasi ovunque in $\overline{\Omega}$ (3) con una funzione continua anzi hölderiana con un certo esponente α dipendente da k, q, n.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 9 del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.

(1) I numeri fra [ ] si riferiscono alla bibliografia finale.

(2) Si dice che un aperto Ω ha frontiera localmente lipschitziana se per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste un intorno (su $\partial\Omega$) il quale ammette, rispetto ad un opportuno sistema di assi $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ con l'origine in x, una rappresentazione del tipo

$$\xi_n = \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$$

con φ definita in un intorno del punto $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{n-1} = 0$ ed ivi lipschitziana.

(3) $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

La condizione $qk > n$ non è attenuabile se si rimane nelle classi di Sobolev $W^q_k(\Omega)$; tale condizione si può invece migliorare se si considerano particolari sottoclassi di $W^q_k(\Omega)$ ad esempio se si considera il sottospazio $W^{(q,\lambda)}_k(\Omega)$, λ reale e $0 \leq \lambda \leq n$, delle funzioni $u(x)$ che insieme con le derivate generalizzate fino all'ordine k appartengono non più ad $L^q(\Omega)$ ma alla classe di Morrey $L^{(q,\lambda)}(\Omega)$ (cfr. ad es. [2]) ([4]).

Si dimostra allora che la funzione $u(x)$ è continua ed hölderiana in $\overline{\Omega}$ con un certo esponente che dipende da k, q, n e da λ sotto l'ipotesi meno restrittiva che

$$\lambda + kq > n \tag{1}$$

Tale risultato è dovuto a Greco [3], Nirenberg [4] ed è stato dimostrato in ipotesi un pò meno restrittive sull'aperto Ω anche in [2] n. 3.

Questo risultato generalizza in un certo senso quello di Sobolev che si ottiene dal risultato di Greco-Nirenberg per $\lambda = 0$ in accordo con il fatto che lo spazio di Morrey $L^{(q,\lambda)}(\Omega)$ quando $\lambda = 0$ coincide con l'usuale spazio $L^q(\Omega)$ delle funzioni di potenza q sommabili in Ω.

In questa nota mi propongo di dare un risultato di hölderianità analogo a quello di Sobolev, e più in generale a quello di Greco-Nirenberg, per funzioni appartenenti agli spazi $W^q_s(\Omega)$, o più in generale $W^{(q,\lambda)}_s(\Omega)$, con s reale positivo ma non intero. Un risultato di tal genere relativo al caso di $s > 1$ si trova in [2] n. 4.

Di fondamentale importanza per il risultato che qui interessa è lo studio preliminare condotto nei n. 1 e 2 delle proprietà di continuità ed hölderianità di certe classi di funzioni che generalizzano in modo abbastanza naturale le classi $L^{(q,\lambda)}(\Omega)$ di Morrey, studio che ha già interesse in se stesso.

Ringrazio il prof. De Giorgi, che mi ha proposto lo studio di queste classi, per le utili discussioni sull'argomento.

n. 1. — Sia Ω un aperto limitato e connesso dello spazio euclideo R^n di diametro $d(\Omega)$. Sia $I(x_0, \varrho)$, $x_0 \in R^n$ e $\varrho > 0$, l'ipersfera di centro x_0 e raggio ϱ; sia infine R l'insieme dei numeri reali.

([4]) Una funzione $u(x)$ definita in Ω appartiene alla classe di Morrey $L^{(q,\lambda)}(\Omega)$, $q \geq 1$, $0 \leq \lambda \leq n$, se esiste una costante positiva $M(u)$ tale che per tutti gli $x_0 \in \overline{\Omega}$ e per tutti i ϱ, $0 < \varrho \leq \operatorname{diam}.\Omega$

$$\int_{I(x_0,\varrho)\cap\Omega} |u(x)|^q \, dx \leq M(u)\, \varrho^\lambda$$

dove $I(x_0, \varrho)$ è la sfera di centro x_0 e raggio ϱ.

Supporremo nel seguito che Ω non solo abbia frontiera $\partial\Omega$ di misura nulla [5] ma verifichi anche la seguente condizione [6]:

(A) *Esistano due costanti positive* K *e* ϱ_0, *con* $0 < \varrho_0 \leq d(\Omega)$, *tali che qualunque sia* $x_0 \in \overline{\Omega}$ *e qualunque sia* ϱ, $0 < \varrho \leq \varrho_0$, *si abbia*

$$\text{mis}\,[I(x_0, \varrho) \cap \Omega] \geq K \varrho^n. \tag{1.1}$$

Indichiamo con $\mathcal{L}^{(q,\lambda)}(\Omega)$, $q \geq 1$, $0 \leq \lambda \leq n + q$, la classe delle funzioni $u(x)$ definite su Ω e ivi misurabili le quali godono la seguente proprietà:

Esiste una costante positiva $M(u)$ *tale che*

$$\inf_{c \in R} \int_{I(x_0,\varrho)\cap\Omega} |u(x) - c|^q \, dx \leq M(u)\, \varrho^\lambda \tag{2.1}$$

per ogni $x_0 \in \overline{\Omega}$ *e per ogni* ϱ *tale che* $0 < \varrho \leq d(\Omega)$.

Dalla (2.1) segue in particolare che $u \in L^q(\Omega)$. Esula dagli scopi di questa nota lo studio completo delle proprietà di queste classi e dei rapporti che intercorrono tra queste classi e quelle di Morrey quando $0 \leq \lambda \leq n$ [7]. Ci limiteremo in questa sede a studiare le proprietà di continuità ed hölderianità delle funzioni $u \in \mathcal{L}^{(q,\lambda)}(\Omega)$ quando λ è sufficientemente elevato.

Dimostriamo a tal fine qualche lemma preliminare.

Fissati $u \in \mathcal{L}^{(q,\lambda)}(\Omega)$, $x_0 \in \overline{\Omega}$ e $0 < \varrho \leq d(\Omega)$ indichiamo con $c(x_0, \varrho, u)$ la costante reale, certo esistente, tale che

$$\int_{I(x_0,\varrho)\cap\Omega} |u(x) - c(x_0, \varrho, u)|^q \, dx = \inf_{c \in R} \int_{I(x_0,\varrho)\cap\Omega} |u(x) - c|^q \, dx. \tag{3.1}$$

---

(5) Gli integrali e la misura si intenderanno sempre nel senso di Lebesgue.

(6) La proprietà (A) è verificata ad esempio se Ω gode la proprietà di cono di Sobolev, cioè se per ogni punto $x \in \Omega$ si può trovare un cono circolare di vertice x contenuto in Ω avente altezza ed apertura indipendenti da x.

(7) Le classi $\mathcal{L}^{(q,\lambda)}(\Omega)$ potrebbero essere opportunamente normalizzate e si potrebbe allora dimostrare che per $0 \leq \lambda \leq n$ esse sono isomorfe con le classi di Morrey $L^{(q,\lambda)}(\Omega)$.

Si dimostrano allora i seguenti lemmi:

LEMMA [I.1] — *Se Ω gode la proprietà (A) e $u \in \mathcal{L}^{(q,\lambda)}(\Omega)$ con $q \geq 1$ e $\lambda > n$, esiste una costante positiva c_1 dipendente solo da $q, , \lambda , n , K$* [8] *tale che*

$$(4.1) \qquad \left| c(x_0, \varrho, u) - c\left(x_0, \frac{\varrho}{2^h}, u\right)\right| \leq c_1(q, \lambda, n, K)\,[M(u)]^{\frac{1}{q}}\, \varrho^{\frac{\lambda-n}{q}}$$

per qualunque $x_0 \in \overline{\Omega}$, $0 < \varrho \leq \varrho_0$ e h intero positivo.

Fissato $x_0 \in \overline{\Omega}$ e $0 < \varrho \leq \varrho_0$ per quasi tutti i punti ξ di $I\left(x_0, \frac{\varrho}{2}\right) \cap \Omega$ si ha che

$$\left| c(x_0, \varrho, u) - c\left(x_0, \frac{\varrho}{2}, u\right)\right|^q \leq 2^q \,|\, c(x_0, \varrho, u) - u(\xi)\,|^q +$$

$$+ 2^q \left| c\left(x_0, \frac{\varrho}{2}, u\right) - u(\xi)\right|^q.$$

Integriamo rispetto a ξ su $I\left(x_0, \frac{\varrho}{2}\right) \cap \Omega$ tenendo conto della proprietà (A) su Ω e delle (2.1), (3.1); si ottiene

$$K\left(\frac{\varrho}{2}\right)^n \left| c(x_0, \varrho, u) - c\left(x_0, \frac{\varrho}{2}, u\right)\right|^q \leq 2^q \int_{I\left(x_0, \frac{\varrho}{2}\right) \cap \Omega} |\, u(\xi) - c(x_0, \varrho, u)\,|^q\, d\xi +$$

$$+ 2^q \int_{I\left(x_0, \frac{\varrho}{2}\right) \cap \Omega} \left| u(\xi) - c\left(x_0, \frac{\varrho}{2}, u\right)\right|^q d\xi \leq 2^q \int_{I(x_0, \varrho) \cap \Omega} |\, u(\xi) - c(x_0, \varrho, u)\,|^q\, d\xi$$

$$+ 2^q \int_{I\left(x_0, \frac{\varrho}{2}\right) \cap \Omega} \left| u(\xi) - c\left(x_0, \frac{\varrho}{2}, u\right)\right|^q d\xi \leq (2^q + 2^{q-\lambda})\, M(u)\, \varrho^\lambda$$

[8] Nel seguito con $c_1, c_2, \ldots$ indicheremo sempre costanti positive indipendenti dalle funzioni cui le varie maggiorazioni si riferiscono. Quando sarà opportuno indicheremo fra ( ) le quantità dalle quali esse dipendono.

e quindi in definitiva

$$\left| c(x_0, \varrho, u) - c\left(x_0, \frac{\varrho}{2}, u\right) \right| \leq c_2(q, \lambda, n, K)\, [M(u)]^{\frac{1}{q}}\, \varrho^{\frac{\lambda-n}{q}}. \tag{5.1}$$

Dalla (5.1) segue che per ogni intero positivo h

$$\left| c\left(x_0, \frac{\varrho}{2^h}, u\right) - c\left(x_0, \frac{\varrho}{2^{h+1}}, u\right) \right| \leq c_2\, 2^{h\frac{n-\lambda}{q}}\, [M(u)]^{\frac{1}{q}}\, \varrho^{\frac{\lambda-n}{q}}. \tag{6.1}$$

Ora se $\lambda > n$ la serie numerica $\sum\limits_{i=0}^{\infty} 2^{i\frac{n-\lambda}{q}}$ è convergente; poniamo

$$H = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i\frac{n-\lambda}{q}}$$

dalla (6.1) segue allora che per $\lambda > n$ è convergente la serie $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \left| c\left(x_0, \frac{\varrho}{2^i}, u\right) - c\left(x_0, \frac{\varrho}{2^{i+1}}, u\right) \right|$ e più precisamente si ha che

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left| c\left(x_0, \frac{\varrho}{2^i}, u\right) - c\left(x_0, \frac{\varrho}{2^{i+1}}, u\right) \right| \leq c_2\, H\, [M(u)]^{\frac{1}{q}}\, \varrho^{\frac{\lambda-n}{q}}. \tag{7.1}$$

D'altra parte qualunque sia l'intero positivo h

$$\left| c(x_0, \varrho, u) - c\left(x_0, \frac{\varrho}{2^h}, u\right) \right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \left| c\left(x_0, \frac{\varrho}{2^i}, u\right) - c\left(x_0, \frac{\varrho}{2^{i+1}}, u\right) \right|$$

e quindi la tesi.

LEMMA [II.1] — *Se Ω gode la proprietà (A) e $u \in \mathcal{L}^{(q,\lambda)}(\Omega)$ con $q \geq 1$ e $\lambda > n$, l'insieme numerico descritto da $c(x, \varrho_0, u)$ al variare di x in $\overline{\Omega}$ è limitato.*

Sia x un punto di $\overline{\Omega}$. Per quasi tutti i punti $\xi \in I(x, \varrho_0) \cap \Omega$ si ha

$$| c(x, \varrho_0, u)|^q \leq 2^q\, | c(x, \varrho_0, u) - u(\xi)|^q + 2^q\, | u(\xi)|^q.$$

Integrando rispetto a ξ su $I(x, \varrho_0) \cap \Omega$, tenuto conto della proprietà (A) su Ω, si ottiene

$$| c(x, \varrho_0, u)|^q \leq 2^q \frac{M(u)}{K}\, \varrho_0^{\lambda-n} + \frac{2^q}{K \varrho_0^n} \int_{\Omega} | u(\xi)|^q\, d\xi \tag{8.1}$$

e quindi la tesi.

LEMMA (III.1) — *Se Ω gode la proprietà (A) e $u \in \mathcal{L}^{(q,\lambda)}(\Omega)$, con $q \geq 1$ e $\lambda > n$, qualunque sia $x \in \overline{\Omega}$ esiste finito il $\lim_{\varrho \to 0} c(x, \varrho, u)$. Detto $\tilde{u}(x)$ tale limite, $\tilde{u}(x)$ è una funzione definita in tutto $\overline{\Omega}$ che verifica la relazione*

$$(9.1) \qquad | c(x, \varrho, u) - \tilde{u}(x) | \leq c_1 [M(u)]^{\frac{1}{q}} \varrho^{\frac{\lambda - n}{q}}$$

per tutti i ϱ tali che $0 < \varrho \leq \varrho_0$.

Sia $x \in \overline{\Omega}$ e ϱ un numero reale positivo verificante la relazione $0 < \varrho \leq \varrho_0$, siano infine h e k due interi positivi e possiamo supporre che $k \geq h$; si ha allora

$$\left| c\left(x, \frac{\varrho}{2^h}, u\right) - c\left(x, \frac{\varrho}{2^k}, u\right) \right| \leq \sum_{i=h}^{k-1} \left| c\left(x, \frac{\varrho}{2^i}, u\right) - c\left(x, \frac{\varrho}{2^{i+1}}, u\right) \right|$$

D'altra parte, per quanto si è dimostrato nel lemma [I.1], la serie $\sum_{i=0}^{\infty} \left| c\left(x, \frac{\varrho}{2^i}, u\right) - c\left(x, \frac{\varrho}{2^{i+1}}, u\right) \right|$ è convergente, quindi ne segue che la successione $\left\{ c\left(x, \frac{\varrho}{2^h}, u\right) \right\}$ è convergente per $h \to \infty$.

Dimostriamo che il limite di questa successione non dipende da ϱ. Fissato x in $\overline{\Omega}$, siano ϱ_1, ϱ_2 due numeri reali positivi verificanti la relazione $0 < \varrho_1 \leq \varrho_2 \leq \varrho_0$.

Con un calcolo del tutto analogo a quello svolto per dimostrare la (5.1) si prova che

$$(10.1) \qquad \left| c\left(x, \frac{\varrho_1}{2^h}, u\right) - c\left(x, \frac{\varrho_2}{2^h}, u\right) \right|^q \leq 2^q \frac{M(u)}{K} \left[\frac{\varrho_1^\lambda + \varrho_2^\lambda}{\varrho_1^n} \right] \frac{1}{2^{h(\lambda - n)}} .$$

Poiche $\lambda > n$ dalla (10.1) segue che

$$\lim_{h \to \infty} \left| c\left(x, \frac{\varrho_1}{2^h}, u\right) - c\left(x, \frac{\varrho_2}{2^h}, u\right) \right| = 0$$

e ciò prova quanto volevamo.

Fissato allora x in $\overline{\Omega}$ e un ϱ verificante la relazione $0 < \varrho \leq \varrho_0$ poniamo

$$\lim_{h \to \infty} c\left(x, \frac{\varrho}{2^h}, u\right) = \tilde{u}(x)$$

$\widetilde{u}(x)$ è una funzione definita in tutto $\overline{\Omega}$; dalla (4.1), passando al limite per $h \longrightarrow \infty$, segue che, per tutti i ϱ dal tipo sopradetto,

$$| \, c\,(x\,,\,\varrho\,,\,u) - \widetilde{u}\,(x) \, | \leq c_1 \, [M\,(u)]^{\frac{1}{q}} \, \varrho^{\frac{\lambda-n}{q}}$$

Tenuto conto che $\lambda > n$, da questa relazione segue anche che

$$\widetilde{u}\,(x) = \lim_{\varrho \to 0} c\,(x\,,\,\varrho\,,\,u)$$

e il lemma è completamente dimostrato.

Concludiamo questo numero con il seguente teorema relativo alla proprietà di limitatezza di una fuuzione $u \in \mathcal{L}^{(q,\lambda)}\,(\Omega)$ quando $\lambda > n$.

TEOREMA [I.1] — *Se Ω gode la proprietà (A) e $u \in \mathcal{L}^{(q,\lambda)}\,(\Omega)$, con $q \geq 1$ e $\lambda > n$, la funzione $\widetilde{u}\,(x)$ è limitata in $\overline{\Omega}$ e coincide quasi ovunque in Ω con la funzione $u\,(x)$.*

La prima parte del teorema, cioè la limitatezza della $\widetilde{u}(x)$ in $\overline{\Omega}$, segue immediatamente, nelle ipotesi in cui ci siamo posti, dalla (9.1) in cui si assuma $\varrho = \varrho_0$ e dal lemma [II.1]

Per dimostrare che $\widetilde{u}\,(x)$ coincide quasi ovunque in Ω con la $u\,(x)$ basta far vedere che per quasi tutti gli x di Ω si ha

$$\lim_{\varrho \to 0} c\,(x\,,\,\varrho\,,\,u) = u\,(x) \tag{11.1}$$

A tal fine osserviamo che essendo $u\,(x) \in L^q\,(\Omega)$ per quasi tutti gli x in Ω

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\text{mis}\,[I\,(x\,,\,\varrho) \cap \Omega]} \int\limits_{I(x,\varrho) \cap \Omega} | \, u\,(\xi) - u\,(x) \, |^q \, d\xi = 0 \tag{12.1}$$

D'altra parte per quasi tutti gli x in Ω e i ξ di $I\,(x\,,\,\varrho) \cap \Omega$, dove al solito $0 < \varrho \leq \varrho_0$, si ha

$$| \, c\,(x\,,\,\varrho\,,\,u) - u\,(x) \, |^q \leq 2^q \, | \, c\,(x\,,\,\varrho\,,\,u) - u\,(\xi) \, |^q + 2^q \, | \, u\,(\xi) - u\,(x) \, |^q$$

da cui, integrando rispetto a ξ su $I\,(x\,,\,\varrho) \cap \Omega$, si ottiene

$$| \, c(x,\varrho,u) - u(x) \, |^q \leq 2^q \, \frac{M\,(u)}{K} \, \varrho^{\lambda-n} + \frac{2^q}{\text{mis}[I(x,\varrho) \cap \Omega]} \int\limits_{I(x,\varrho) \cap \Omega} | \, u(\xi) - u(x) \, |^q \, d\xi \tag{13.1}$$

Dalle (12.1) e (13.1), ricordando che $\lambda > n$, segue la (11.1) e quindi la tesi.

n. 2. — In questo numero preciseremo ulteriormente le proprietà di regolarità di una funzione $u \in \mathcal{L}^{(q,\lambda)}(\Omega)$, quando $\lambda > n$, facendo vedere che $u(x)$ coincide quasi ovunque in Ω con una funzione non solo limitata ma hölderiana.

Premettiamo a tal fine la dimostrazione del seguente lemma:

LEMMA [I.2]. — *Se Ω gode la proprietà (A) e $u \in \mathcal{L}^{(q,\lambda)}(\Omega)$, con $q \geq 1$ e $\lambda > 0$, per ogni coppia di punti $x_0, y_0 \in \bar{\Omega}$ tali che $|x_0 - y_0| < \varrho_0$ si ha la maggiorazione*

$$|c(x_0, 2|x_0 - y_0|, u) - c(y_0, 2|x_0 - y_0|, u)| \leq \left[\frac{2^{q+1+\lambda}}{K}\right]^{\frac{1}{q}} [M(u)]^{\frac{1}{q}} |x_0 - y_0|^{\frac{\lambda - n}{q}} \tag{1.2}$$

Poniamo $\varrho = |x_0 - y_0| < \varrho_0$ e $I \equiv I(x_0, 2\varrho) \cap I(y_0, 2\varrho) \cap \Omega$. Per quasi tutti i punti $\xi \in I$ si ha allora

$$|c(x_0, 2\varrho, u) - c(y_0, 2\varrho, u)|^q \leq 2^q |c(x_0, 2\varrho, u) - u(\xi)|^q + 2^q |c(y_0, 2\varrho, u) - u(\xi)|^q$$

e integrando rispetto a ξ su I

$$\operatorname{mis}(I) |c(x_0, 2\varrho, u) - c(y_0, 2\varrho, u)|^q \leq 2^q \int_I |u(\xi) - c(x_0, 2\varrho, u)|^q d\xi +$$

$$+ 2^q \int_I |u(\xi) - c(y_0, 2\varrho, u)|^q d\xi \leq 2^q \int_{I(x_0, 2\varrho) \cap \Omega} |u(\xi) - c(x_0, 2\varrho, u)|^q d\xi + \tag{2.2}$$

$$+ 2^q \int_{I(y_0, 2\varrho) \cap \Omega} |u(\xi) - c(y_0, 2\varrho, u)|^q d\xi \leq 2^{q+1+\lambda} M(u) \varrho^\lambda .$$

D'altra parte

$$\operatorname{mis}(I) \geq \operatorname{mis}[I(x_0, \varrho) \cap \Omega] \geq K\varrho^n \tag{3.2}$$

Dalle (2.2), (3.2) segue la tesi.

Si è visto nel numero precedente che se Ω gode la proprietà (A) e $u \in \mathcal{L}^{(q,\lambda)}(\Omega)$, con $q \geq 1$ e $\lambda > n$, u coincide quasi ovunque in Ω con una funzione limitata $\tilde{u}(x)$ definita in $\bar{\Omega}$ dalle relazione

$$\tilde{u}(x) = \lim_{\varrho \to 0} c(x, \varrho, u)$$

Dimostriamo ora che, nelle stesse ipotesi su Ω e su $u(x)$, la funzione $\tilde{u}(x)$ è anche hölderiana in $\bar{\Omega}$.

Si ha, più precisamente, il seguente teorema:

TEOREMA [I.2]. — *Se Ω gode la proprietà (A) e $u \in \mathcal{L}^{(q,\lambda)}(\Omega)$ con $q \geq 1$ è $n < \lambda \leq n + q$*[9], *allora $\tilde{u}(x)$ è hölderiana in $\bar{\Omega}$ con esponente di hölderianità $\mu = \dfrac{\lambda - n}{q}$ e per ogni coppia di punti $x, y \in \bar{\Omega}$ si ha la maggiorazione*

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq c_3(q, \lambda, K, \varrho_0, \Omega)\,[M(u)]^{\frac{1}{q}}\,|x - y|^{\frac{\lambda - n}{q}} \tag{4.2}$$

Siano x, y due punti di $\bar{\Omega}$ aventi distanza $\varrho = |x - y| < \dfrac{\varrho_0}{2}$. Si ha allora

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq |\tilde{u}(x) - c(x, 2\varrho, u)| + \\ + |\tilde{u}(y) - c(y, 2\varrho, u)| + |c(x, 2\varrho, u) - c(y, 2\varrho, u)| \tag{5.2}$$

Applicando il lemma [III.1], e più precisamente la (9.1), si ottiene che

$$|\tilde{u}(x) - c(x, 2\varrho, u)| \leq c_1\, 2^{\frac{\lambda - n}{q}}\,[M(u)]^{\frac{1}{q}}\,\varrho^{\frac{\lambda - n}{q}} \tag{6.2}$$

$$|\tilde{u}(y) - c(y, 2\varrho, u)| \leq c_1\, 2^{\frac{\lambda - n}{q}}\,[M(u)]^{\frac{1}{q}}\,\varrho^{\frac{\lambda - n}{q}} \tag{7.2}$$

mentre applicando il lemma [I.2] si ottiene che

$$|c(x, 2\varrho, u) - c(y, 2\varrho, u)| \leq \left[\frac{2^{q+1+\lambda}}{K}\right]^{\frac{1}{q}} [M(u)]^{\frac{1}{q}}\,|x - y|^{\frac{\lambda - n}{q}}. \tag{8.2}$$

---

[9] È immediato verificare che se $\lambda > n + q$ le funzioni $u \in \mathcal{L}^{(q,\lambda)}(\Omega)$ coincidono quasi ovunque in Ω con delle costanti.

Dalle (5.2), (6.2), (7.2), (8.2) segue appunto

$$(9.2) \qquad |\, \tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) \,| \leq c_4(q, \lambda, n, K)\,[M(u)]^{\frac{1}{q}}\, |\, x - y\,|^{\frac{\lambda-n}{q}} .$$

Se $|\, x - y \,| \geq \frac{\varrho_0}{2}$, poichè Ω è connesso, si può costruire una poligonale i cui vertici sono contenuti in $\bar{\Omega}$ di estremi x e y e i cui lati abbiano lunghezza minore di $\frac{\varrho_0}{2}$; il numero dei lati di queste poligonali si può limitare uniformemente rispetto x e y in funzione solo di $d(\Omega)$ e di ϱ_0.

Basterà allora applicare la (9.2) alle coppie di punti che costituiscono i vertici dei lati di una poligonale del tipo ora detto, congiungente i punti x con y, per avere la tesi.

Abbiamo così concluso lo studio preliminare delle proprietà di regolarità delle classi $\mathcal{L}^{(q,\lambda)}(\Omega)$ con $\lambda > n$. Uno studio più completo di tali classi e di classi ancor più generali, nonchè uno studio comparativo tra queste classi e quelle di Morrey verrà forse trattato in un successivo lavoro. Mi limito qui ad osservare la generalità delle ipotesi su Ω nelle quali si sono ottenuti i risultati di questi numeri 1 e 2; l'ipotesi (A) sull'aperto Ω potrebbe anzi sostituirsi con la seguente, un po' più generale, che esistano due costanti positive K e ϱ_0, con $0 < \varrho_0 \leq d(\Omega)$, tali che, per qualunque $x \in \bar{\Omega}$ e $0 < \varrho \leq \varrho_0$

$$\text{mis}\,[I(x, \varrho) \cap \Omega] \geq K\,\varrho^{\alpha}$$

dove $\alpha \geq n$. In tal caso Ω può godere anche di una proprietà di cono generalizzata secondo una definizione introdotta in [5] e in [1].

n. 3. — Richiamiamo brevemente la definizione di spazi $W_s^q(\Omega)$ e $W_s^{(q,\lambda)}(\Omega)$ con $q \geq 1$, $0 \leq \lambda \leq n$ ed s numero reale positivo non intero; rinviamo per i necessari riferimenti sull'argomento e per la bibliografia al n. 4 di [2].

Sia $[s]$ il massimo intero non negativo $< s$; diremo che una funzione $u(x) \in W_s^q(\Omega)$ se

$$u(x) \in W_{[s]}^q(\Omega) \text{ (}^{10}\text{)}$$

(10) Per la definizione degli spazi $W_k^q(\Omega)$ con $q \geq 1$, $k > 0$ intero, si veda ad es. [2] od anche l'introduzione di questa nota. Se $p \equiv (p_1, \dots, p_n)$ è una n-pla di interi non negativi poniamo, secondo una nomenclatura abituale,

e

$$\sum_{|p|=[s]} \int_{\Omega} dx \int_{\Omega} \frac{|D^p u(x) - D^p u(y)|^q}{|x-y|^{n+(s-[s])q}} dy < +\infty$$

$W^q_s(\Omega)$ è uno spazio di Banach completo rispetto alla norma

$$(1.3) \qquad \| u \|_{W^q_s(\Omega)} = \left\{ \| u \|^q_{W^q_{[s]}(\Omega)} + \sum_{|p|=[s]} \int_{\Omega} dx \int_{\Omega} \frac{|D^p u(x) - D^p u(y)|^q}{|x-y|^{n+(s-[s])q}} dy \right\}^{\frac{1}{q}}$$

Indichiamo invece con $W^{(q,\lambda)}_s(\Omega)$, $q \geq 1$, $s > 0$ non intero, $0 \leq \lambda \leq n$, il sottoinsieme di $W^q_s(\Omega)$ delle funzioni $u(x)$ che verificano le condizioni seguenti

i) $$u(x) \in W^{(q,\lambda)}_{[s]}(\Omega) \quad (^{11})$$

ii) esiste una costante positiva $M(u)$ tale che

$$\sum_{|p|=[s]} \int_{I(x_0,\varrho)\cap\Omega} dx \int_{I(y_0,\varrho)\cap\Omega} \frac{|D^p u(x) - D^p u(y)|^q}{|x-y|^{n+(s-[s])q}} dy \leq M(u)\, \varrho^{\lambda}$$

per tutte le coppie di punti $x_0, y_0 \in \bar{\Omega}$ e i valori di ϱ compresi tra 0 e $d(\Omega)$.

$$|p| = p_1 + p_2 + \dots + p_n \quad \text{e} \quad D^p u = \frac{\partial^{|p|} u(x)}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}}.$$

La norma in $W^q_k(\Omega)$ è allora data da

$$\| u \|_{W^q_k(\Omega)} = \{ \sum_{|p| \leq k} \| D^p u \|^q_{L^q(\Omega)} \}^{\frac{1}{q}}.$$

(11) Anche per la definizione di questi spazi si veda la nota [2]. Se $u \in L^{(q,\lambda)}(\Omega)$, $q \geq 1$, $0 \leq \lambda \leq n$ (cfr. (4)) si pone

$$\| u \|_{L^{(q,\lambda)}(\Omega)} = \left[\sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ \varrho \in [0, d(\Omega)]}} \frac{1}{\varrho^{\lambda}} \int_{I(x_0,\varrho)\cap\Omega} |u(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}}$$

e, più in generale, se $u \in W^{(q,\lambda)}_k(\Omega)$, $q \geq 1$, $0 \leq \lambda \leq n$, $k > 0$ intero

$$\| u \|_{W^{(q,\lambda)}_k(\Omega)} = \{ \sum_{|p| \leq k} \| D^p u \|^q_{L^{(q,\lambda)}(\Omega)} \}^{\frac{1}{q}}.$$

Anche $W_s^{(q,\lambda)}(\Omega)$ è uno spazio di Banach completo se si assume come norma la seguente

$$\| u \|_{W_s^{(q,\lambda)}(\Omega)} = \Bigg\{ \| u \|^q_{W_{[s]}^{(q,\lambda)}(\Omega)} + \tag{2.3}$$

$$+ \sum_{|p|=[s]} \sup_{\substack{x_0, y_0 \in \overline{\Omega} \\ \varrho \in [0, d(\Omega)]}} \frac{1}{\varrho^\lambda} \int_{I(x_0,\varrho)\cap\Omega} dx \int_{I(y_0,\varrho)\cap\Omega} \frac{| D^p u(x) - D^p u(y) |^q}{| x - y |^{n+(s-[s])q}} dy \Bigg\}^{\frac{1}{q}} .$$

Si vede inoltre facilmente che per $\lambda = 0$ lo spazio $W_s^{(q,\lambda)}(\Omega)$ coincide con $W_s^q(\Omega)$.

Nel numero 4 della nota [2] ho studiato le proprietà di immersione per gli spazi ora introdotti e ho dato anche parziali risultati di hölderianità nel caso che $s > 1$. In questo numero studieremo le proprietà di limitatezza ed hölderianità delle funzioni $u \in W_s^q(\Omega)$, e più in generale $u \in W_s^{(q,\lambda)}(\Omega)$, quando q, s, λ verificano la relazione

$$\lambda + sq > n$$

Dimostriamo, più precisamente, il seguente teorema:

TEOREMA [I.3]. — *Se l'aperto Ω gode la proprietà (A) e $u(x) \in W_s^{(q,\lambda)}(\Omega)$ con $q \geq 1$, $0 \leq \lambda \leq n$, $0 < s < 1$ e se inoltre $\lambda + sq > n$ allora la funzione $u(x)$ coincide quasi ovunque con una funzione $\tilde{u}(x)$ hölderiana in $\overline{\Omega}$ la quale verifica la maggiorazione*

$$| \tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) | \leq c_5 \| u \|_{W_s^{(q,\lambda)}(\Omega)} | x - y |^{s + \frac{\lambda - n}{q}} \tag{3.3}$$

per ogni coppia di punti $x, y \in \overline{\Omega}$.

Sia x_0 un generico punto, fissato, di Ω, ϱ un numero positivo verificante la relazione $0 < \varrho \leq \varrho_0$ e sia $u(x)$ una funzione di $W_s^{(q,\lambda)}(\Omega)$ con q, λ, s, soddisfacenti le ipotesi del teorema. Per quasi tutti i punti ξ di $I(x_0, \varrho) \cap \Omega$ si ha allora

$$\inf_{c \in R} \int_{I(x_0,\varrho)\cap\Omega} | u(x) - c |^q dx \leq \int_{I(x_0,\varrho)\cap\Omega} | u(x) - u(\xi) |^q dx \tag{4.3}$$

Integrando rispetto a ξ su $I(x_0, \varrho) \cap \Omega$ si ottiene, tenuto conto della proprietà (A) relativa all'aperto Ω,

$$
\begin{aligned}
(5.3) \qquad & \inf_{c \in R} \int_{I(x_0,\varrho)\cap\Omega} | u(x) - c |^q \, dx \leq \frac{1}{K \varrho^n} \int_{I(x_0,\varrho)\cap\Omega} d\xi \int_{I(x_0,\varrho)\cap\Omega} | u(x) - u(\xi) |^q \, dx \leq \\
& \leq \frac{2^{n+sq}}{K} \varrho^{sq} \int_{I(x_0,\varrho)\cap\Omega} d\xi \int_{I(x_0,\varrho)\cap\Omega} \frac{| u(x) - u(\xi) |^q}{| x - \xi |^{n+sq}} \, dx
\end{aligned}
$$

D'altra parte, poichè $u \in W_s^{(q,\lambda)}(\Omega)$, dalla (2.3) segue che

$$
(6.3) \qquad \int_{I(x_0,\varrho)\cap\Omega} d\xi \int_{I(x_0,\varrho)\cap\Omega} \frac{| u(x) - u(\xi) |^q}{| x - \xi |^{n+sq}} \, dx \leq \varrho^\lambda \, \| u \|^q_{W_s^{(q,\lambda)}(\Omega)} .
$$

Dalle (5.3), (6.3) si ha in definitiva che per ogni $x_0 \in \overline{\Omega}$ e $0 < \varrho \leq \varrho_0$

$$
(7.3) \qquad \inf_{c \in R} \int_{I(x_0,\varrho)\cap\Omega} | u(x) - c |^q \, dx \leq c_6(n, s, q, \Omega) \, \| u \|^q_{W_s^{(q,\lambda)}(\Omega)} \varrho^{sq+\lambda}
$$

A meno di modificare la costante c_6 la (7.3) vale ovviamente per tutti i ϱ dell'intervallo $[0, d(\Omega)]$ ([12]).

Quindi se $u \in W_s^{(q,\lambda)}(\Omega)$ e Ω gode la proprietà (A) necessariamente $u \in \mathcal{L}^{(q,sq+\lambda)}(\Omega)$. La tesi segue allora dai risultati che abbiamo stabilito nei n.n. 1 e 2 e più precisamente dal teorema [I.2].

([12]) Sia infatti $\varrho_0 < \varrho \leq d(\Omega)$. Con calcolo del tutto analogo a quello svolto nel testo si ha che

$$
\inf_{c \in R} \int_{I(x_0,\varrho)\cap\Omega} | u(x) - c |^q \, dx \leq \inf_{c \in R} \int_\Omega | u(x) - c |^q \, dx \leq \int_\Omega | u(x) - u(\xi) |^q \, dx
$$

per quasi tutti i $\xi \in \Omega$; e quindi, integrando rispetto a ξ su Ω:

$$
\begin{aligned}
\inf_{c \in R} \int_{I(x_0,\varrho)\cap\Omega} | u(x) - c |^q \, dx & \leq \frac{[d(\Omega)]^{n+sq}}{\operatorname{mis}(\Omega)} \int_\Omega d\xi \int_\Omega \frac{| u(x) - u(\xi) |^q}{| x - \xi |^{n+sq}} \, dx \leq \\
& \leq \frac{[d(\Omega)]^{n+sq+\lambda}}{\operatorname{mis}(\Omega) . \varrho_0^{sq+\lambda}} \| u \|^q_{W_s^{(q,\lambda)}(\Omega)} \varrho^{sq+\lambda} .
\end{aligned}
$$

Questo teorema completa il teorema [I.4] della nota [2] e di conseguenza anche il punto iii) del successivo teorema [II.4]. Esso estende agli spazi del tipo di Morrey $W_s^{(q,\lambda)}(\Omega)$ con s non intero il risultato di Greco Nirenberg relativo al caso di s intero. Per $\lambda = 0$ si ottiene una generalizzazione nello stesso senso del risultato di Sobolev richiamato nell'introduzione.

È da notare infine la generalità dell'ipotesi su Ω in cui è stato ottenuto il precedente risultato di hölderianità; in sostanza basta fare su Ω l'ipotesi che valga la proprietà di cono di Sobolev o anche solo «la proprietà di cono generalizzata» (cfr. l'osservazione conclusiva del n. 2).

BIBLIOGRAFIA

[1] S. CAMPANATO: «*Il teorema di immersione di Sobolev per una classe di aperti non dotati della proprietà di cono*» Ricerche di Matem. vol. XI (1962).

[2] S. CAMPANATO: «*Proprietà di inclusione per spazi di Morrey*» Ricerche di Matem. (1963).

[3] D. GRECO: «*Criteri di compattezza per insiemi di funzioni in n variabili*» Ricerche di Matem. vol. I (1952).

[4] L. NIRENBERG: «*Estimates and existence of solutions of elliptic equations*» Comm. on pure and appl. Math. vol. IX, n. 1 (1956).

[5] G. STAMPACCHIA: «*Sur des espaces de fonctions qui interviennent dans les problèmes aux limites elliptiques*» Colloque sur l'Analyse fonctionnelle-Louvain (1960).

SANDRO FAEDO - *Direttore responsabile.* Finito di stampare il 1 luglio 1963